Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XLIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Wbrew intuicji*, Grzegorzewice, sierpień 2009.

Polowanie na Snarka – Męczarnia w trzech konwulsjach

Zofia MIECHOWICZ, Zielona Góra

Konwulsja pierwsza. Identyfikacja

„Wytropimy tu Snarka!”, Bosman ozwał się żwawo,
Wysadzając na brzeg swą załogę.
Aby stóp nie zmoczyli, niósł ich sam, z wielką wprawą
Łapiąc w garść włosy, kark, albo nogę.

Lewis Caroll, *Łowy na Snarka. Męczarnia w ośmiu Konwulsjach*,
w tłumaczeniu Stanisława Barańczaka.

Postać Lewisa Carrolla chyba każdy kojarzy z *Alicją w Krainie Czarów*. Część czytelników zapewne wie, że naprawdę nazywał się on Charles Lutwidge Dodgson i był z wykształcenia matematykiem. Niewielu jednak potrafi wymienić tytuł choćby jednego utworu Carrolla, który nie traktuje o Alicji. Tymczasem to właśnie jemu zawdzięczamy powstanie, chyba najbardziej niezwykłego, „stwora literackiego” – tytułowego bohatera poematu *The Hunting of the Snark* (w języku polskim ukazał się on pod dwoma tytułami: *Łowy na Snarka* w tłumaczeniu Stanisława Barańczaka, *Wyprawa na Żmirłacza* w tłumaczeniu Roberta Stillera).

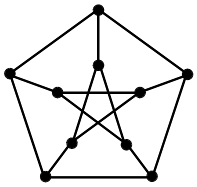
Snark jest to bestia, która charakteryzuje się przede wszystkim tym, że jest nieuchwytna i niewyobrażalna. Być może właśnie te cechy sprawiły, że w 1976 roku Martin Gardner zdecydował się nadać tę nazwę jednemu z matematycznych obiektów. Snark, którym będziemy się tutaj zajmować, jest to pewien szczególny rodzaj grafu. Żeby graf móc nazwać snarkiem musi on:

i) być *spójny*, czyli, potocznie mówiąc, w jednym kawałku,
ii) nie zawierać *mostu*, czyli takiej krawędzi, której usunięcie spowoduje, że przestanie on być spójny (rozpadnie się na dwie części),
iii) być *sześcienny* (lub *kubiczny*), czyli każdy jego wierzchołek musi mieć dokładnie trzech sąsiadów,
iv) być grafem, którego krawędzie uda się *pokolorować poprawnie* (w taki sposób, żeby żadne dwie spotykające się w jednym wierzchołku nie otrzymały tego samego koloru) przy użyciu czterech barw, natomiast nie uda się tego zrobić mając do dyspozycji trzy kolory.

Pierwsze trzy własności są algorytmicznie łatwe do sprawdzenia. Problem zaczyna się dopiero przy czwartej. Kiedy chcemy „łowić” matematyczne snarki musimy zdawać sobie sprawę z wagi i złożoności tego problemu. Łatwo jest zauważyć, że jeżeli w grafie istnieje wierzchołek o stopniu k (taki, w którym spotyka się k krawędzi), to do poprawnego pokolorowania jego krawędzi potrzebujemy co najmniej k kolorów. Istnieją grafy, dla których k kolorów wystarczy, natomiast dla całej reszty potrzeba (i wystarczy) dokładnie o jeden kolor więcej. Fakt ten znany jest jako twierdzenie Vizinga i jest zaliczany do klasyki teorii grafów. Stwierdzenie, do której grupy należy dany graf jest problemem algorytmicznie trudnym. Sprawy nie ułatwia fakt, że badamy grafy regularne. Potrzeba dużo czasu (bądź sprytu), żeby sprawdzić, że trzy kolory to za mało do poprawnego pokolorowania krawędzi ustalonego grafu kubicznego. Jeżeli graf taki ma n wierzchołków, to liczba jego krawędzi wynosi $\frac{3n}{2}$, więc wszystkich trzykolorowań krawędzi jest $3^{\frac{3n}{2}}$. Żeby stwierdzić, że trzy kolory nie wystarczą, musielibyśmy sprawdzić je wszystkie! Widzimy więc, że snarka upolować nie jest łatwo. Bardzo długo nie wiadomo było nawet, czy jakikolwiek snark istnieje.

Konwulsja druga. Łowy

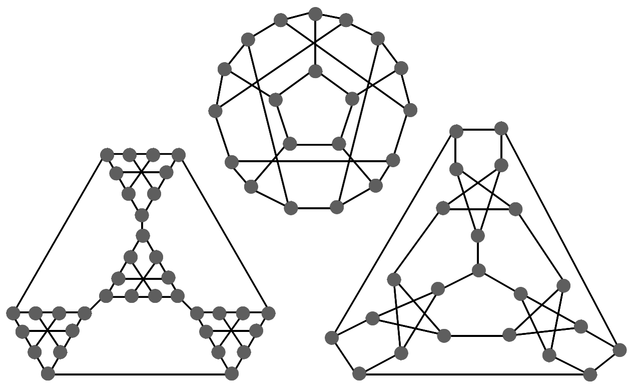
Wiele trwała tygodni, wiele dni trwała droga
(Tydzień liczy dni siedem dokładnie),
Lecz ryj Snarka, ta wizja upragniona i błoga,
w dalszym ciągu tkwi w mule gdzieś na dnie!



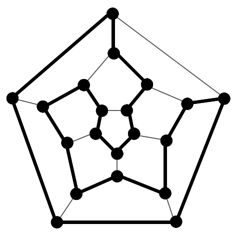
Rys. 1. Graf Petersena

Pierwszy grafowy snark (rysunek 1) upolowany został przez Juliusa Petersena (1839–1910). Obecnie graf ten nosi jego imię.

Aż do 1945 roku był to jedyny znany przedstawiciel swojego gatunku. Wtedy to Blanus odkrył całą rodzinę snarków, które nazwane zostały na cześć swojego odkrywcy (rysunek 4). Dopiero w 1975 roku udało się wykazać (Isaacs), że snarków jest nieskończenie wiele. Niektóre z nich zostały zidentyfikowane i nazwane (rysunek 2). Szeroko posunęły się również badania nad ich własnościami.

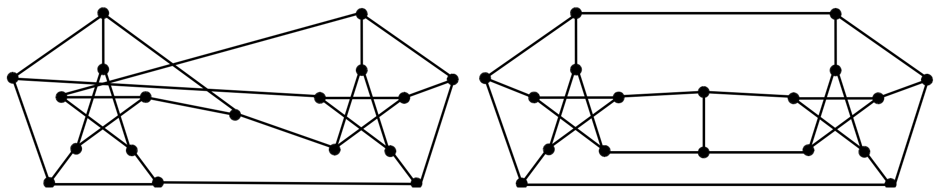


Rys. 2. Przykładowe snarki.



Rys. 3. Cykl Hamiltona w grafie

Wiadomo, między innymi, że snark nie może być grafem hamiltonowskim, czyli nie znajdziemy w nim cyklu, który będzie zawierał wszystkie wierzchołki (cyklu Hamiltona, rysunek 3). Własność tę bardzo łatwo wykazać.

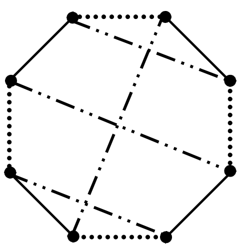


Snark Blanusa $(1,1)$ Snark Blanusa $(1,2)$

Rys. 4. Snarki Blanusa

Twierdzenie 1. *Żaden snark nie posiada cyklu Hamiltona.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje snark, który posiada cykl Hamiltona. Możemy więc narysować go w taki sposób, żeby cykl ten był cyklem zewnętrznym. Wiadomo, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta. Snark jest więc grafem o parzystej liczbie wierzchołków, a co za tym idzie, krawędzie cyklu Hamiltona możemy pokolorować poprawnie przy użyciu dwóch kolorów. Zauważmy teraz, że wszystkie pozostałe krawędzie w grafie łączą wierzchołki leżące na pokolorowanym już cyklu, czyli każdy z wierzchołków jest incydentny z dokładnie jedną, niepokolorowaną krawędzią, co powoduje, że używając tylko jednego dodatkowego koloru, możemy graf pokolorować poprawnie (rysunek 5). Stąd sprzeczność – otrzymany graf nie jest snarkiem, ponieważ udało się poprawnie pokolorować jego krawędzie przy użyciu trzech kolorów. □



Rys. 5. Kolorowanie krawędzi grafu sześciennego posiadającego cykl Hamiltona.

Konwulsja trzecia. Twierdzenie o czterech barwach

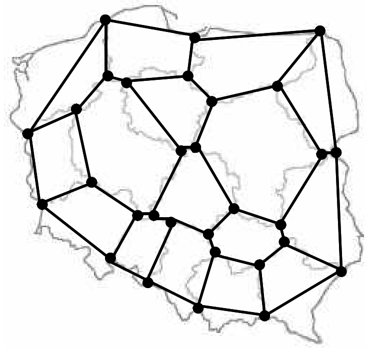
Polowanie na matematycznego snarka jest ekscytujące nie tylko ze względu na jego nieuchwytność i szereg ciekawych własności. Po stokroć ciekawszą rzeczą jest związek, jaki zachodzi między snarkami a jednym ze sztandarowych twierdzeń teorii grafów – twierdzeniem o czterech barwach.

W 1852 roku, Francis Guthrie postawił bardzo brzemienne w skutki pytanie – Czy dowolną mapę polityczną na płaszczyźnie da się pokolorować czterema barwami w taki sposób, żeby każde dwa sąsiadujące regiony otrzymały różne kolory? To z pozoru proste pytanie pozostawało bez odpowiedzi przez ponad 100 lat. Doczekało się szeregu przeformułowań, fałszywych dowodów i znacząco przyczyniło się do rozwoju teorii grafów. Pozytywnej odpowiedzi udzielili w roku 1976 Kenneth Appel i Wolfgan Haken, analizując komputerowo 1936 konfiguracji.

Odkrycie związku między twierdzeniem o czterech barwach a snarkami zawdzięczamy Peterowi Guthrie (pamiętajmy jednak, że samo pojęcie *snark* zostało wprowadzone wiele lat później). W 1880 roku udowodnił on następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Dowolną mapę na płaszczyźnie da się pokolorować poprawnie przy użyciu czterech barw wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje planarny snark.*

Na pierwszy rzut oka twierdzenie to może wydać się zaskakujące, jeżeli jednak przedstawimy problem kolorowania map w języku grafów i zastanowimy się chwilę, jak faktyczna mapa na płaszczyźnie wygląda, to zobaczymy, że możemy w naszych rozważaniach ograniczyć się tylko do snarków. Odpowiednie dla tego celu przedstawienie płaskiej mapy polega na umieszczeniu wierzchołków we wszystkich punktach, w których spotykają się granice co najmniej trzech państw (rysunek 6) oraz potraktowaniu granic jako krawędzi grafu (graf taki będzie grafem planarnym). Po przyjrzeniu się dokładniej strukturze map, z jakimi mamy zazwyczaj do czynienia, zobaczymy, że postulat nie posiadania mostu przez graf odpowiadający mapie jest zupełnie naturalny. Istnienie mostu w takim grafie oznaczałoby dokładnie tyle, że jakieś państwo graniczy samo ze sobą. Żądanie spójności ma również zupełnie intuicyjne wyjaśnienie. Jeżeli będziemy potrafili pokolorować graf lub mapę, które są spójne, to w przypadku obiektu niespójnego możemy każdy jego kawałek kolorować osobno.

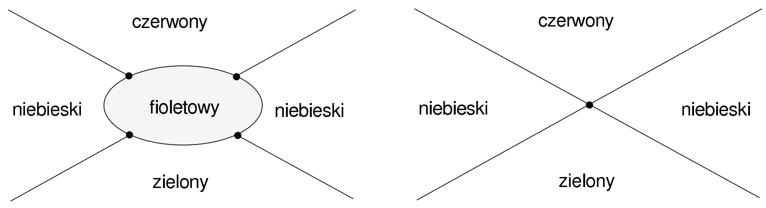


Rys. 6. Zamiana mapy na graf

Nieco trudniej wytłumaczyć, dlaczego żądamy, żeby taki graf był sześcienny. Intuicja może podpowiadać, że w praktyce sytuacje, kiedy w jednym miejscu spotykają się granice więcej niż trzech państw, są niezwykle rzadkie. Na obecnej politycznej mapie świata są jedynie dwa takie przypadki. Pierwszy, to miejsce w zachodniej części Stanów Zjednoczonych, w którym spotykają się granice stanów Utah, Kolorado, Nowy Meksyk oraz Arizony. Dla podkreślenia niezwykłości tego faktu nadano miejscu temu nazwę Four Corners (cztery narożniki). Drugie powstało po niedawnych przemianach politycznych w Afryce. Tworzą je granice czterech państw: Bostwany, Namibii, Zambii oraz Zimbabwe. Niemniej jednak sytuacje takie się zdarzają. Sama rzadkość występowania pewnego zjawiska nie upoważnia nas do pominięcia go w rozważaniach. Na szczęście to, że możemy pominąć mapy inne niż kubiczne, da się uzasadnić ściśle matematycznie.

Twierdzenie 3. *Jeżeli potrafimy pokolorować poprawnie przy użyciu czterech kolorów każdą mapę kubiczną, to potrafimy pokolorować poprawnie przy użyciu czterech kolorów dowolną mapę na płaszczyźnie.*

Dowód. Zakładamy, że każdą mapę kubiczną potrafimy pokolorować poprawnie przy użyciu czterech barw. Weźmy mapę, która nie jest kubiczna. Dla uproszczenia i bez straty ogólności możemy przyjąć, że istnieje na niej dokładnie jeden punkt, w którym spotykają się więcej niż trzy państwa. Możemy punkt ten „rozdmuchać” tworząc na mapie sztuczny obszar, graniczący ze wszystkimi obszarami, które się w nim spotykały. Zauważmy, że powstała w ten sposób nowa mapa jest już kubiczna, a skoro tak, to, zgodnie z założeniem, potrafimy pokolorować ją poprawnie przy użyciu czterech barw. Jeżeli w pokolorowanej w ten sposób mapie obszar rozdmuchany ściągniemy z powrotem do wierzchołka, to pozostałe regiony w dalszym ciągu będą pokolorowane poprawnie. Dwa obszary w tych samych kolorach mogłyby się pojawić po operacji ściągnięcia obszaru do punktu jedynie w miejscu, w którym została ona wykonana, ponieważ nie zmienia ona w żaden sposób struktury pozostałej części mapy. Gdyby jednak tak się stało, znaczyłoby to, że wcześniejsze kolorowanie nie było poprawne (rysunek 7).



Rys. 7

Pokazaliśmy w ten sposób, że jeżeli potrafimy pokolorować poprawnie przy użyciu czterech barw mapę kubiczną, potrafimy również poprawnie pokolorować dowolną mapę. □

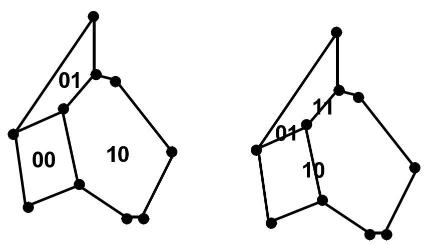
Wiemy już, dlaczego graf odpowiadający mapie powinien być kubiczny, spójny i nie mieć mostów. Ostatnią rzeczą, którą pozostało wykazać, jest sposób, w jaki można uzyskać poprawne kolorowanie regionów mapy czterema kolorami z poprawnego kolorowania krawędzi grafu trzema kolorami i odwrotnie, jak mając daną pokolorowaną mapę otrzymać poprawne kolorowanie krawędzi grafu.

Twierdzenie 4. *Dowolną mapę na płaszczyźnie da się pokolorować poprawnie przy użyciu czterech barw wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie odpowiadającego jej grafu da się pokolorować poprawnie przy użyciu trzech barw.*

Dowód.

$\Rightarrow$ Pokażemy najpierw jak z kolorowania regionów mapy czterema barwami uzyskać kolorowanie krawędzi odpowiadającego jej grafu trzema kolorami. Oznaczmy kolory, które mamy do dyspozycji przez $\{00, 01, 10, 11\}$ i przyjmijmy, że pewna mapa została przy ich użyciu pokolorowana. Nadajmy krawędziom grafu, który jej odpowiada kolory, będące sumą modulo dwa po każdej współrzędnej kolorów nadanych regionom, które ona rozdziela:

$$00 + 01 = 01$$
$$00 + 10 = 10$$
$$00 + 11 = 11$$
$$01 + 10 = 11$$
$$11 + 01 = 10$$
$$11 + 10 = 01.$$

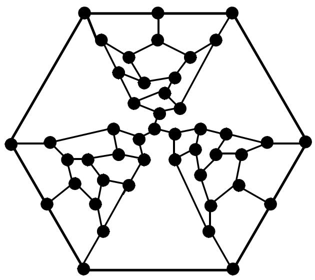


Rys. 8. Dodawanie kolorów

Musimy teraz wykazać, że takie kolorowanie krawędzi jest poprawne. Przede wszystkim jest to trójkolorowanie, bo dodając kolory w taki sposób nigdy nie uzyskamy koloru 00. Poprawność takiego kolorowania można sprawdzić rozpatrując jedynie cztery przypadki (jeden z nich przedstawia rysunek rysunek 8, sprawdzenie pozostałych zostawiamy Czytelnikowi).

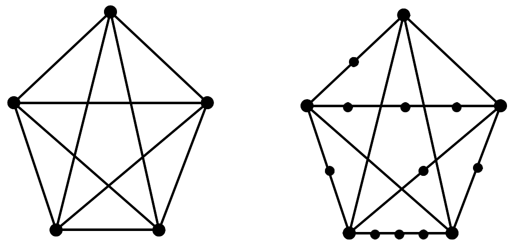
$\Leftarrow$ Pokażemy teraz jak z kolorowania krawędzi grafu trzema kolorami uzyskać kolorowanie regionów mapy czterema kolorami. Załóżmy, że krawędzie grafu odpowiadającego mapie zostały pokolorowane poprawnie kolorami $\{01, 10, 11\}$. Rozważmy taki rysunek tego grafu na płaszczyźnie, w którym krawędzie odpowiadają granicom mapy i usuńmy z niego wszystkie krawędzie w kolorze 01. Ponieważ każdy wierzchołek był stopnia trzy i do dyspozycji mieliśmy trzy kolory, to po usunięciu z grafu wszystkich krawędzi w jednym z kolorów powstanie graf, w którym każdy wierzchołek jest stopnia dwa. Taki graf jest sumą rozłącznych cykli. Każdy region wyjściowej mapy leży w tej chwili wewnątrz pewnej liczby cykli. Nadajmy 0 na pierwszej współrzędnej koloru tym regionom, które leżą wewnątrz parzystej liczby cykli i 1 takim, które leżą wewnątrz nieparzystej liczby cykli. Następnie usuńmy z wyjściowego grafu wszystkie krawędzie w kolorze 10 i ustalmy drugą współrzędną koloru dla każdego regionu w analogiczny sposób. Otrzymaliśmy kolorowanie regionów mapy przy użyciu co najwyżej czterech kolorów: $\{00, 10, 01, 11\}$. Pozostaje wykazać, że kolorowanie to jest poprawne. Przyjrzyjmy się w tym celu dowolnym dwu sąsiednim regionom mapy. Granica je rozdzielająca jest krawędzią w grafie i miała przy ustalaniu kolorowania regionów nadany pewien kolor. Jeżeli był to kolor 01, to krawędź ta rozdzielała regiony przy ustalaniu drugiej współrzędnej koloru, a co za tym idzie, znajdowały się one wewnątrz różnej liczby cykli. Co więcej, liczby te różniły się dokładnie o 1, więc miały różną parzystość. Regiony te otrzymały więc kolory różniące się na drugiej współrzędnej. Podobnie, regiony, które rozdzielała granica w kolorze 10 otrzymały kolory różniące się na pierwszej współrzędnej, a takie, które rozdzielała krawędź w kolorze 11 otrzymały kolory, które różnią się na obu współrzędnych. Wszystko to razem powoduje, że kolorowanie, które otrzymaliśmy jest poprawne. □

Takie przeformułowanie hipotezy o czterech barwach wydaje się być przyjemniejsze do badania. Ograniczamy się w końcu do bardzo wąskiej klasy grafów, która ma w dodatku szereg porządnych własności. Peter Guthrie chciał sprawę jeszcze bardziej ułatwić. Po pierwsze, przeniósł rozważania z płaszczyzny na sferę (można wykazać, że mapy na płaszczyźnie i mapy na sferze wzajemnie sobie odpowiadają), a następnie postawił śmiałą hipotezę, że każda sześcienna mapa na sferze jest hamiltonowska. Skoro snark nie może być grafem hamiltonowskim, to udowodnienie powyższej hipotezy byłoby równoznaczne z udowodnieniem twierdzenia o czterech barwach. Niestety, bardzo szybko okazało się, że hipoteza ta nie jest prawdziwa. Pierwszy kontrprzykład podał Tutte w 1946 roku, konstruując graf nazywany teraz grafem Tutte'a (rysunek 9). Do chwili obecnej udało się znaleźć jeszcze osiem grafów, które przeczą takiemu stwierdzeniu. Fakt, że optymistyczne podejście Petera Guthrie zawiodło, nie oznacza jednak, że droga przez snarki do twierdzenia o czterech barwach została całkowicie zamknięta. Co więcej, najnowszy znany dowód tego twierdzenia jest to w istocie dowód na nieistnienie planarnego snarka!



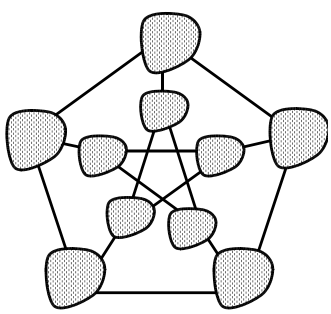
Rys. 9. Graf Tutte'a

Można by sądzić, że istnieje cały szereg grafów, które nie są planarne. Tak naprawdę istnieją tylko dwa takie grafy – graf pełny na pięciu wierzchołkach i graf pełny dwudzielny na trzech wierzchołkach. Jest to bardzo śmiałe stwierdzenie, ma ono jednak pewne uzasadnienie. Kazimierz Kuratowski udowodnił, że graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera jako podgrafu niczego, co „przypomina" którykolwiek z tych dwu grafów. W twierdzeniu Kuratowskiego „przypominanie" ma sens topologiczny – dwa grafy będziemy utożsamiać, jeżeli można z nich otrzymać taki sam graf poprzez wstawianie na krawędziach dodatkowych wierzchołków (rysunek 10).



Rys. 10.

Możemy jednak „przypominanie" w sensie topologicznym zastąpić przez *bycie minorem*. O szukaniu minorów w grafie możemy myśleć jak o szukaniu spójnych kawałków, które będą połączone dokładnie w taki sposób, jak wierzchołki innego grafu (rysunek 11). Robertson, Sanders, Seymour i Thomas wykazali w 2001 roku, że każdy snark zawiera graf Petersena jako minor, a co za tym idzie, żaden snark nie jest planarny. Mamy więc nowy dowód twierdzenia o czterech barwach! Dlaczego więc przeszedł on praktycznie bez echa w środowisku matematycznym? Odpowiedź jest prosta. Dowód ten technicznie bardzo przypomina znane wcześniej dowody. Jest to żmudna, komputerowa analiza wielu przypadków. Niemniej jednak pokazuje, że można z powodzeniem podejść do problemu czterech barw niestandardowo, do czego serdecznie zachęcamy;).



Rys. 11. Graf Petersena jako minor

Toż wam wszystko jak dziecku wyłożyłem po szwedzku,
Persku, chińsku, hebrajsku, swahili,
Choć – przyznaję – w niewiedzy, że szanowni koledzy
Z tych języków żadnym nie mówili.