Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Wbrew intuicji*, Grzegorzewice, sierpień 2009.

Precz z wyznacznikiem?

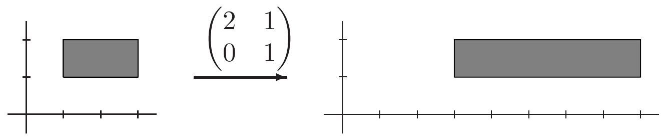
Arkadiusz MĘCEL, Warszawa

Postawmy sprawę jasno – na tyle jasno przynajmniej, by Czytelnika, zaniepokojonego być może pytaniem sformułowanym w tytule tego artykułu, od samego początku uczciwie zapewnić – nie będziemy walczyć z wyznacznikiem. Tytułowe „precz” jest tylko dla reklamy. Co jest jej celem? Przekonać o przydatności wyznacznika? Pokazać garść efektownych twierdzeń? Nic podobnego. Będziemy sprzedawać intuicję wyznaczników. Wydaje się, że jest na nią niemały popyt. Oczywiście, reklama jednych reklama zachęci – innych nie. Ważne jest to, by zwróciła sobą naszą uwagę.

Posłużymy się przekazem wizualnym. Nie będzie to zupełna rewolucja. Geometryczne spojrzenie na wyznacznik jest szeroko popularyzowane. Wiadomo, że jeśli $M \in M_n(\mathbb{K})$ jest macierzą wymiaru $n \times n$ nad ciałem $\mathbb{K}$, wówczas jej wyznacznik $\det(M)$ interpretować możemy jako (zorientowaną) objętość równoległościanu w $\mathbb{K}^n$, którego krawędziami są wektory kolumnowe macierzy M. Podejście to ma potężne głosy poparcia. Wystarczy przytoczyć opinię V. Arnolda, według której każde inne spojrzenie sprawić może tylko tyle, że *każdy rozsądny człowiek znienawidzi po wsze czasy wszystkie wyznaczniki, jakobiany i twierdzenie o funkcjach uwikłanych*. Mocne słowa.

Istnieje też bardziej dynamiczne spojrzenie. Łatwo zauważyć, że wyznacznik macierzy przekształcenia liniowego $T : V \to V$ (przestrzeni skończenie wymiarowej V nad ciałem $\mathbb{K}$) można co do modułu interpretować jako odwrotność stosunku objętości równoległościanu P rozpiętego przez wektory bazowe V do objętości równoległościanu $T(P)$ rozpiętego przez obrazy tych wektorów przy przekształceniu T. Nic prostszego. Dobra reklama? Problem w tym, że potencjalny odbiorca widzi efekt, a nie widzi działania. Objętość się zmienia, wyznacznik to opisuje, ale jaki jest mechanizm? Tego nie wie. Jak się o tym przekonać? Czytelnik zechce spojrzeć na następujące pytanie.

Przykład 1. *Dlaczego treść poniższego rysunku nie przeczy twierdzeniu o zmianie objętości?*



Rozwiązanie widoczne jest natychmiast. Identyfikacja problemu polega na zaobserwowaniu, że stosunek pól figur przedstawionych na rysunku nie jest równy wyznacznikowi macierzy będącej (to silna sugestia) przyczyną liniowego ich pokrewieństwa. Jest to oczywiście jawny blef! Twierdzenie o zmianie objętości nie dotyczy przecież obiektów przedstawionych na rysunku. Nie tak przynajmniej, jak intuicja mogłaby podpowiadać. Nic szczególnego? Niekoniecznie! Zauważmy, że gdybyśmy chcieli wykonać rysunek ilustrujący jakoś twierdzenie o zmianie objętości, nie różniłby się on znacznie od przedstawionego wyżej. To niewątpliwa słabość. Nie jest korzystnie, jeśli dobrą reklamę łatwo zamienić na złą…

Spróbujmy zmienić strategię. W nowym spojrzeniu kluczowe będzie wyeksponowanie przekształcenia liniowego, które dany wyznacznik opisuje. Odwołamy się do dobrze znanych i łatwiejszych, z punktu widzenia potencjalnego odbiorcy, struktur. Powszechnie wiadomo, że terminy takie, jak „analogia”, „uogólnienie” czy „podobieństwo”, budzą wśród matematyków bardzo pozytywne emocje. Wykorzystamy to do naszych celów.

Kluczowym hasłem będzie dla nas pojęcie wartości własnej. Przypomnijmy – jeśli przy endomorfizmie T przestrzeni liniowej V można znaleźć niezerowy wektor $v \in V$ przechodzący przy T w av, wówczas liczbę $a \in \mathbb{K}$ nazywamy wartością własną T. Pojęcie to ma wiele wspólnego z wyznacznikiem. Ma też niezwykle prostą i sugestywną interpretację geometryczną. Gdybyśmy tylko umieli dostosować go do naszych (wyznacznikowych) potrzeb, moglibyśmy uzyskać zupełnie przekonujący przekaz wizualny.

Od samego początku pojawiają się jednak trudności. Naszym celem jest wizualna prezentacja wyznacznika. Naturalnym żądaniem jest więc rozważanie endomorfizmów liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Te jednak wcale nie muszą mieć wartości własnych. A przecież do zdefiniowania wyznacznika potrzebujemy (zwykle) nie tylko jednej, ale całego ich zestawu. Zanim więc przejdziemy do przestrzeni rzeczywistych, część problemów rozwiązać nam przyjdzie w bardziej egzotycznym – zespolonym środowisku.

Istnienie wartości własnej dowolnego endomorfizmu liniowego $T : V \to V$ zespolonej przestrzeni skończenie wymiarowej V dowodzi się zwykle za pomocą Zasadniczego Twierdzenia Algebry stosowanego do wielomianu charakterystycznego macierzy T. Jest to pewien problem. Wolelibyśmy mówić o wartościach własnych niezależnie od wyznaczników. Okazuje się, że jest to bardzo łatwe.

Twierdzenie 1. *Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{C}$. Wówczas dla każdego endomorfizmu liniowego $T : V \to V$ istnieją: $a \in \mathbb{C}$ oraz $0 \neq v \in V$, takie że $\phi(v) = av$.*

Dowód. Weźmy $v \neq 0$ należący do V. Wektory $v, T(v), T^2(v), \dots, T^n(v)$ są liniowo zależne. Istnieją zatem takie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, że:

$$a_0 v + a_1 T(v) + a_2 T^2(v) + \dots a_n T^n(v) = 0.$$

Wielomian $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ rozkłada się na mocy Zasadniczego Twierdzenia Algebry na iloczyn:

$$a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n), \text{ gdzie } r_i \in \mathbb{C}.$$

Po drodze korzystamy oczywiście z liniowości T.

Stosując ten rozkład do naszej sytuacji uzyskujemy:

$$(a_n(T - r_1 I) \cdot (T - r_2 I) \cdot \ldots \cdot (T - r_n I))(v) = 0.$$

Istnieje zatem takie $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, dla którego przekształcenie $T - r_j I$ nie jest injekcją. Liczba r_j jest zatem wartością własną T. □

Jak widać, dowód jest niezwykle prosty. Wolno nam dzięki niemu myśleć o wartościach własnych niezależnie od wyznaczników. Możemy więc kierować się w wytyczonym przez nas celu. Jest nim praca w przestrzeni rzeczywistej. Aby upewnić się, że nasze środowisko jest maksymalnie przyjazne dla intuicji, strukturę liniową $\mathbb{R}^n$ wyposażymy dodatkowo w standardowy iloczyn skalarny. Tak przygotowani możemy rozpocząć reklamę. W pierwszej jej fazie nie odkryjemy oczywiście wszystkich kart. Promocję wyznacznika w euklidesowym świecie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpoczniemy od pewnej bardzo regularnej rodziny przekształceń.

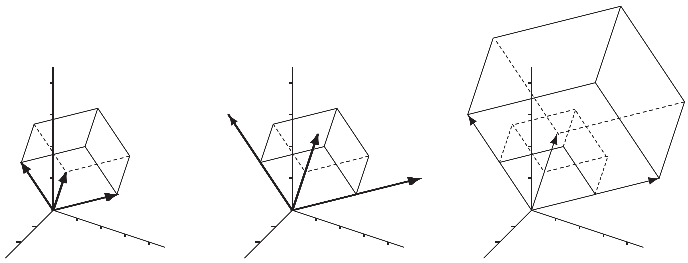
Definicja 1. *Niech V będzie przestrzenią euklidesową wymiaru n nad $\mathbb{R}$. Endomorfizm $\phi : V \to V$ nazywamy samosprzężonym, jeśli macierz tego przekształcenia jest symetryczna.*

Jest powód, dla którego zamiast mówić po prostu o macierzach symetrycznych, upieramy się przy pojęciu „samosprzężoności”. Powiemy o nim dalej, w tym miejscu wybierzemy jedynie odpowiednie narzędzia. Potrzebujemy dwóch klasycznych twierdzeń. Pierwsze pochodzi od Cauchy'ego i orzeka, że endomorfizmy samosprzężone przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ posiadają rzeczywiste (nieujemne) wartości własne. Jest ich akurat tyle, aby spośród wektorów własnych dowolnego ustalonego przekształcenia samosprzężonego można było wybrać bazę ortonormalną $\mathbb{R}^n$. Ostatnia cecha charakteryzuje przekształcenia samosprzężone. Fakt ten pojawia się w pewnym punkcie każdego standardowego kursu algebry liniowej. Pierwszym składnikiem sukcesu będzie więc wzbudzenie u odbiorcy poczucia, że widzi coś dobrze znanego. Dopiero drugi składnik będzie niejako niespodzianką.

Nie zostało ono wówczas sformułowane w języku przekształceń liniowych.

Skorzystamy z twierdzenia o rozkładzie biegunowym macierzy rzeczywistej. Mianowicie, każdy endomorfizm liniowy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ przedstawić można w sposób jednoznaczny jako złożenie przekształcenia samosprzężonego z liniową izometrią na V. Fakt ten pochodzi z początków XX. wieku od francuskiego matematyka Autonne'a. Wprowadzamy go, wyraźnie to widać, po to, aby zdefiniowanie wyznacznika dowolnego endomorfizmu liniowego sprowadzić (z dokładnością do stałej) do określenia go w przypadku samosprzężonym. Przemilczymy w ten sposób bardzo niewygodny stan rzeczy, jaki napotkalibyśmy przy okazji poszukiwania wartości własnych dowolnych endomorfizmów liniowych przestrzeni rzeczywistej.

Jak wygląda geometryczna interpretacja? Załóżmy, że mamy przekształcenie liniowe T, które zgodnie z twierdzeniem Autonne'a rozłożyć można na AS, gdzie A – izometria, S – przekształcenie samosprzężone. Bez trudu zobaczymy teraz jak wygląda zmiana objętości przy przekształceniu T. Spójrzmy na rysunek.



Przekształcenie samosprzężone S wyznaczone jest jednoznacznie. Możemy więc wskazać bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów własnych S. Dla lepszej ilustracji sytuacji rozpinamy na wektorach tych n-wymiarową kostkę I. Działamy przekształceniem S. Wybrane wektory nie zmienią kierunków, a jedynie długość. Ostatecznie zatem $S(I)$ to również równoległościan. Jego objętość równa jest iloczynowi wartości własnych S. Do wykonania całego przekształcenia T pozostało jeszcze przyłożyć izometrię A. Zatem objętość $T(I)$ równa jest co do modułu iloczynowi wartości własnych przekształcenia S.

Wartości własne przekształcenia samosprzężonego są nieujemne.

Oto jak wygląda proponowany przez nas przekaz wizualny. Jak widać, jest to obraz, który wiele tłumaczy. Przede wszystkim pokazuje w jaki sposób wyznacznik zmienia objętość. Uważny Czytelnik dostrzeże jednak znacznie więcej. Sytuacja, w której obiekt rozbijamy na część odpowiadającą za wielkość oraz część odpowiadającą za położenie, to wyraźny analog postaci trygonometrycznej liczby zespolonej. Proces zmiany objętości przy przekształceniu liniowym jest dokładnym analogiem mnożenia zespolonego. Możemy je rozbić na dwie fazy: jednokładność i obrót. Podobnie przy przekształceniu liniowym. Część samosprzężona to w istocie wielowymiarowa jednokładność. Na izometrię $\mathbb{R}^n$ patrzymy oczywiście jak na uogólnienie obrotu. Czym jest w tym kontekście wyznacznik? Odpowiednikiem modułu zespolonego. Ciekawe – a najważniejsze – widoczne na obrazku!

Gdy przyjrzymy się rozkładowi biegunowemu nieco dokładniej, pokrewieństwo z przypadkiem zespolonym staje się jeszcze bardziej wyraźne. Rozkład ten określać można także nieco ogólniej. Dla przykładu, rozkład macierzy zespolonych ma następującą postać:

$$T = A \cdot \sqrt{T^*T}.$$

Gwiazdka oznacza w tym miejscu sprzężenie hermitowskie. Jest to uogólnienie rzeczywistej operacji transponowania. Dla przypomnienia, $\sqrt{X}$ to taka macierz Y, że $Y^*Y = X$. Wzór ten działa także dla macierzy osobliwych. Podobieństwo z rozkładem liczby zespolonej jest już teraz uderzające. Taka reklama wydaje się być całkiem atrakcyjna.

Odbiorca naszego przekazu ma jednak prawo zgłaszać pewne wątpliwości. Reklama to jedno, a użytkowanie – coś zupełnie innego. Chcemy mieć algorytm do wyliczania wyznacznika (przynajmniej co do modułu). Szukamy zatem iloczynu wartości własnych $\sqrt{T^*T}$. Łatwo zauważyć, że samo T^*T jest samosprzężone, a więc ma wyznacznik. Krótki rachunek pokazuje, że jest to dokładnie kwadrat szukanej wartości. Istotnie, gdy T^*T jest diagonalna, wówczas

$\sqrt{T^*T}$ też i nie ma czego dowodzić. Ogólny przypadek łatwo zaś zredukować do diagonalnego: wiadomo, że macierz T^*T można zdiagonalizować. Wystarczy sprząc ją przy pomocy X, w kolumnach której stoją wektory własne T^*T. W ten sposób mamy $\sqrt{T^*T} = X\sqrt{D}X^{-1}$. Gdzieś na boku potrzebny jest oczywiście dowód tego, że wyznacznik z X to ± 1. Od pewnego wysiłku nie da się więc uciec. Zysk jest jednak wymierny.

Zaprezentowany wyżej pomysł to część większej myśli, której celem jest nauczanie algebry liniowej bez wyznaczników. Bez wyznaczników wprowadzamy więc wartości własne, bez wyznaczników radzimy sobie w sytuacji, gdy podprzestrzenie niezmiennicze nie dają w sumie całej przestrzeni (wprowadza się tzw. uogólnione wartości własne), bez wyznaczników dowodzimy twierdzenie Jordana, twierdzenie spektralne i każde inne standardowe twierdzenie z tego kawałka matematyki. Czytelnika zainteresowanego rozwinięciem powyższych idei odsyłamy do artykułu Sheldona Axlera, *Down with determinants!* (Amer. Math. Monthly 102 (1995), str. 139–154).

Pozostawmy geometryczne intuicje. Bywa tak, że materiał reklamowy kończy się ostrzeżeniem o możliwej szkodliwości zachwalanego produktu. Nie inaczej powinno być w przypadku wyznacznika. Zanim skorzystamy z tego narzędzia dobrze jest zapoznać się dokładnie z treścią dołączonych przy definicji założeń... Inaczej będą problemy. Przykładem niewłaściwego użycia jest „dowód” następującego twierdzenia.

A tak naprawdę Frobenius...

Twierdzenie 2 (Cayley-Hamilton). *Każda macierz zespolona $A \in M_n(\mathbb{C})$ spełnia swój wielomian charakterystyczny.*

„Dowód.” Niech w będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A. Z definicji $w(x) = \det(A - xI)$. Wstawiamy zatem $x = A$ i otrzymujemy $w(A) = \det(A - AI) = 0$. Koniec?

Rozumowanie to ma oczywistą słabość. Wyrażenie $w(A)$ jest macierzą, natomiast wyznacznik jest funkcją o wartościach w ciele $\mathbb{C}$. Nic nadzwyczajnego. Chwila refleksji może nasunąć jednak pytanie: co tak naprawdę psuje ten dowód, skoro samo twierdzenie jest prawdziwe? Może pozorną niezgodność można jakoś usunąć? Wynik ma być macierzą, przyjmijmy więc formułę $w(A) = \det(A - AI)I = 0$. Czy teraz dowód będzie poprawny? Będzie, o ile formuła $w(B) = \det(A - BI)I$ jest prawdziwa dla dowolnych macierzy $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Niestety, łatwo znaleźć kontrprzykład:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz $\det(A - BI)I$, a wiec domniemana „wartość w_A w B” jest oczywiście zerowa. Tymczasem, wielomian charakterystyczny macierzy A jest postaci $w_A(x) = x^2 - x$. Jeśli zamiast zmiennej podstawimy macierz B dostaniemy w rezultacie $w_A(B) = -B \neq 0$. Wzór nie jest prawdziwy.

Podstawianie macierzy do wielomianów wydaje się mieć jakieś wady. Może jednak wciąż nie działamy właściwie? Może nie należy $\det(A - BI)$ przemnażać przez I, ale patrzeć na to wyrażenie w sposób formalny? Co przez to rozumiemy? Obliczanie wielomianu charakterystycznego macierzy A polega w pierwszym kroku na odjęciu od niej macierzy xI. W ten sposób każdy element diagonalny macierzy A pomniejszony zostaje o x. Co to tymczasem znaczy, gdy każdy element diagonalny w A pomniejszony zostaje o zmienną przebiegającą zbiór macierzy? Istnieje na to prosta recepta formalna. Każdy wyraz a_{ij} macierzy A potraktować można jako macierz postaci $a_{ij}I$. Wówczas $\det(A - BI)$ byłby formalnie rzecz biorąc wyznacznikiem macierzy $\overline{A} \in M_n(\mathbb{C})[X]$, o następujących wyrazach:

$$\overline{a_{ij}} = \begin{cases} a_{ij}I, & i \neq j, \\ a_{ij}I - X, & i = j. \end{cases}$$

Problem w tym, że wyznacznik takiej „macierzy o wyrazach macierzowych” bardzo rzadko jest postaci:

$$A_0 + A_1X + A_2X^2 + \ldots + A_nX^n, \quad A_i \in M_n(\mathbb{C}).$$

Szkoda pojawia się w momencie, gdy przy porządkowaniu wielomianu określającego $\det(\overline{A})$ pojawia się nam wyraz XR, przy czym X to zmienna, a R – pewna macierz. Wielomiany XR oraz RX nie są na ogół równe. Aby się o tym przekonać wystarczy podstawić macierz nieprzemienną z R. Głównym winowajcą okazuje się ostatecznie nieprzemienność mnożenia macierzowego.

Gdy chcemy obliczyć wyznacznik macierzy o wyrazach pochodzących z pierścieni nieprzemiennych – naturalne kłopoty wynikają z konieczności dbania o kolejność mnożenia wyrazów go określających. Dla przykładu, rozważając dwie proste macierze kwaternionowe:

$$\begin{pmatrix} i & i \\ j & j \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$$

widzimy, że wyznacznik jest, w zależności od kolejności wykonywania mnożenia, zerowy lub nie. Co więcej, niezależnie od przyjętej definicji jedna z tych macierzy zawsze będzie miała niezerowy wyznacznik. Z naszego punktu widzenia jest to niedopuszczalne. Dlaczego? Nietrudno bowiem sprawdzić, że żadna z tych macierzy nie ma odwrotnej. Podstawowe kryterium badania nieosobliwości macierzy staje się bezużyteczne. Czy przypadek nieprzemienny jest więc zupełnie zamknięty dla celów reklamowych? Niekoniecznie, choć w chwili obecnej reklama wizualna ustąpić musi miejsca tej tradycyjnej. Powiemy więc tylko o tym co zostało na polu nieprzemiennym zrobione. Nie pytając jak...

Nieprzemienne wyznaczniki są produktem od bardzo dawna, bardzo intensywnie na rynku matematycznym poszukiwanym... Nie znaleziono dotychczas idealnego kandydata. Częściowe sukcesy związane są z pojęciami wyznaczników Dieudonne, wyznaczników kwantowych, wyznaczników wierszowych i kolumnowych, czy wreszcie quaziwyznaczników. Co osiągnięto? W najbardziej obiecującej grupie (quaziwyznaczników) udało się wypracować analogi kilku ważnych klasycznych faktów. Są to przede wszystkim: nieprzemienna reguła Cramera, dobre zachowanie przy operacjach na wierszach i kolumnach, konstrukcja macierzy odwrotnej (podobna do przypadku przemiennego), czy (quazi)wyznaczniki macierzy blokowych. Badania trwają.

Mamy też współczesne wyniki podparte nieprzemiennymi wyznacznikami. Nie tylko w obrębie algebry, także w teorii reprezentacji, teorii algebr Liego, teorii operatorów różniczkowych... Wypada powiedzieć więcej – nieprzemienne wyznaczniki okazały się być czymś więcej, niźli tylko wyrafinowanym przejawem matematycznej egzotyki. Wyniki dotyczące macierzy kwaternionowych mają ważne zastosowania w trójwymiarowej grafice komputerowej. W innym wydaniu są podstawą jednej z nowoczesnych technik wykrywania konturów w kolorowych obrazach. W zastosowaniach fizycznych odnajdujemy je np. w teorii interpolacji wielowymiarowych sygnałów (takich, na przykład, jak pomiary aktywności sejsmicznej). Tak szerokie spektrum możliwości to niewątpliwa motywacja do rozwijania teorii wyznaczników dla takich macierzy. Pierwszy szlak został już przetarty. Nieprzemienne wyznaczniki reklamować można, choć wciąż chyba wypada to robić dość nieśmiało.

Będąc u samego końca wszystkich tych rozważań ulec można poczuciu, że poddani zostaliśmy nie tyle reklamie, co propagandzie. Staromodne „precz", ulepszanie „dobrego", reklamowa „nowomowa". Może to mimo wszystko tylko egzotyka? Wyznacznik nie ma przecież wyraźnej konkurencji. Czy potrzebuje reklamy? Czy grozi mu usunięcie z rynku? Dziś wydaje się to niemożliwe, w przeszłości natomiast wydawało się to zupełnie prawdopodobne. „Precz!" – wołali choćby Bourbakiści – Artin, Chevalley, czy też Weil. Jak pisał w swoich wspomnieniach pracujący w powojennym Princeton Gian-Carlo Rota, wielcy algebraicy ówczesnej epoki za cel stawiali sobie całkowite wyeliminowanie wyznaczników. Nie ma potrzeby dodawać, że politykę tę realizowano wówczas przede wszystkim na salach wykładowych. Dziś wydaje się to niemal groteskowe, ale wyznacznik bliski był wyginięcia! Stary dyskurs zaginął jednak w zawierusze dziejów, przyszła doba zastosowań. W tej zaś prawdziwych wrogów wyznacznika znajdziemy niewielu.