Na podstawie wykładu wygłoszonego w dniu 11.10.2009 w Sulejowie, na konferencji organizowanej przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego we współpracy ze Stowarzyszeniem na rzecz Edukacji Matematycznej.

O izometriach i liczbach chromatycznych

Krzysztof CIESIELSKI, Kraków

O tym, że problemy matematyczne mają swój specyficzny urok, matematyków przekonywać nie trzeba. Pewne z nich jednak są szczególnie atrakcyjne. Mowa o zadaniach, których sformułowanie jest bardzo elementarne, zrozumiałe bez trudu dla ucznia, ale na rozwiązanie wcale nie jest łatwo wpaść... A zdarza się, że zmagający się z nimi wielbiciele matematyki nie znają rozwiązania – ba, więcej: nie wiedzą, czy ktoś ten problem już kiedyś rozwiązał! Przykładem takiego problemu jest zadanie, ongiś znane w pewnych kręgach jako *Problem izometrii*.

Problem izometrii. *Załóżmy, że funkcja z płaszczyzny w płaszczyznę zachowuje odległość 1, to znaczy – jeśli dwa punkty są odległe o 1, to ich obrazy też. Czy stąd wynika, że ta funkcja zachowuje także wszystkie inne odległości, czyli że jest izometrią?*

Zapiszmy rzecz formalnie; będziemy przez $d(A, B)$ oznaczać odległość euklidesową. Chcemy zbadać, czy prawdziwe jest twierdzenie:

Jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia własność:

$$d(A, B) = 1 \;\Rightarrow\; d((f(A), f(B)) = 1 \text{ dla dowolnych } A, B \in \mathbb{R}^2$$

to f jest izometrią.

Z pytaniem tym zetknęliśmy się w Krakowie jesienią 1979 na jednym ze spotkań Koła Matematyków Studentów UJ. Na organizowanych co parę miesięcy specjalnych posiedzeniach studenci zajmowali się stawianiem i rozwiązywaniem ciekawych problemów; powyższe zadanie, które przedstawił student IV roku Edward Kania (nie wymyślił go, a gdzieś usłyszał) od razu wzbudziło ogromne zainteresowanie. Intrygowało niesłychanie elementarne (zwłaszcza w porównaniu z innymi problemami) sformułowanie w połączeniu z tym, że nikt z nas nie potrafił zadania rozwiązać – a próbowało wielu. Wśród tych, którzy chcieli zagadnienie rozstrzygnąć, byli bardzo dobrzy studenci, były osoby mające w swoim dorobku niebagatelne sukcesy w Olimpiadzie Matematycznej. Dziś liczni spośród zmagających się ongiś bez powodzenia z problemem izometrii są profesorami i doktorami nauk matematycznych...

Nieraz dobrą metodą walki z zadaniem jest próba rozwiązania zagadnienia prostszego. Zdarza się, że rozstrzygnięcie tego łatwiejszego problemu pomoże w walce z oryginalnym, może jakaś idea znajdzie zastosowanie...

Tu zmiana na zadanie prostsze jest naturalna. Zamiast płaszczyzny rozważmy prostą. Czy wówczas zachowywanie odległości 1 powoduje, że badane odwzorowanie jest izometrią? Dość szybko można stwierdzić, że nie. Weźmy mianowicie funkcję f, która każdej liczbie całkowitej n przypisuje $n + 1$, natomiast dla liczby niecałkowitej mamy $f(x) = x$. Oczywiście punkty odległe o 1 przekształcane są na punkty odległe o 1 (bo albo oba są całkowite, albo oba niecałkowite), izometrią natomiast taka funkcja oczywiście nie jest.

Przez rok nikt nie potrafił poradzić sobie z problem w jego oryginalnej postaci. W październiku 1980 przyszedł na studia nowy rocznik – młodzi zapaleńcy od razu „rzucili się" na nierozwiązane zadania... Po kilku dniach problem izometrii został pokonany. Rozwiązał go Sławomir Kołodziej, dziś pracujący na Uniwersytecie Jagiellońskim profesor nauk matematycznych, autor wielu ważnych wyników przede wszystkim w analizie zespolonej.

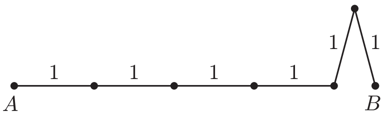
Oto schemat dowodu przedstawionego przez Kołodzieja.

Na wstępie podamy dwie obserwacje, których dokonali także wcześniej inni zmagający się z problemem.

Po pierwsze, obrazami wierzchołków trójkąta równobocznego o boku 1 przez funkcję f są wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007–2009 jako projekt badawczy rozwojowy.

Po drugie, jeśli $d(A, B) \leqslant n$, to $d((f(A), f(B)) \leqslant n + 1$. Ta obserwacja wymaga krótkiego uzasadnienia. Narysujmy odcinek $\overline{AB}$ i przyjmijmy że



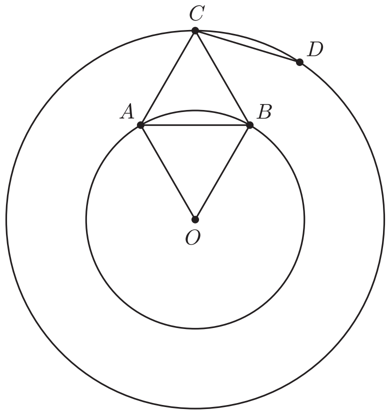
Rys. 1

$n-1 < d(A,B) \leqslant n$. Możemy wówczas odpowiednio skonstruować $n+2$ punkty odległe o 1 (pierwszym z nich jest A, ostatnim B).

Ze względu na to, że odległość 1 między „węzłami” zostaje zachowana, punkty $f(A)$ i $f(B)$ nie mogą być odległe o więcej niż $n+1$.

Teraz przejdźmy do zasadniczych punktów dowodu.

Jeśli punkt A i B są odległe o $\sqrt{3}$, to ich obrazy mogą albo też być odległe o $\sqrt{3}$, albo się pokrywać. Wykażemy, że ta druga możliwość nie może zajść.

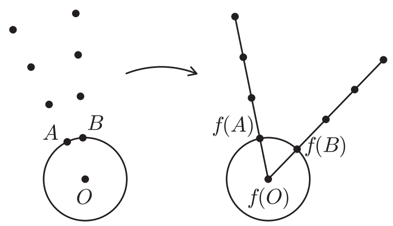


Rys. 2

Niech punkty O oraz C będą odległe o $\sqrt{3}$; możemy wówczas znaleźć takie punkty A i B, że zarówno trójkąt OAB jak i CAB są trójkątami równobocznymi o boku 1. Obraz $f(C)$ punktu C będzie albo okrywał się z obrazem $f(O)$ punktu O, albo będzie leżał na okręgu o środku $f(O)$ i promieniu $\sqrt{3}$. To samo jednak dotyczy punktu D leżącego na okręgu o środku O i promieniu $\sqrt{3}$, odległego od C o 1. Gdyby choć jeden z obrazów $f(C)$ i $f(D)$ był identyczny z punktem $f(O)$, to odległość tych obrazów wynosiłaby albo 0, albo $\sqrt{3}$ – co jest niemożliwe, bo $d(C,D) = 1$.

Ta obserwacja jest dla dowodu kluczowa. Dzięki niej można bowiem zauważyć, że „nieskończona wysypka” utworzona przez wierzchołki trójkątów równobocznych o boku 1 przejdzie na analogiczną „nieskończoną wysypkę”. W szczególności, punkty leżące na jednej prostej, odległe o liczbę całkowitą, przejdą w punkty leżące na jednej prostej i odległości między nimi się nie zmienią.

Teraz pokażemy, ze okrąg o promieniu 1 przekształcany jest izometrycznie na okrąg o promieniu 1. Istotnie, przypuśćmy, że jest inaczej; niech O oznacza środek takiego okręgu, a A i B niech będą takimi dwoma punktami okręgu, że odległość miedzy nimi się po przekształceniu zmieni. Możemy przyjąć, że się zwiększy. Dlaczego? Rozważmy sześciokąt foremny i wierzchołku A, wpisany w badany okrąg; możemy przyjąć, że B jest punktem na łuku między A a sąsiednim wierzchołkiem. Gdyby odległość między A i B się zmniejszyła, to zamiast A rozważamy ten sąsiedni wierzchołek sześciokąta.



Rys. 3

Zakładamy zatem, że odległość między $f(A)$ i $f(B)$ jest większa niż między A i B. Zbadajmy proste OA oraz OB. Jeśli odległość między $f(A)$ i $f(B)$ zwiększy się (nawet minimalnie), to ze względu na to, że po przekształceniu współliniowość odpowiednich punktów na prostych OA i OB zostanie zachowana, znajdziemy punkty C (z prostej OA) i D (z prostej OB), które są oddalone od O tak bardzo, że odległość między $f(C)$ i $f(D)$ będzie o co najmniej 2 większa, niż odległość między C i D. A to jest niemożliwe.

Teraz rozważamy pewien okrąg o promieniu 1 przekształcany izometrycznie na okrąg o takim samym promieniu. Dla każdego punktu na wyjściowym okręgu kreślimy okrąg jednostkowy o środku w tym punkcie; szybko zauważamy, że całe koło jednostkowe jest przekształcane izometrycznie na obraz, a stąd już błyskawicznie wynika teza.

Wkrótce po rozwiązaniu tego problemu przez Kołodzieja, inny dowód podał student tego samego roku, Apoloniusz Tyszka. Jego rozumowanie uogólniało twierdzenie na przypadek $\mathbb{R}^n$, gdzie $n > 1$. Innymi słowy, dla $n > 1$, jeśli funkcja f prowadzi z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ i dla dowolnych punktów A, B, dla których $d(A,B) = 1$, mamy $d((f(A), f(B)) = 1$ to f jest izometrią. Przez d oznaczamy tu odległość euklidesową w $\mathbb{R}^n$.

Kilka lat później (czasy były „przedinternetowe”, dostęp do naukowych baz danych był znacznie a to znacznie trudniejszy niż teraz) odkryłem przypadkowo w prestiżowym piśmie matematycznym *Proceedings of the American Mathematical Society* z roku 1953 pracę *On isometries of Euclidean spaces*. Autorami byli F. S. Beckman i D. A. Quarles, Jr. Udowodnili oni w tej pracy właśnie twierdzenie o izometriach w przypadku $\mathbb{R}^n$. Nie byliśmy więc w Krakowie pierwsi...

Jak się potem okazało, rozmaite warianty tego problemu miały licznych zwolenników. Na ten i pokrewne tematy ukazało się wiele prac, badane były rozmaite przestrzenie. Mówimy, że funkcja f spełnia (DOPP) – jest to termin używany w literaturze, oznacza *Distance One Preserving Property* – jeśli dwa punkty odległe o 1 przekształcane są na punkty odległe o 1. Odległość wcale nie musi być euklidesowa, funkcja nie musi być określona na podzbiorze $\mathbb{R}^n$...

Dla innych klasycznych metryk w $\mathbb{R}^n$, a w szczególności w $\mathbb{R}^2$, zadanie okazuje się raczej elementarne. Problem badano w rozmaitych wersjach, sporo na ten temat napisano, ale najciekawszy jest w przypadku $n-$wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

W roku 1989 najprostszy znany mi dowód twierdzenia w przypadku $\mathbb{R}^n$ opublikował w kwartalniku *The Mathematical Intelligencer* Ulrich Everling.

Jak stwierdziliśmy, można rozważać przypadek, w którym przeciwdziedzina funkcji f jest inna niż dziedzina. Można zatem zastanowić się nad następującym problemem:

Czy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ spełniająca (DOPP) jest izometrią na swój obraz?

Gdyby odpowiedź była twierdząca, to oczywiście obrazem płaszczyzny byłaby płaszczyzna zawarta w przestrzeni trójwymiarowej. Jednak zarówno dowód Kołodzieja, jak i inne wymienione wyżej, istotnie wykorzystywały fakt, że wymiar przeciwdziedziny jest taki sam jak wymiar dziedziny. Mamy zatem kolejne ładne zadanie...

1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6

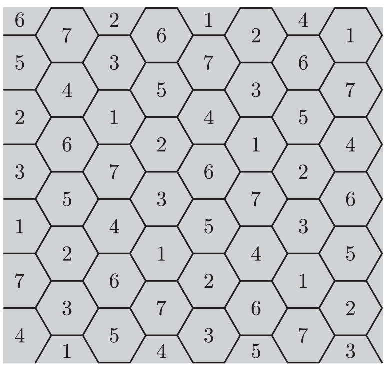
Rys. 4

Spróbujmy rozwiązać zadanie pozornie trudniejsze ale – jak się okaże – prostsze. Niech funkcja f prowadzi nie w $\mathbb{R}^3$, ale w... $\mathbb{R}^8$. Okazuje się, że z tym problemem można sobie poradzić.

Otóż $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^8$ może spełniać (DOPP) i nie być izometrią na swój obraz! By to wykazać, podzielmy płaszczyznę na kwadraty o przekątnej równej 1 i pokolorujmy je tak, jak na rysunku 4, używając dziewięciu kolorów.

Do każdego kwadratu zaliczamy jego dolny bok, lewy bok oraz lewy dolny róg. W żadnym kwadracie nie leżą dwa punkty odległe o 1 pokolorowane na ten sam kolor – mogłoby się to zdarzyć jedynie w przypadku końców przekątnej, ale dwa różne końce są pokolorowane inaczej. Z kolei, punkty z różnych kwadratów pokolorowane na ten sam kolor są odległe o liczbę większą niż 1.

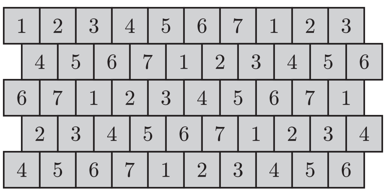
Stąd już krok do rozwiązania. Rozważmy sympleks jednostkowy $\mathbb{R}^8$. Sympleks – to uogólnienie trójkąta równobocznego na płaszczyźnie, czworościanu foremnego w przestrzeni trójwymiarowej... Wierzchołki takiego sympleksu są zawsze odległe o 1. Na płaszczyźnie są 3 takie wierzchołki, w przestrzeni trójwymiarowej – 4, w $\mathbb{R}^8$ – 9.



Rys. 5

Jeśli pokolorujemy wierzchołki sympleksu w $\mathbb{R}^8$ dziewięcioma kolorami i każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkujemy wierzchołek pomalowany tym samym kolorem co on, to taka funkcja spełnia (DOPP). Istotnie, obrazy dwóch punktów pomalowanych różnymi kolorami są odległe o 1, a jeśli punkty na płaszczyźnie są odległe o 1, to pomalowaliśmy je różnymi kolorami... Funkcja taka jest może mało ciekawa, nieciągła, zbiór wartości jest dziewięcioelementowy, ale spełnia wszystkie żądane własności.

Można obniżyć wymiar przeciwdziedziny. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ może spełniać (DOPP) i nie być izometrią na swój obraz. Wystarczy podzielić odpowiednio płaszczyznę na sześciokąty foremne o najdłuższej przekątnej równej 1 i pomalować płaszczyznę tym razem na 7 kolorów (rysunek 5). Do sześciokąta zaliczamy dwa jego boki i wierzchołek między nimi.



Rys. 6

Można też pomalować płaszczyznę inaczej, używając kwadratów (rysunek 6). Przekątna każdego kwadratu jest równa 1, z brzegami postępujemy podobnie, jak poprzednio. W każdym „pasku poziomym" pojawia się cyklicznie 7 kolorów, w tej samej kolejności, przy czym kwadraty są odpowiednio przesunięte – tak, by punkty o tym samym kolorze nigdy nie były odległe o 1.

No dobrze, a co z oryginalnym zadaniem? Okazuje się, że dla funkcji prowadzącej z $\mathbb{R}^2$ zarówno w $\mathbb{R}^3$, jak i w $\mathbb{R}^4$ oraz w $\mathbb{R}^5$... jest to do tej pory otwarty problem!

W tej chwili możemy postawić definicję.

Definicja. Liczba nieizometryczna płaszczyzny to taka najmniejsza liczba naturalna n, dla której istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ spełniająca (DOPP) i nie będąca izometrią.

Z powyższych uwag wynika, że spełniona jest nierówność

$$3 \leqslant N(\mathbb{R}^2) \leqslant 6$$

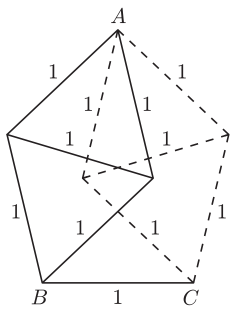
i tyle na razie na ten temat wiadomo...

Analogicznie można definiować liczbę nieizometryczną przestrzeni euklidesowej $k-$wymiarowej $N(\mathbb{R}^k)$. Podobnie, jak poprzednio, można stwierdzić, że taka definicja jest sensowna i znajdować odpowiednie oszacowania liczby $N(\mathbb{R}^k)$ od góry.

Zostawmy na chwilę izometrie na boku i przejdźmy do pozornie innych problemów. Zacznijmy od standardowego zadania:

Każdy z punktów płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub zielonym. Wykazać, że istnieją 2 punkty odległe o 1, pomalowane na ten sam kolor.

Zadanie nie jest trudne; wystarczy rozważyć wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1. No to wobec tego kolejne zadanie:



Rys. 7

Czy można pomalować wszystkie punkty płaszczyzny używając 9 kolorów tak, by dowolne 2 punkty pomalowane na ten sam kolor nie były odległe o 1? A używając 7 kolorów? A używając 3 kolorów?

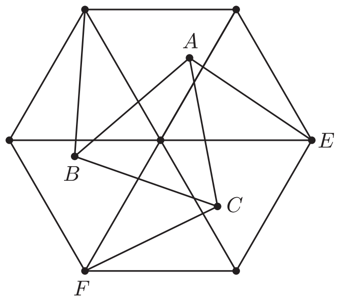
Wygląda znajomo... Tak jest, przecież takie zadanie już rozwiązaliśmy! Można to zrobić używając zarówno 9 kolorów jak i 7 kolorów. Odpowiednie konstrukcje przedstawione są na rysunkach powyżej. Natomiast jeśli chodzi o 3 kolory – nie można. Oto przykład (rys. 7), zwany w literaturze „wrzecionem Moserów". Przykład ten, jak sama nazwa wskazuje, jako pierwszy podał Edward Nelson.

Wszystkie odcinki na rysunku mają długość 1 – nie da się zatem w żądany sposób pomalować tych punktów używając jedynie trzech kolorów. Istotnie, gdyby można było to zrobić, to punkt B musiałby mieć ten sam kolor, co punkt A, podobnie punkt C. Jednakże punkty B i C są odległe o 1, powinny więc być pomalowane innymi kolorami.

To też wygląda znajomo... Istotnie, podobna (a praktycznie taka sama) konstrukcja została przeprowadzona w dowodzie twierdzenia o izometrii w przypadku płaszczyzny.

Jak się okazuje, zagadnienie związane jest z problemem niezwykle popularnym wśród sporej grupy matematyków. Chodzi o to, ile wynosi *najmniejsza liczba naturalna n o własności: wszystkie punkty* $\mathbb{R}^2$ *można pomalować używając n kolorów tak, by dowolne 2 punkty pomalowane na ten sam kolor nie były odległe o 1.*

Tę liczbę nazywa się w literaturze *liczbą chromatyczną płaszczyzny* i oznacza najczęściej przez $\chi(\mathbb{R}^2)$. Wielu znakomitych matematyków w różnych artykułach czy książkach pytało, ile ona wynosi. Były wśród nich takie sławy, jak Paul Erdös i Martin Gardner. Pierwszym, który to pytanie postawił (a przynajmniej nic nie wiadomo o tym, by ktoś to zrobił wcześniej) był Edward Nelson. Miało to miejsce w roku 1950, Nelson był wtedy studentem Uniwersytetu w Chicago; obecnie jest profesorem matematyki na uniwersytecie w Princeton. On też wykazał, w roku 1950, że $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$. Ograniczenie górne $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$ podał w roku 1950 John Isbell. Te wyniki jednak nie były wówczas opublikowane. W druku po raz pierwszy „wrzeciono" pojawiło się w pracy braci Leo i Williama Moserów, opublikowanej w roku 1961 w *Canadian Mathematical Bulletin.*



Rys. 8

Ciekawostka: każdy z możliwych wariantów: 4, 5, 6, 7 ma swoich zwolenników wśród osób zajmujących się tym zagadnieniem. Istnieje jednakże jeszcze inna możliwość. Może się okazać, i wcale nie jest to nierealne, że problem ten jest nierozstrzygalny.

Warto pokazać jeszcze inny dowód oszacowania $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$. Oszacowanie wynika z konstrukcji odpowiedniego układu punktów, przedstawionego na rysunku 8. Ten przykład został podany w latach sześćdziesiątych XX wieku przez Solomona Golomba.

I tu wszystkie odcinki między punktami zaznaczonymi kropkami mają długość 1. Gdyby wystarczały 3 kolory, punkty D, E i F musiałyby być pomalowane na ten sam kolor – jako, że są przeciwległymi wierzchołkami rombów zbudowanych z dwóch trójkątów równobocznych. Oznacza to, że kolor ten nie może być użyty do malowania żadnego z wierzchołków trójkąta ABC. Trzeba zatem użyć co najmniej czterech kolorów.

Widać wyraźny związek między liczbą nieizometryczną a liczbą chromatyczną. Z przedstawionej wyżej konstrukcji można wywnioskować, że zachodzi nierówność

$$N(\mathbb{R}^2) \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) - 1$$

bo jeśli możemy w odpowiedni sposób pokolorować punkty płaszczyzny, to takie pokolorowanie wyznacza funkcję spełniającą (DOPP) ale nie będącą izometrią. Jednak istnienie takiej funkcji wcale nie gwarantuje, że można dokonać odpowiedniego pokolorowania...

Oznacza to, że nic nie możemy powiedzieć o ewentualnej nierówności w drugą stronę. Przedstawiona konstrukcja, z której wynika dolne oszacowanie liczby chromatycznej płaszczyzny, daje od razu odpowiedź na pytanie o podobne oszacowanie dla izometrii. W „odwrotnym kierunku" takiego związku nie widać.

Oba problemy są ze sobą powiązane – oba też mają liczne rzesze entuzjastów. Co ciekawe, te grupy osób są niezależne – zdarzyło mi się spotkać wielbicieli problemu izometrii, którzy w ogóle nie słyszeli o liczbach chromatycznych i vice versa, niejedna osoba zajmująca się (nawet intensywnie) liczbami chromatycznymi nie wiedziała nic o (DOPP) i problemie izometrii.

Liczbę chromatyczną można rozważać w przestrzeni znacznie ogólniejszej, niż $\mathbb{R}^n$:

Liczba chromatyczna zbioru A to najmniejsza liczba naturalna n o własności: wszystkie punkty A można pomalować używając n kolorów tak, by dowolne 2 punkty pomalowane na ten sam kolor nie były odległe o 1,

a badana odległość wcale nie musi być euklidesowa.

Naturalne pytanie o liczby chromatyczne n-wymiarowych przestrzeni euklidesowych od lat pozostaje bez odpowiedzi – to i owo jednak wiadomo...

Na przykład, w przypadku trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej mamy oszacowanie

$$5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 18$$

przy czym ta ostatnia nierówność wykazana została niedawno, w 2002 roku; dokonał tego David Coulson z Australii. Poprzednio znane górne oszacowanie (też osiągnięte przez Coulsona) wynosiło 21. Oszacowanie dolne podał Dmitrij Rajski w 1970 roku.

Może wskazane będzie wymienienie tu jeszcze kilku własności. Dla $\mathbb{R}^4$ znane jest oszacowanie $\chi(\mathbb{R}^4) \geqslant 6$. Wiadomo też, że istnieją takie funkcje f i g, że $f(n) \to 0$ przy $n \to +\infty$ oraz $g(n) \to 0$ przy $n \to +\infty$ oraz

$$(1{,}2 + f(n))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + g(n))^n.$$

Liczby chromatyczne dla pewnych innych zbiorów są nie tylko zdefiniowane, ale i badane – w szczególności dla $\mathbb{Q}^n$. Wiadomo mianowicie, że $\chi(\mathbb{Q}^2) = 2$. Co może zaskakujące, $\chi(\mathbb{Q}^3)$ wynosi też 2, ale $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$. Natomiast dla $n \geqslant 5$ liczba $\chi(\mathbb{Q}^n)$ jeszcze niedawno nie była znana i nic mi nie wiadomo o tym, by cokolwiek w tej sprawie się ostatnio zmieniło.

Można rozważać zagadnienia związane z liczbami chromatycznymi przy dodatkowych restrykcjach. Dlaczego bowiem nie zażądać od zbiorów pomalowanych na ten sam kolor spełniania pewnych warunków? Na przykład, by rozważane zbiory były domknięte (dopuszczamy wtedy pomalowanie pewnych punktów więcej niż jednym kolorem). Przy tym założeniu, ową najmniejszą liczbę kolorów oznaczamy przez $\chi_D(\mathbb{R}^n)$. Możemy żądać, by jednokolorowe zbiory były mierzalne w sensie Lebesgue'a ($\chi_M(\mathbb{R}^n)$). Daje to cały skarbiec problemów, z których bardzo wiele czeka na rozstrzygnięcie. Wiadomo na przykład, że $\chi_D(\mathbb{R}^2) \geqslant 6$ oraz $\chi_M(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$. Można stąd wysnuć wniosek, że jeśli $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$, to przykład odpowiedniego kolorowania (o ile w ogóle uda się go podać) będzie nad wyraz osobliwy...

Na zakończenie, wróćmy jeszcze na chwilę do izometrii. Tym razem na troszkę bardziej zaawansowanym szczeblu.

Przestrzeni metrycznych (czyli takich „z wprowadzoną w nich odległością") jest wiele. Są wśród nich znacznie „większe" od $\mathbb{R}^n$. Zwróćmy uwagę na jedną spośród „nieskończenie wymiarowych", bardzo ważną w matematyce, i dobrze znaną „zawodowcom" – standardowo oznaczaną przez ℓ^2. Jest to zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych takich, że szereg kwadratów wyrazów takiego ciągu jest zbieżny. Formalnie:

$$\ell^2 = \left\{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\right\}$$

Dlaczego właśnie taka przestrzeń będzie dla nas interesująca? Otóż „odległość" w niej definiuje się następująco: jeśli $(x_n), (y_n)$ są ciągami z ℓ^2, to

$$d((x_n), (y_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

Można powiedzieć, że w pewnym sensie jest to uogólnienie „klasycznej" odległości euklidesowej na nieskończony wymiar. Bo przecież, badając w $\mathbb{R}^n$ odległość euklidesową, bierzemy po prostu ciągi skończone i tak samo podnosimy do kwadratu różnice między kolejnymi współrzędnymi, a potem dodajemy i wyciągamy pierwiastek... Tyle, że kończymy w odpowiednim miejscu (w przypadku prostej na miejscu pierwszym, w przypadku płaszczyzny – na drugim).

Jak wygląda sprawa problemu izometrii w przestrzeni ℓ^2? Otóż okazuje się, że tu sytuacja wygląda inaczej niż w przestrzeni o skończonym wymiarze. Spełnianie przez funkcję (DOPP) nie gwarantuje, że będzie ona izometrią!

Co ciekawe, konstrukcja odpowiedniego przykładu jest podobna do tej, która została przeprowadzona w przypadku przekształceń z $\mathbb{R}^2$ w wyższy wymiar. Należy po prostu znaleźć wystarczająco duży zbiór punktów takich, że dla każdej pary w tym zbiorze odległość między dwoma elementami wynosi 1 i do tego zbioru „wysłać" w odpowiedni sposób cała dziedzinę. Przestrzeń nieskończenie wymiarowa okazuje się być wystarczająco duża, by zrobić to w niej samej – „większa" przestrzeń nie jest potrzebna...

Najpierw zbiór. Rozważmy ciągi takie, że na $n-$tym miejscu stoi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a na pozostałych zera:

$$\left(0, 0, \ldots, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \ldots\right).$$

Są to elementy ℓ^2. Co więcej, dwa różne tak określone ciągi są odległe o $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$. Ciągów tych jest tyle, ile liczb naturalnych, czyli przeliczalnie wiele.

Teraz wykorzystamy pewną podstawową własność przestrzeni ℓ^2: jest to przestrzeń ośrodkowa, istnieje w niej przeliczalny podzbiór gęsty. Nie wchodząc w szczegóły, wynika stąd w szczególności, że istnieje przeliczalny zbiór $A \subset \ell^2$ taki, że jeśli w punktach zbioru A „zaczepimy" kule o środkach w tych punktach i promieniach $\frac{1}{2}$, to w sumie kule te pokryją całą przestrzeń ℓ^2. Jeśli Czytelnik nie zetknął się z tą własnością, powinien po prostu w tym momencie w nią uwierzyć – jest to jednak fakt klasyczny, stosunkowo prosty.

Teraz możemy zakończyć konstrukcję. Każdemu punktowi z ℓ^2 przyporządkowujemy środek kuli do której należy (jeśli należy do wielu, to jeden z nich), a potem ustalamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między tymi środkami (czyli zbiorem A) a rozważanymi przed chwilą ciągami $(0, 0, \ldots, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \ldots)$. Jeśli dwa punkty były odległe o 1, to ciągi im przyporządkowane są różne, a więc odległe o 1. Skonstruowana funkcja nie jest izometrią. Poglądowo, przedstawioną operację można utożsamić z kolorowaniem punktów przestrzeni ℓ^2 w odpowiedni sposób za pomocą nieskończenie wielu kolorów...

I tak, startując od zadania sformułowanego niezwykle elementarnie, językiem zrozumiałym dla uczniów, doszliśmy – może nawet trochę niepostrzeżenie – do serii otwartych problemów i do pojęć zaawansowanej matematyki wyższej. Niejeden uzna, że fakt, że takie rzeczy są możliwe, ma sporo wspólnego z pięknem matematyki...