Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLIV Szkole Matematyki Poglądowej *Do czego to się przydaje?*, Sulejów, styczeń 2010.

Topologiczne problemy demokracji

Grzegorz KOSIOROWSKI, Kraków

Postawienie problemu

– Są trzy metody głosowania. Pierwsza przez aplauz. Znaczy, że wszyscy głosują. Druga metoda... Kulkami. Są kulki czarne i czerwone, które otrzymuje każdy głosujący... Yyyy... Przepraszam białe i czarne, które otrzymuje każdy głosujący... Czarna za – lub odwrotnie: czarna za... Yyyy... Czarna przeciw – biała za lub odwrotnie. Jest trzecia metoda przez podniesienie rąk. Ta metoda jest najdoskonalsza.

– No świetnie, ale jaką metodą wybierzemy metodę głosowania?

Takie problemy przytrafiają się nie tylko bohaterom filmu „Rejs". Są one tak stare, jak koncepcja demokratycznego głosowania. Nikomu zainteresowanemu polityką nie są obce dyskusje między zwolennikami okręgów jednomandatowych i wyborów „proporcjonalnych", między tymi, którzy preferują metodę d'Hondta i tymi, którzy za lepszą uważają metodę Sainte-Laguë'a. Ale skąd się biorą te rozbieżności? Czyż może być coś sprawiedliwszego i mniej skomplikowanego niż zasada wybierania najlepszych rozwiązań dla społeczeństwa przez wskazanie większości?

Jako pierwszy w sposób formalny problem dostrzegł i zapisał Nicolas de Caritat, markiz de Condorcet, XVIII-wieczny filozof-racjonalista i polityk. Była to postać skądinnąd niezmiernie barwna: jeden z prekursorów ekonomicznego liberalizmu, zwolennik równych praw dla wszystkich ludzi i znany filantrop. Jako bojownik o prawa obywatelskie znalazł się wśród „duchowych ojców" rewolucji francuskiej, co zresztą mu nie posłużyło: z powodu krytyki radykalnych republikanów w roku 1794 został aresztowany i prawdopodobnie zamordowany w więzieniu. Dla nas natomiast interesujące są jego zainteresowania matematyczne: jako uczeń d'Alemberta zasłużył się wydaniem kilku prac o rachunku całkowym, ale najbardziej upamiętniła jego nazwisko praca o zastosowaniu matematyki w naukach społecznych, w której rozważał metody liczenia głosów w wyborach. To z niej pochodzi słynny paradoks, który można sformułować następująco:

Własność 1 (Paradoks Condorceta). *Relacja „Większość woli opcję A od opcji B" nie musi być przechodnia, jeśli grupa wybiera spośród przynajmniej trzech opcji.*

Klasycznym przykładem są tzw. „preferencje cykliczne". Wyobraźmy sobie trzech wyborców: x, y i z wybierających pomiędzy trzema opcjami: A, B i C. Załóżmy, że preferencje x to $A > B > C$, preferencje y to $B > C > A$, a preferencje z to $C > A > B$ (gdzie znak „$>$" oznacza „lepszy niż"). Jak widać, w zwykłym głosowaniu każda opcja otrzyma jeden głos. Natomiast jeśli najpierw przeprowadzi się wybory pomiędzy A i B, a potem pomiędzy C i zwycięzcą tej rywalizacji (będzie to A) przy pomocy zwykłej większości głosów, to wygra opcja C, która przegrałaby, gdyby wybory zacząć od porównania C z B (gdyż x i y przegłosują biednego z)!

Z przykładu wynika, że wynik demokratycznych z pozoru wyborów (w każdym „etapie" rozstrzygała wszak większość głosów!) zależy od przyjętej metody głosowania. Zatem pytanie o najsprawiedliwszą metodę wydaje się być jak najbardziej zasadne, gdyż bez niej może się okazać, że o wynikach wyborów decydują nawet nie liczący głosy, ale... układający pytania.

Formalnie rzecz ujmując, celem teorii głosowań jest stworzenie metody głosowania tj. funkcji, która preferencjom wszystkich członków jakiejś grupy przypisze w sensowny sposób optymalne rozwiązanie danej kwestii dla całej grupy. Nie dopuszczamy sytuacji, gdy po poznaniu wyników trzeba zdać się na los, lub gdy uznamy, że „decyzji nie osiągnięto". Zagadnienie to można sformułować też inaczej: chodzi o stworzenie algorytmu podejmowania decyzji dla jednej osoby tj. funkcji, która różne wartościowania możliwych decyzji wedle rozmaitych kryteriów przekształci w ustawienie tych decyzji w sensownej kolejności, uwzględniającej wszystkie kryteria. Oczywiście, dla dobrego dla matematyków postawienia problemu, trzeba jeszcze zdecydować, co oznacza „sensowny”... Ale zanim zacznie się taką metodę tworzyć, trzeba sobie zadać pytanie: czy aby na pewno metoda zawsze istnieje?

Przykłady

Zacznijmy od kilku przykładów takich zagadnień:

Przykład 1. Student w semestrze pisze cztery sprawdziany z algebry – z każdego otrzymuje jakąś ocenę „procentową”. Jaką ocenę „procentową” należy dać mu na koniec na podstawie tych kolokwiów?

Mamy tu do czynienia z sytuacją przydzielenia „sprawiedliwej” opcji na podstawie 4 kryteriów – rezultatów sprawdzianów. Istnienie w miarę sensownej metody jest tu oczywiste: może nią być np. przydzielenie studentowi średniej arytmetycznej jego wyników.

Przejdźmy do sytuacji trudniejszych.

Przykład 2. Apolonia i Boguś umawiają się na brzegu kolistego jeziora. Chcemy stworzyć mechanizm „głosowania” ustalający konkretne miejsce randki na podstawie wskazań preferowanych miejsc Apolonii i Bogusia (każdego z nich osobna) – bez wcześniejszej wiedzy, jakie miejsca oni wskażą.

Wstępnie sensowną sugestią wydaje się wybieranie punktu środkowego krótszego z łuków brzegu jeziora, ale co się stanie, jeśli Boguś i Apolonia wskażą dokładnie przeciwległe punkty? Wybór dowolnego z punktów środkowych nie będzie dobrą opcją, gdyż wiadomo, że trudno wskazać idealnie wymarzony punkt, a nie chcielibyśmy dramatycznej różnicy wyników spowodowanej drobnym osunięciem się palca na mapie przy wskazaniu preferowanego miejsca. Tutaj sprawa jest trudniejsza...

Trzeci przykład wydaje się nieco abstrakcyjny, ale zapewniam Czytelnika, że istnieją państwa, które mają podobne problemy (acz podchodzą do nich w sposób nieco mniej wyrafinowany).

Przykład 3. W pewnym kraju Związek Zawodowy Matematyków organizuje demonstrację połączoną ze zdemolowaniem stolicy państwa. Tradycyjnie protestującym należą się za to nowe przywileje, np. podwyżka pensji. Powstaje jednak pytanie: jak dużo powinno państwo zapłacić w stosunku do efektów protestu?

Niech RWZS oznacza „relatywny współczynnik zdemolowania stolicy” i określa determinację protestujących, wyrażoną przyrostem ilości szkód w porównaniu z poprzednim protestem; PZ – przyrost pensji związkowców (organizatorów protestu) w wyniku demonstracji, a PM – przyrost pensji matematyków (protestujących) w wyniku demonstracji. Parlament musi wybrać stosunek RWZS:PZ:PM.

Zauważmy, że posłowie mogą wybrać dowolny stosunek tych trzech liczb (z wyjątkiem $0:0:0$). W istocie, są w parlamencie bezduszne stronnictwa, uważające, że za demolowanie stolicy należy się nie nagroda, lecz kara – czy to dla organizatorów, czy też uczestników protestu, bądź obu tych grup.
Z matematycznego punktu widzenia, parlamentarzyści muszą w jakiś sposób wybrać kierunek w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, czyli punkt z dwuwymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^2$.

Klasyczna teoria głosowań

Klasyczne podejście do zagadnienia polega na analizie przypadku, gdy grupa wyborców ma do wyboru skończoną ilość opcji. Najbardziej znanym rezultatem w tej teorii jest zaskakujące twierdzenie Kennetha Arrowa, laureata nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii.

Przede wszystkim Arrow musiał sformalizować problem z punktu widzenia matematyki. Rozważał on skończony zbiór X – zbiór opcji, a przez n oznaczał liczbę głosujących. Preferencją nazwany został liniowy porządek na zbiorze X (ew. dopuszczający równości). Poszukiwany jest system głosowania: funkcja F, która dowolnemu układowi preferencji głosujących przyporządkowuje jedną „preferencję grupy" i spełnia pewne „logiczne" założenia, takie jak:

- **Niezależność od opcji nieistotnych** – Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w preferencji grupy musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie. Wydaje się to założeniem rozsądnym: jeśli ktoś zadaje pytanie, czy wolimy pizzę z szynką, czy kurczakiem, to dla odpowiedzi nie powinno być istotne, czy istnieje gdzieś jeszcze pizza z tuńczykiem.
- **Poszanowanie jednomyślności – postulat Pareto** – Jeśli każdy głosujący woli opcję A od B, to grupa jako całość również. Wydaje się, że jest to dość fundamentalny wymóg, który spełniać musi system demokratycznego głosowania.

Oczywiście, od idealnego systemu powinno się wymagać o wiele więcej. Ale tutaj pojawia się:

Twierdzenie 2 (Paradoks Arrowa, 1951). *Jeśli system głosowania F, spełnia aksjomat niezależności od opcji nieistotnych oraz postulat Pareto, to jest rzutowaniem na jedną ze współrzędnych, czyli... dyktaturą jednego z członków grupy (w rozumieniu: preferencje pozostałych nie są istotne dla rezultatu głosowania).*

Jak widać, matematyka wykazuje, że już najbardziej podstawowe, intuicyjne założenia o istocie demokracji są w praktyce sprzeczne. Z paradoksu Arrowa wynika cała seria innych twierdzeń, pokazujących sprzeczności innych intuicyjnych aksjomatów – więcej o tym poczytać można na przykład w [Soz], tam również znajduje się w miarę prosty dowód twierdzenia Arrowa.

Jednakże, ponieważ w podanych wyżej przykładach zbiór opcji nie jest skończony, ani nawet dyskretny, teoria klasyczna nie wystarcza do rozwiązania wszystkich problemów.

Odrobina topologii algebraicznej

Niech P będzie przestrzenią topologiczną łukowo spójną, a ponadto CW-kompleksem. Jeśli ktoś nie przepada za tą strukturą, może podstawić w miejsce CW-kompleksu przestrzeń homeomorficzną z kompleksem komórkowym, rozmaitością zwartą, czy uogólnionym wielościanem: to założenie jest czysto techniczne i ma na celu eliminację przypadków „patologicznych". Modelowa grupa składa się z n głosujących.

Definicja 1. Systemem głosowania *nazywamy funkcję ciągłą $F : P^n \to P$, spełniającą poniższe warunki:*

- ***Jednomyślność:*** *Dla każdego $p \in P$ zachodzi $F(p, p, \ldots, p) = p$.*
- ***Równość lub symetria:*** *F jest niezmiennicza ze względu na permutacje współrzędnych, tj. na wynik głosowania nie wpływa kolejność głosujących.*

W istocie, pytanie o istnienie takiej funkcji jest pytaniem o istnienie przedłużenia funkcji ciągłej z przekątnej P^n (gdzie jest zadana) na całe P^n. Takimi zagadnieniami zajmuje się teoria przeszkód: dział topologii algebraicznej, której przydatność w zagadnieniach społecznych wydaje się dość zaskakująca. Tak, czy inaczej, przed rozwiązaniem zagadnienia, konieczne jest przypomnienie kilku definicji z tej dziedziny.

Definicja 2. *$Y \subset X$ jest* retraktem *X, gdy istnieje retrakcja, czyli funkcja ciągła $r : X \to Y$, taka, że dla każdego $y \in Y$ zachodzi: $r(y) = y$.*

Oczywiście, punkt jest retraktem dowolnej przestrzeni; słynne twierdzenie Brouwera stwierdza, że brzeg kuli (sfera) nie jest retraktem kuli. W analizie przykładu 2 przyda się natomiast inna własność pochodząca z „matematycznego folkloru" (nawet jeśli nie tak prosto jest ją udowodnić metodami topologii ogólnej): okrąg „środkowy" jest retraktem wstęgi Möbiusa, lecz okrąg, będący jej brzegiem, nie jest.

W przykładzie 2 model topologiczny jest następujący: $P = \mathbb{S}^1$, $n = 2$. Szukamy systemu głosowania $F : T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. W istocie, ze względu na warunek symetrii $F(x, y) = F(y, x)$, dziedziną funkcji F jest $M = T^2/\Sigma^2$, czyli wstęga Möbiusa. Niech $\Delta : \mathbb{S}^1 \ni x \to (x, x) \in \partial M$. Gdyby F istniała, to $\Delta \circ F$ byłoby retrakcją wstęgi Möbiusa na jej brzeg. Zatem, niestety, Apolonia i Boguś nie mają idealnego, demokratycznego systemu wyłaniania miejsca randki.

Do analizy przykładu 3 potrzeba jeszcze kilku konstrukcji:

Definicja 3. *Ciągłe odwzorowania $f, g : X \to Y$ są* homotopijne *($f \simeq g$), jeśli istnieje funkcja ciągła $H : X \times I \to Y$, takie że $f(x) = H(x, 0)$ oraz $g(x) = H(x, 1)$ dla $x \in X$.*

Definicja 4. *X, Y są* homotopijne*, jeśli istnieją ciągłe $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, takie, że $g \circ f \simeq id_X$ i $f \circ g \simeq id_Y$ – f i g nazywamy* homotopijnymi równoważnościami.

Warto w tym miejscu zauważyć, że wszelkie przestrzenie homeomorficzne są automatycznie homotopijne, a homotopijną równoważność można zawsze traktować jako „nieco zaburzony homeomorfizm".

Definicja 5. *X jest przestrzenią* ściągalną*, jeśli jest homotopijna z przestrzenią jednopunktową, tj. da się ją „płynnie ściągnąć do punktu" (np. zbiory wypukłe, gwiaździste i homeomorficzne z nimi).*

Łukowo spójnemu CW-kompleksowi X można przypisać ciąg grup zwanych grupami homotopii, oznaczanych przez $\pi_n(X)$. Przestrzenie homeomorficzne, a nawet tylko homotopijnie równoważne, mają te same grupy homotopii (niekoniecznie na odwrót). Jednocześnie każda funkcja ciągła $f : X \to Y$ indukuje ciąg homomorfizmów $f_{*k} : \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$. Jeśli kogoś zainteresują szczegółowe definicje tych struktur, zachęcam do zainteresowania się świetnym podręcznikiem [Hat].

Czas na kilka przykładów:

- $\pi_n(X) = 0$, gdy X jest zbiorem ściągalnym.
- $\pi_n(X)$, dla $n \geq 2$ są abelowe.
- $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$, gdy $k < n$; $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$.
- Dla każdego n, k $\pi_k(X^n) = (\pi_k(X))^n$.

Teraz wyjaśni się przyczyna technicznego założenia o „niepatologiczności" badanych przestrzeni. Jest nią następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3 (Whitehead). *Dla CW-kompleksów odwzorowanie indukujące izomorfizmy między grupami homotopii w każdym wymiarze jest homotopijną równoważnością. W szczególności CW-kompleks jest ściągalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego grupy homotopii są trywialne.*

Dzięki temu twierdzeniu badanie pewnej własności topologicznej (ściągalności) przestrzeni wyborów można sprowadzić do badania algebraicznej struktury odpowiednich grup.

Algebraiczna teoria głosowań

Niech G będzie grupą (z dodawaniem), $n \geq 2$. *Systemem głosowania* na G jest homomorfizm f z G^n w G, spełniający warunki jednomyślności i równości.

Załóżmy, że taki system istnieje. Jeśli $g(x) = f(x, 0, \ldots, 0)$ to łatwo sprawdzić, że $g(x) + g(y) = g(y) + g(x) = g(x + y)$, a co za tym idzie $ng(x) = g(nx) = f(x, x, \ldots, x) = x$.

Stąd natychmiast otrzymamy, że G jest abelowa, „mnożenie przez n” jest automorfizmem G, a zatem można jednoznacznie zadać w G dzielenie przez n. Ponadto, zachodzi $nf(x_1, \ldots, x_n) = ng(x_1 + \ldots + x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ – zatem system głosowania na G jest dokładnie jeden: jest to „średnia arytmetyczna”.

Z istnienia dzielenia wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4. *Jeśli G jest skończenie generowana, to rząd każdego z jej elementów musi być względnie pierwszy z n (w szczególności, nie może być nieskończony). Jeśli system głosowania istnieje dla każdego n, to $G = \{0\}$.*

Na potrzeby tego artykułu szczególnie istotne jest poniższe twierdzenie, umożliwiające badanie topologii przestrzeni wyborów metodami algebraicznymi:

Twierdzenie 5. *Dla ustalonego n, system głosowania w przestrzeni P indukuje systemy głosowania w każdej z grup homotopii $\pi_i(P)$.*

Stąd natychmiast otrzymujemy:

Wniosek 6. *Grupa $\pi_1(P)$ jest abelowa, a wszystkie grupy homotopii P dopuszczają dzielenie przez n.*

Topologiczna teoria głosowań

Mając powyższe oznaczenia, definicje i twierdzenia, można przejść do zasadniczych rezultatów.

Twierdzenie 7 (Chichilnisky, Heal, 1983; Eckmann, 1954). *Jeśli P jest CW-kompleksem (uogólnionym wielościanem) złożonym ze skończonej ilości komórek (wierzchołków, krawędzi, ścian bocznych itd.), to istnienie systemu głosowania dla każdego n jest równoważne ściągalności P.*

Szkic dowodu (naszkicuję tutaj tylko dowód istnienia systemu głosowania, gdyż reszta twierdzenia natychmiast wynika z wniosku 11). Rozważam $K(P)$ – otoczkę wypukłą P w odpowiedniej przestrzeni euklidesowej. Dla niej, i dla dowolnego n, istnieje system głosowania – F_a: „średnia arytmetyczna” (jak w przykładzie 1). $K(P)$ również jest ściągalnym CW-kompleksem. Z twierdzenia Whiteheada, inkluzja $i : P \to K(P)$ jest homotopijną równoważnością. Dzięki twierdzeniu Lundella–Weingrama ([Lau]) istnieje r – retrakcja $K(P)$ na P. Szukanym systemem będzie $r \circ F_a \circ i$. □

Teraz, wiedząc że $\mathbb{R}P^2$ nie jest ściągalna (bo $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$), automatycznie stwierdzamy, że w przykładzie 3 nie dla każdej ilości posłów będzie istniało rozwiązanie. No dobrze, ale czy istnieje dla jakiejkolwiek? Zanim podam odpowiedź na to pytanie, konieczna będzie jeszcze jedna definicja:

Definicja 6. H-przestrzeń *to przestrzeń topologiczna X, dla której istnieje ciągłe „mnożenie” $\mu : X \times X \to X$ i element $e \in X$, taki, że $\mu(e, \cdot) \simeq \mu(\cdot, e) \simeq id_X$.*

Okazuje się, że jeśli w powyższej definicji homotopijne równoważności zastąpi się równościami, klasa H-przestrzeni nie zmieni się (co najwyżej zmniejszy się ilość możliwych „mnożeń”). Jednakże definicja, którą wybrałem, jest wygodniejsza w zastosowaniach. Aby ocenić zakres klasy H-przestrzeni warto zapoznać się z następującymi faktami ([Hat]):

- Grupy topologiczne (m.in. sfery $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$) są oczywiście H-przestrzeniami.
- Pozostałe sfery nie są H-przestrzeniami (twierdzenie Adamsa).
- $\mathbb{C}P^\infty$, $\mathbb{R}P^\infty$ są H-przestrzeniami, choć nie są grupami topologicznymi.

Twierdzenie 8 (Browder, 1961). *CW-kompleks o skończonej liczbie komórek, będący H-przestrzenią, jest ściągalny, lub istnieje k takie, że k-ta grupa homologii $H_k(P) = \mathbb{Z}$.* ([Eck])

Twierdzenie 9 (Generalizacja Serre'a twierdzenia Hurewicza). *Wszystkie grupy homotopii CW-kompleksu dopuszczają jednoznaczną podzielność przez n wtedy i tylko wtedy, gdy dopuszczają ją też wszystkie grupy homologii.* ([Eck])

Kolejne twierdzenie wskazuje, dlaczego H-przestrzenie są istotne dla teorii głosowań:

Twierdzenie 10 (Eckmann,1962; Weinberger, 2004). *Jeśli P ma system głosowania dla pewnego n, to P jest H-przestrzenią.*

Dowód. Niech $F : P^n \to P$ będzie systemem głosowania, a $e \in P$ – dowolnym punktem.

$\phi : P \ni p \mapsto F(p, e, \ldots, e) \in P$ indukuje w każdej grupie homotopii P badany wcześniej automorfizm $g(x) = f(x, 0, \ldots, 0)$ (dzielenie przez n), gdzie f jest zaindukowanym przez F algebraicznym systemem głosowania. ϕ indukuje izomorfizm w każdej z grup homotopii, więc jest homotopijną równoważnością (z twierdzenia Whiteheada), zatem istnieje ψ, takie że $\psi\phi \simeq id_P$.

Zadaję na P
$$\mu(p, q) = \psi F(p, q, e, \ldots, e).$$
Wtedy $\mu(p, e) = \psi F(p, e, e, \ldots, e) = \psi\phi(p)$ dla $p \in P$ będzie „mnożeniem". To samo rozumowanie sprawdza odpowiedni warunek dla $\mu(e, p)$. □

Z trzech ostatnich twierdzeń wynika automatycznie:

Wniosek 11 (Zasadnicze Twierdzenie Tego Artykułu). *Jeśli CW-kompleks o skończonej liczbie komórek ma system głosowania dla pewnego n, to jest ściągalny.*

Skoro tak – problem z przykładu 3 również ma rozstrzygnięcie negatywne. Dla żadnej liczby posłów większej lub równej od dwóch nie da się stworzyć sprawiedliwego i demokratycznego systemu głosowania w sprawie społecznego protestu. Może dlatego zainteresowane państwa stosują inne procedury?

Ciekawostki

Na zakończenie, chciałbym przedstawić garść ciekawostek związanych z teorią głosowań. Po pierwsze, historia głównych rezultatów jest dość skomplikowana, na co wskazują daty ich sformułowania. Największy wpływ na topologiczną teorię głosowań wywarła Graciela Chichilnisky, matematyczka zaczynająca swoją karierę od „twardej" algebry, która odchodziła coraz bardziej w stronę zastosowań, by zostać kolejno: dziekanem wydziału ekonomii na uniwersytecie Columbia, doradcą w ministerstwie finansów Argentyny i działaczką organizacji ekologicznych. To właśnie ona sformułowała topologiczną wersję zagadnienia, a także udowodniła wiele twierdzeń na ten temat z twierdzeniem 7 na czele. Zasadnicze Twierdzenie Tego Artykułu, zamykając pewien dział badań, udowodnił Shmuel Weinberger na początku XXI wieku. Podekscytowany odkryciem, na jednej z konferencji postanowił przedyskutować je z Beno Eckmannem (uczniem Hopfa, autora definicji H-przestrzeni). Jakież było ich zdziwienie, gdy okazało się, że większość wyników teorii głosowań zostało uzyskane przez Eckmanna zanim jeszcze ta teoria została sformułowana! Eckmann zajmował się bowiem abstrakcyjną topologią algebraiczną, systemy głosowania nazywał n-średnimi i nigdy nie przypuszczał, że mogą mieć one jakiekolwiek zastosowanie praktyczne. Dlatego też Chichilnisky, Heal i Weinberger musieli dojść do jego rezultatów od zupełnie innej strony.

Po drugie, może się wydawać, że dyskretna teoria głosowań jest bardziej praktyczna, a problemy topologiczne są wykreowane sztucznie. Tymczasem okazuje się, że teoria dyskretna jest jedynie szczególnym przypadkiem topologicznej, a wszystkie wcześniej sformułowane jej problemy udało się rozwiązać w pracy [Bar], właśnie tłumacząc je na język topologiczny (przy pomocy tak zwanych nerwów) i stosując znane techniki.

Po trzecie, wiele otwartych problemów ciągle czeka na nieco zmienionym kierunku badań. Analizuje się ([Chi]) preferencje zadane jako „funkcje użyteczności" – uwzględniające „jak bardzo" głosujący wolą jedną opcję od drugiej. Tutaj dochodzą narzędzia z innych dziedzin matematyki jak np. teoria miary.

Po czwarte, warto zauważyć, że twierdzenia przedstawione w artykule mówią o CW-kompleksach skończonych. Tymczasem, przestrzenie Eilenberga–MacLane'a $K(\mathbb{Q}, k)$ są przykładami nieściągalnych CW-kompleksów z systemem głosowania dla każdej liczby głosujących. Oczywiście, mają one nieskończenie wiele komórek. Ponadto, badanie tych systemów daje zaskakujące rezultaty: dla niektórych z tych przestrzeni systemy głosowania istnieją, ale mają „patologiczne" własności, na przykład preferencje grupy, według nich, okazują się być w zasadzie dowolnie dalekie od preferencji dowolnego z głosujących ([Lau]).

Jednym z przykładów takich przestrzeni jest $P = \mathbb{R}P^\infty$, dla której istnieje system głosowania dla dowolnej nieparzystej liczby głosujących, ale nie istnieje dla żadnej parzystej liczby, co przeczy intuicji sugerującej, że sytuacja powinna się komplikować wraz ze wzrostem liczebności grupy.

Na koniec, wszystkim zainteresowanym tą teorią polecam rozpoczęcie badań od artykułu [Lau], który zawiera nie tylko większość podanych tu rezultatów w formie bardzo przystępnej, ale także obszerną bibliografię, z której można się dowiedzieć dużo, dużo więcej.

Literatura

[Bar] Y. Baryshnikov, *Topological and discrete social choice: in search of a theory*, Social Choice and Welfare, 14, 1997, p. 199–209.

[Chi] G. Chichilnisky, różne artykuły z `http://www.chichilnisky.com/`, szczególnie *Necessary and Sufficient Conditions for a Resolution of the Social Choice Paradox* (wspólnie z G. Healem), Journal of Economic Theory, Vol 31, No. 1, October 1983, p. 68–87.

[Eck] B. Eckmann, *Social Choice and Topology: A Case of Pure And Applied Mathematics*, Lecture at ETH Zurich, 2003.

[Hat] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, `http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html`, 2002.

[Lau] L. Lauwers, *Topological Social Choice*, Mathematical Social Sciences 40 (2000), 1–39.

[Soz] T. Sozański, *Paradoksy preferencji grupowych: twierdzenia Arrowa i Sena; Notatka z kursu Teoria gier i decyzji z elementami teorii wyboru społecznego*, `http://www.cyfronet.krakow.pl/ ussozans/arrowsen.pdf`, 2004.

[Wei] S. Weinberger, *On the topological social choice model*, Journal of Economic Theory, Vol 115, 2004, p. 377–384.