Ten tekst otrzymali uczestnicy pierwszej konferencji Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej, Piotrków, październik 2008, jako zapowiedź problematyki, której poświecona będzie ta konferencja.

# Struktura przestrzeni zadań

*Marek KORDOS, Warszawa*

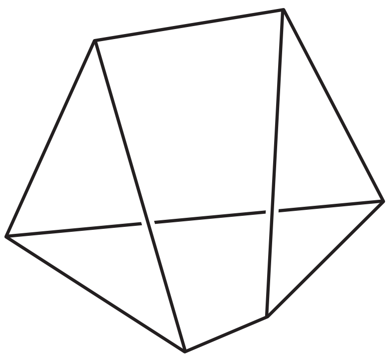
Najważniejszym manifestem programowym XX-wiecznej matematyki – obok wykładu Nicolasa Bourbakiego z 1933 roku – był wykład Davida Hilberta wygłoszony 8 sierpnia 1900 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu. Podstawowym założeniem, na którym opierał się ten wykład, była teza, że jedynym źródłem matematyki jest rozwiązywanie zadań. Hilbert dowodzi, że wszelkie pojęcia matematyczne i wszelkie twierdzenia, jak i teorie, powstały w ten sposób, że okazały się przydatne, a nawet niezbędne do rozwiązania bardzo konkretnych zadań. Przytacza zresztą na potwierdzenie tej tezy wiele przykładów.

Konsekwentnie Hilbert formułuje 23 problemy: zadania, których rozwiązanie stanowić będzie treść i źródło matematycznej twórczości rozpoczynającego się wówczas XX stulecia. I tak się faktycznie stało. Spoza problematyki wywodzącej się jawnie z hilbertowskich problemów w matematyce XX wieku zasadnicze znaczenie znalazła jeszcze tylko (niedostrzeżona, a raczej niedoceniona przez Hilberta) topologia. Wobec tak wielkiej, spełnionej przez zadania roli, warto przyjrzeć się im bliżej, traktując je teraz nie jako wyzwania intelektualne, lecz jako obiekt badany.

Pretensjonalny tytuł tego tekstu ma demonstrować zamiar dokonania analizy miejsca zajmowanego przez zadania w naszej, również społecznej przestrzeni intelektualnej, jak też zasygnalizowania wzajemnych relacji między nimi.

Udowodniona czynem przez matematyków XX wieku teza Hilberta pokazuje, że problematyka zadań pokrywa w całości obszar zainteresowań matematyków. Niezależnie jednak od tego, jak duży wymiar przypiszemy temu obszarowi (bo przecież chyba nikt nie przypuszcza, że jest to obszar płaski), nietrudno zauważyć, że istnieją jeszcze dodatkowe wymiary przestrzeni zadań. Obejrzyjmy to na następującym przykładzie trzech zadań.

**Zadanie 1.** Dwa jednakowe puchary zostały wypełnione: lewy wodą, prawy winem. Zaczerpnięto małym kieliszkiem wina z prawego pucharu i wlano je do lewego. Po chwili zaczerpnięto tymże kieliszkiem płynu z lewego pucharu i wlano do prawego. Czy w lewym pucharze jest więcej wina, niż w prawym wody, czy też odwrotnie (a może tyle samo)?



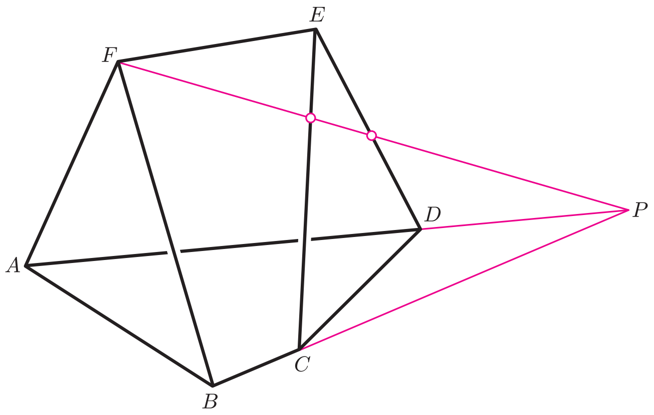
**Zadanie 2.** Czy rysunek obok może być widokiem krawędziowego modelu wielościanu?

**Zadanie 3.** Dziadek i babcia mają razem 140 lat, przy czym dziadek ma dwa razy tyle lat, ile miała babcia, gdy on miał tyle, ile ona teraz. To ile lat ma dziadek?

Rozwiązania tych zadań są następujące:

**Rozwiązanie 1.** Tyle samo, bowiem poziom płynu w każdym z pucharów jest po przelewaniu taki sam, jak na początku, zatem ile przybyło jednego, tyle ubyło drugiego.

*Komentarz.* Zadanie to jest powszechnie przyjmowane jako bardzo trudne, większość zapoznanych z nim uważa je za nierozwiązalne. Żąda się podania dodatkowych danych, jak objętość pucharów i objętość kieliszka, żąda się przyjęcia dodatkowych założeń, jak np. gwarancja, że po pierwszym przelaniu równomiernie rozmieszano płyn w lewym pucharze itd. A rozwiązanie usiłuje się przeprowadzić poprzez jakieś rachunki. Co gorsza – podanie rozwiązania (np. na Festiwalu Nauki czy w Kawiarence Naukowej *Przekroju*) wywołuje bunt publiczności, która czuje się oszukiwana.




**Rozwiązanie 2.** Załóżmy, że ściany $ABCD$, $ADEF$ i $BCEF$ (oznaczenia z rysunku) są wielokątami, a więc są płaskie. Wówczas punkt $P$ przecięcia prostych $AD$ i $BC$ leży na każdej z nich. Skoro tak, to prosta $PF$ przecina zarówno $CE$ (jako leżąca na $BCEF$), jak też $DE$ (jako leżąca na $ADEF$). Stąd wszystkie punkty leżą na jednej płaszczyźnie i rysunek nie przedstawia wielościanu.

*Komentarz.* Tu reakcją jest zazwyczaj zaskoczenie, bo spodziewano się innego wyniku, mimo sugerującego negatywną odpowiedź sformułowania zadania. Ale przez większość rozwiązanie odrzucane jest jako niezrozumiałe.

**Rozwiązanie 3.** Każdy, mniej lub bardziej sprawnie, zapisuje układ równań

$$\begin{cases} d+b &= 140, \\ d &= 2(b-(d-b)) = 4b-2d, \end{cases}$$

co daje szybko $d=80,\ b=60$.

*Komentarz.* Wszyscy są zadowoleni – nareszcie zadanie z matematyki!

Widać więc kolejny wymiar przestrzeni zadań. Pierwsze wymagało od rozwiązującego *abstrakcji*, co – jak wiadomo – znaczy odrzucenie. Trzeba było pozbyć się zaciemniających szczegółów i posłużyć wielkością odporną na wykonywane manipulacje, czyli niezmiennikiem. Jak wykazały moje obserwacje (nie tylko moje – przytoczę tu dwa autorytety: Paweł Strzelecki i Martin Gardner), społecznie nie uważa się takiego rozumowania za matematyczne – jestem pełen przerażenia i przeraża mnie świadomość, że są matematycy, których to nie przeraża. Drugie wymagało *iluminacji* (po łacinie: oświetlenia, ozdobienia) polegającej na spostrzeżeniu, że ściany wielościanu to fragmenty płaszczyzn. Tutaj opór – i kolejne społeczne wykluczenie poza obręb matematyki – stwarza powszechny (przykładowe dwa autorytety: Jerzy Bednarczuk i Harold S.M. Coxeter) brak choćby elementarnej wyobraźni – to nikogo nie przeraża, bo jest wiadome od dawna. Wreszcie trzecie – i w tym gronie tylko ono – jest społecznie do matematyki zaliczane, bo jego rozwiązanie to *formalizacja* (co oznacza zapisanie) sprowadzająca problem do wytrenowanych algorytmów.

Każdy przyzna, że w tym wymiarze – opisującym różnorodność obszarów naszego intelektu, jakie mogą być przez zadanie uruchamiane – miejsca jest wiele i dałoby się bez trudu znaleźć niekolidujące miejsca nie dla trzech, ale dla wręcz setek zadań dotyczących różnych miejsc, w których ludzkość do matematyki sięga, choć często – jak pan Jourdain – nie zdając sobie z tego sprawy, ale – w odróżnieniu od pana Jourdain – nie chcąc przyjąć tego do wiadomości.

I tak przechodzimy do kolejnego – niezależnego od poprzednich – wymiaru przestrzeni zadań. W naszej społeczności zadania mają także potężną rolę selekcyjną. Aby ją wyeksponować, zwróćmy uwagę na podział: zadania rozrywkowe (tak zapewne kwalifikowane są np. powyższe trzy zadania i w ogóle zadania od Gardnera przez Perelmana do Jeleńskiego), zadania szkolne i zadania konkursowe. Szczególną rolę w tym podziale pełnią zadania szkolne. Pozostawiając więc chwilowo na boku pozostałe, zajmijmy się nimi.

Zadania szkolne (do której kategorii można by w ostateczności zaliczyć zadanie 2) to zadania wypracowane przez dwa stulecia szkolnictwa mniej więcej powszechnego (owo *mniej więcej* oznacza, że jego zasięg się zmieniał od czteroklasówki do dzisiejszego wykształcenia maturalnego). Proces kształtowania się zbiorowości zadań szkolnych był czystą ewolucją już nawet nie w typie Darwina, lecz raczej Malthusa. Nauczyciele matematyki, w słusznym zamiarze upraszczania sobie życia, osłanianym poprawnym politycznie hasłem stwarzania wszystkim jednakowych szans, tworzyli zbiór zadań pozwalających łatwo i w miarę bezmyślnie oceniać uczniów. Dwa stulecia takiej praktyki (mającej swoich mistrzów, jak Kisielow, którego podręczniki panowały w Europie

Środkowej przez blisko stulecie) wytworzyły obiekt przypominający teorię formalną – żadne dalsze działania owego zbioru nie zmieniały, aż w końcu to programy nauczania kształtowane były tak, by do sprawdzenia ich wykonania ten właśnie zbiór zadań wystarczał.

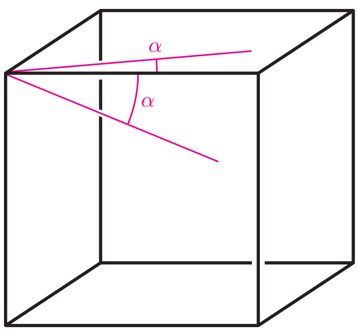
To, że programy nauczania były (są?) formowane tak, by nie naruszać uświęconego zbioru zadań szkolnych, budziło często oburzenie nawet u dydaktyków – np. podczas moich studiów Stanisław Kartasiński kazał wszystkim zdającym dydaktykę na wstępie egzaminu oddeklamować formułkę: *Matematyka szkolna to niespójny zlepek przypadkowo wybranych fragmentów różnych teorii matematycznych.*

Jak każde negatywne zjawisko, tendencja do kształtowania w ten sposób społecznej świadomości matematycznej wyparła wszelkie inne koncepcje i została uprawomocniona w postaci egzaminów państwowych.

Maturę zdawałem dokładnie 50 lat temu. Wówczas do zdania matury z matematyki potrzebna była znajomość trzech zbiorów zadań: Kozickiego z algebry, Paśniewskiego z „bryłówek” i Wojtowicza z równań i tożsamości trygonometrycznych oraz jeszcze jedna umiejętność (dziś wyłącznie w Krainie Szczęśliwych Łowów) – sprowadzanie do postaci logarytmicznej. Rzecz była wyuczalna, więc w naszej klasie (40 osób) wszyscy otrzymali na pisemnej maturze co najmniej ocenę dobrą, choć zestaw zainteresowań i dalsze nasze losy bynajmniej nie potwierdziły naszych matematycznych zainteresowań ani kwalifikacji. Może zresztą wówczas zapotrzebowanie na społeczną znajomość matematyki nie było wcale dostrzegalne.

Pomijając fakt, że w owych czasach matura pełniła taką rolę, jak obecnie powszechnie zdobywany licencjat studiów „Wdzięku i Zarządzania”, trzeba przypomnieć, że w owych czasach rola matury, jako czynnika decydującego o całych dalszych losach człowieka, nie była tak istotna, jak dziś. O tym, czy młody człowiek dostawał się na studia, decydowały również egzaminy wstępne. Zostawiwszy z boku socjologiczne konsekwencje faktu istnienia dodatkowej szansy dla abiturienta, zwróćmy uwagę na znaczenie tego faktu dla społecznego kształtowania obrazu matematyki, dla społecznego poziomu edukacji matematycznej. O tym, co to – w społecznej świadomości – jest matematyka, decydowały nie tylko wymienione wyżej trzy książki, czy zaniedbywalne jednak wysiłki popularyzatorów, lecz także (a może przede wszystkim) zadania matematyczne z egzaminów wstępnych. Z czasem nawet kursy przygotowawcze na wyższe uczelnie (czy to w formie spotkań, czy też książek) stały się reprezentatywną formą społecznego wykształcenia matematycznego.

Jako przykład, że to było zupełnie coś innego od szkolnego standardu, pragnę przytoczyć zadanie z mojego egzaminu wstępnego, przygotowane przez Stefana Kulczyckiego. Zadanie to na ponad 300 zdających zrobiły tylko 3 osoby (mimo iż wszyscy byli doskonale wytrenowani w bryłówkach Paśniewskiego). Później okazało się, że zadanie to jest naprawdę trudne, bo wspomniany Stanisław Kartasiński, wydający zbiory zadań maturalnych i zadań z egzaminów wstępnych, umieścił je ze zmienioną treścią. Oto ono:



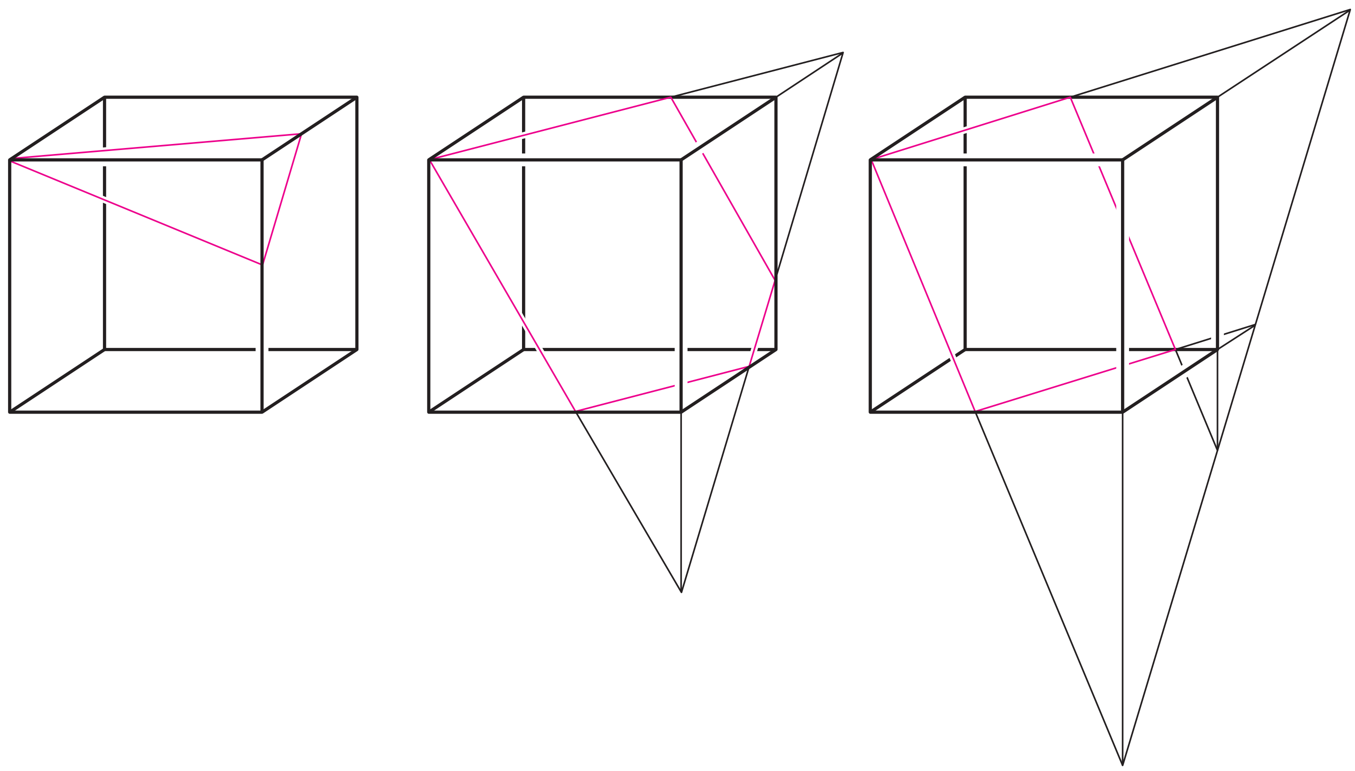

**Zadanie Kulczyckiego.** Sześcian jednostkowy przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek i taką, że linie przecięcia dwóch sąsiednich ścian tworzą z ich wspólną krawędzią taki sam kąt płaski $\alpha$. Obliczyć objętość odciętej bryły.

**Rozwiązanie.** Każdy widzi, że gdy kąt $\alpha$ jest mniejszy od $\pi/4$, odcięta bryła jest czworościanem o objętości $V = \operatorname{tg}^2\alpha/6$. Ale co potem?

Kluczowe dla prostego rozwiązania jest spostrzeżenie, że należy odciętą bryłę traktować jako **część wspólną** sześcianu i czworościanu takiego, jak w rozpatrzonym przypadku – oznaczmy go $C$. Wówczas widzimy, że dla $\pi/4 \leq \alpha \leq \operatorname{arc\,tg} 2$ poza sześcian wystają dwa czworościany podobne do $C$ w stosunku $(\operatorname{tg}\alpha - 1)/\operatorname{tg}\alpha = 1 - \operatorname{ctg}\alpha$ – ich objętości trzeba odjąć od $V$, a dla $\alpha \geq \operatorname{arc\,tg} 2$ te wystające czworościany mają część wspólną też podobną do $C$, tylko w stosunku $(\operatorname{tg}\alpha - 2)/\operatorname{tg}\alpha = 1 - 2\operatorname{ctg}\alpha$ – do poprzedniego wyniku trzeba więc dodać jego objętość, bo w przeciwnym przypadku będzie odejmowana dwa razy. Ostatecznie szukana objętość dana jest wzorem

Godne uwagi jest tutaj spostrzeżenie, że na pomysł myślenia o części wspólnej trzeba było wpaść już w sytuacji, gdy – dla małych kątów – jedna z figur była zawarta w drugiej.

$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha \cdot f(\alpha),$$



gdzie

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha \le \frac{\pi}{4}, \\ 1 - 2(1 - \operatorname{ctg}\alpha)^3 & \text{dla } \frac{\pi}{4} \le \alpha \le \operatorname{arc\,tg} 2, \\ 1 - 2(1 - \operatorname{ctg}\alpha)^3 + (1 - 2\operatorname{ctg}\alpha)^3 & \text{dla } \alpha \ge \operatorname{arc\,tg} 2. \end{cases}$$

Czterdzieści lat później podobną rolę przeciwwagi dla trywializującego matematykę standardu zadań szkolnych tresujących do matury spełniały np. broszurki z testami z egzaminów wstępnych na Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (w formie książkowej ten nurt prezentowali Maria Małek, Zbigniew Marciniak, Agnieszka Sułowska i Paweł Traczyk).

Obecnie sytuacja stała się poważniejsza, bo istnieje tylko jedno źródło wiedzy o tym, co aktualnie za społecznie potrzebną matematykę się uważa – jest nim Centralna Komisja Egzaminacyjna. A dostosowanie się do jej standardów decyduje w wielkim stopniu o dalszych losach maturzysty. W naszym konkretnym przypadku to ona udziela odpowiedzi społeczeństwu na pytanie *Co to jest matematyka*.

Tendencję, by ułatwiające odpytywanie zadania kształtowały programy nauczania, można zaobserwować w czystej formie we wspomnianych Wyższych Szkołach Wdzięku i Zarządzania – niezależnie od kierunku studiów wszędzie uczy się tam wyznaczników, mnożników Lagrange'a i rachunku zdań, czasami tylko dodając do tego elementy statystyki opisowej, co każdy z dorabiających tam może potwierdzić.

Chodzi o maturę 2008.

Dialektyka twierdzi, że ilość przechodzi w jakość. To właśnie obejrzeliśmy na tegorocznej maturze, a raczej po niej. Przy czym nie chodzi mi tutaj o to, że jedno zadanie rozwiązane źle (o wielomianie) i jedno niepełnie (o trójkącie) to nowa jakość – błędy zdarzały się zawsze i wszędzie, a ślepy los mógł umieścić dwa w jednej maturze z matematyki (obdarzając też sprawiedliwie błędami inne przedmioty). Nie jest również niczym nadzwyczajnym pokazany w telewizji nauczyciel matematyki twierdzący, że jeśli wielomian ma trzy pierwiastki, to jest trzeciego stopnia – byłoby czymś zdumiewającym, gdyby akurat wśród nauczycieli matematyki nie było durniów. Nadzwyczajne jest jednak oświadczenie wygłoszone w tejże telewizji przez poważnego matematyka z dorobkiem i stanowiskiem, że istnieje dodatkowy środek dowodowy: *świadomość licealisty*, za pomocą którego można uznać za poprawne rozumowanie w myśl „tradycyjnej” matematyki błędne. Tak oto autor inkryminowanego zadania został uznany za twórcę matematyki alternatywnej.

Oczywiście, nie obawiam się o dalszy los matematyki, ale można obawiać się o jej społeczną znajomość, bo przy zdefiniowaniu matematyki jako zbioru szkolnych zadań, dość powszechna odraza i niechęć, jaką matematyka jest otoczona, staje się nie tak bardzo znowu niezrozumiała.

Platon był zdania, że powierzenie decyzji o życiu, również intelektualnym, społeczeństwa wąskiej grupie ekspertów jest jedynym rozsądnym rozwiązaniem (oczywiście Platonowi nie chodziło o poprzedni zespół ekspertów CKE, lecz o obecny). Nie zgadzam się z jego poglądem, ale – jak głosi dość cyniczna sentencja – *gdy nie możesz złu zaradzić, postaraj się przynajmniej jak najwięcej dobrego z tego złego wyciągnąć*. Ewentualne dobro mogłoby w tym przypadku polegać na zmianie przez ekspertów standardu zadań szkolnych.

Aby zaryzykować (zapewne mało pożądane) doradzanie, wypada rozważyć jeszcze jeden wymiar zadań. Można mianowicie zastanawiać się, do czego społecznie potrzebna jest dziś matematyka. A więc w jaki sposób dzisiaj matematyka jest obecna w społeczeństwie.

Wśród matematyków sytuacja jest klarowna: na Kongresach w Berlinie, Pekinie i Madrycie widać było wyraźną restrukturyzację matematyki w kierunku ponad 60% udziału zastosowań i towarzyszącą jej siłę przekonań matematyków, że ich działania wcześniej czy później ludzkość zbawią. Elita naukowa innych dyscyplin odnosi się do tego nad wyraz przychylnie, czego wymiernymi dowodami są Nagrody Nobla dla matematyków (np. wzór Blacka–Scholesa czy gry Nasha), albo za matematykę (np. fulereny czy sterowanie orientacją syntetyzowanych związków organicznych). Na naszym warszawskim gruncie takim wymiernym dowodem jest wypączkowanie z ekipy zajmującej się zastosowaniami na naszym Wydziale potężnej i bogatej instytucji, jaką jest Interdyscyplinarne Centrum Modelowania. Wśród biznesmenów to samo zjawisko przejawia się w potężnym wysysaniu matematyków do pracy w bankach, ubezpieczeniach, a także do działania w bezpośrednim menadżeringu. Prawie każda działalność poznawcza czy praktyczna została wyposażona we właściwe dla niej modele matematyczne i dziś czy się leczy raka, czy pracuje na giełdzie, czy bada ludzką psychikę, czy zgłębia problemy językowe, czy prowadzi przedsiębiorstwo itd., wszędzie bez kontaktu z modelem matematycznym nie można się obejść.

I równocześnie, poza sferami bezpośrednio w nią uwikłanymi, matematyka wywołuje generalną niechęć i paniczny nieraz lęk. I to nie tylko w sferach niewykształconych. Próbuje się dość powszechnie dzielić predyspozycje do pracy intelektualnej czy po prostu intelektualną sprawność na matematyczną i humanistyczną, z wyraźnym przekonaniem o ich rozłączności.

Widać więc pogłębiającą się alienację matematyki w społeczeństwie zmierzającym szybko do jej powszechnego stosowania. Nie trzeba być heglistą, aby widzieć, że w najbliższej przyszłości narastająca sprzeczność tych tendencji będzie musiała być jakoś rozwiązana.

Dla dalszej analizy konieczne jest dostrzeżenie różnych aspektów społecznej obecności matematyki. W najgrubszym ujęciu działa ona jako
– **wiedza**, zasób wiadomości i algorytmów;
– **sposób myślenia**, podejścia do realnych i myślowych problemów;
– **technika**, formalizmy, a w szczególności rachunek.

Nie jest oczywiste, czy społecznie niezbędne są wszystkie te trzy aspekty. Do pomyślenia jest struktura, w której wiedzę i technikę użytkują tylko konstruktorzy modeli matematycznych, podczas gdy pozostałym niezbędny jest tylko charakterystyczny dla matematyki sposób myślenia, pozwalający poprawnie korzystać z realizacji tych modeli – od wciskania guzików komórki czy klawiatury windowsów, poprzez obsługę automatów w rodzaju rezerwacji

W szczególności ludzkość została uwolniona – przez zmyślne wykorzystanie tranzystora – od mozołu rachunków. Żaden już uczeń nie wiedziałby, o co chodzi w wymienionym przeze mnie sprowadzaniu do postaci logarytmicznej, a gdy moim studentom – na wykładzie historii – pokazuję suwak logarytmiczny, nie są oni w stanie uwierzyć, że to za sprawą tego przyrządu została skonstruowana cała XX-wieczna cywilizacja.

biletów, autopilota jumbojeta, czy tomografu, aż po stosowanie pakietów programowych budowy mostów lub tp.

Gdyby przyjąć taki punkt widzenia, można by Ekspertom CKE sugerować, że może nie warto, aby na powszechnej maturze obowiązywało „twierdzenie Talesa bez dowodu", czy „postać kanoniczna trójmianu kwadratowego" itp., a miło byłoby widzieć młodego człowieka, który wiedziałby np., że wśród kolejnych liczb podzielnych przez 7 (tak jak wśród „wszystkich" liczb całkowitych) co druga jest parzysta, co trzecia dzieli się przez 3, co piąta przez 5, a nawet co jedenasta przez 11. Albo, że gdy do sześciennego pudełka uda mu się zapakować 3 jednakowe kule, to zmieści się tam jeszcze czwarta taka sama. I żeby umiał narysować taki trójkąt, który zmieści się w kole o promieniu dwukrotnie mniejszym od promienia jego okręgu opisanego. I żeby wiedział, że samolot z Warszawy do Dęblina i z powrotem szybciej przyleci, gdy nie będzie wiatru, niż wtedy, gdy będzie obojętnie już jaki – byle stały – wiatr. Ale wróćmy na Ziemię.

Dla rozważenia pozostawionych poprzednio na uboczu zadań związanych z popularyzacją i konkursami dogodnie jest posłużyć się dość naturalną refleksją. Mianowicie od dawna wszyscy zgadzają się, że dziedziczymy na dwóch drogach: biologicznie i intelektualnie. Wielu uważa, że reguły rządzące tym drugim dziedziczeniem są podobne do biologicznej genetyki. W tym ujęciu szkoła reprezentowałaby stabilność genomu, szeroko zaś rozumiane upowszechnienie realizować by mogło wszelkie mutacje. Od stabilności genomu zależy przetrwanie, od mutacji – rozwój. Tak więc należy się pogodzić z ogromną, częściowo opisaną wyżej bezwładnością szkoły, dydaktyki i kształcenia nauczycieli, zdając sobie równocześnie sprawę, że mutacyjną rolę pełnią w konkretnym przypadku matematyki zarówno popularyzatorzy, jak też organizatorzy konkursów zadaniowych.

Rola tych pierwszych polega na wprowadzaniu do społecznego obiegu nowych, niedawno powstałych pojęć, różnego rodzaju hipotez i informacji z naukowego frontu. O istnieniu popytu na tego rodzaju działalność świadczy dobitnie imponująca popularność Festiwali Nauki, czy też wielkie zainteresowanie wszelkimi publikacjami ze słowami *chaos* albo *fraktale*. Każdy przyzna jednak, że z tego rodzaju pojęciami czy rezultatami nie wiążą się – przynajmniej w naturalny sposób dające się rozwiązać przez odbiorcę – zadania. I wtedy dobrze jest uświadomić sobie, że słowo *nowe* oznacza społecznie to samo, co słowo *nieznane*. A wtedy do zagospodarowania mamy ogromny dystans dzielący matematykę szkolną od współczesności. Gdyby wprowadzone przez nas pojęcia zyskały obywatelstwo w społecznej świadomości, w niedługim (zapewne) czasie awansowałyby do obszaru standardowego nauczania. Trudno to sobie wyobrazić, ale – jak mówią Rosjanie – *striemitsja nada*.

Wypada na koniec zauważyć, że podstawowym pytaniem, jakie stawiamy sobie, proponując jakieś zadanie, jest: *co ono sprawdza*. Odpowiedzi mogą być różne: pamięć, znajomość tego czy innego pojęcia, erudycję, rutynę, pomysłowść, czytanie ze zrozumieniem i wiele jeszcze innych. Organizatorzy konkursów zadaniowych, a zwłaszcza olimpiady chcieliby, rzecz jasna, na poczesnym miejscu umieścić odpowiedź – zdolności. Zadaniem konkursów jest przecież wyszukiwanie w jak największej liczbie środowisk ludzi uzdolnionych, by stworzyć im łatwiejszą drogę do sukcesu naukowego i wzmocnić tym samym potencjał naukowy naszego kraju, a zwłaszcza nie dopuścić do zmarnowania intelektualnych talentów. I rzeczywiście, to z konkursów pochodzi przytłaczająca większość luminarzy naszej dyscypliny.

Każdy z konkursów ma swoją specyfikę i właściwy dla siebie typ zadań. Co pewnien jednak czas obserwujemy w każdym z nich odbierane z reguły negatywnie zjawisko pojawiania się tzw. stajni. Okazuje się, że każdy konkurs ma tendencję do ograniczania grona swoich laureatów do uczniów niewielkiej liczby szkół. Ten stan rzeczy z reguły nie odpowiada założeniom realizatorów danego konkursu, warto więc zwrócić uwagę na to, dlaczego tak się dzieje.

Oczywiście, można oskarżyć o to złą organizację (w szczególności nikłe rozpropagowanie konkursu), lenistwo nauczycieli, bierność uczniów, zły wpływ internetu itd. itp.

Nie od rzeczy będzie jednak przyjrzeć się używanym w danym konkursie zadaniom. Może się bowiem okazać, iż dobór zdań powoduje, że dużo lepsze szanse np. w olimpiadzie mają ci, którzy znają pewną liczbę najczęściej powtarzających się chwytów – np. znają małe twierdzenie Fermata, okrąg Apoloniusza, nierówność Jensena, twierdzenie Desarguesa albo jakieś zaklęcia w rodzaju *średnia geometryczna średniej arytmetycznej i średniej harmonicznej to średnia geometryczna.* I gdzież wtedy do takich zawodowców choćby nawet najbardziej utalentowanym amatorom, w szczególności z małych ośrodków? Może więc stajnie produkujemy sami, nie dość uważnie eliminując te zadania, które dają się rozwiązywać na skróty?

I tak na zakończenie doszliśmy do fundamentalnego pytania,

*JAK WYGLĄDAJĄ ZADANIA NAPRAWDĘ Z MATEMATYKI?*

na które odpowiedzi zapewne wszyscy szukamy przez całe nasze zawodowe życie.

⋆ ⋆ ⋆

W swoim przydługim wystąpieniu chciałem przekonać ewentualnych słuchaczy/czytelników o dwóch sprawach: że przestrzeń zadań jest niesłychanie bogata i wielowymiarowa i że wybierając w swojej działalności takie, a nie inne zadania, powinniśmy starać się przewidzieć, jakie to może mieć konsekwencje dla poddanych naszej aktywności młodych ludzi.

*POST FACTUM. Oczywiście, na konferencji powiedziałem trochę coś innego, a to dlatego, że ponieważ wszyscy uczestnicy dostali skserowany powyższy tekst, więc nie chciałem, aby się nudzili. Ale głównie chciałem przekazać w bardziej agitacyjnej formie główny postulat mojego wystąpienia. A oto jego streszczenie.*

*Wprowadzając powszechną maturę, powinniśmy zadania dla poziomu podstawowego formułować tak, aby sprawdzały one umiejętność matematycznego myślenia, a nie wymagały ani wiedzy matematycznej (czyli znajomości twierdzeń, algorytmów itp.), ani znajomości techniki matematycznej (czyli formalizmów czy sprawności rachunkowej). Te umiejętności powinny się znaleźć w zadaniach poziomu rozszerzonego, bo ten pisać będą uczniowie, których dalsza działalność będzie z matematyką związana, podczas gdy poziom podstawowy pisać będą przyszli, jedynie bierni, użytkownicy rozlicznych modeli matematycznych – idzie o to, aby korzystali z nich skutecznie, a nie o to, by umieli je analizować czy tworzyć. A formalna matematyka przestanie straszyć tych, którzy dziś matematyki na maturze zdawać nie chcą.*

*Okazało się, że taki pogląd jest radykalnie odmienny od poglądu na tę sprawę władz oświatowych. Przygotowywane rozwiązania stawiają na to, aby poziom podstawowy powszechnej matury zawierał proste zadania na stosowanie wyuczonych prostych algorytmów, podczas gdy cała matematyka ma być obecna w zadaniach poziomu rozszerzonego. Uzasadnienie takiego poglądu opiera się na przekonaniu, że powszechna matura da się wdrożyć jedynie wtedy, gdy* **każdy** *nauczyciel będzie zdania, że zadania przeznaczone na poziom podstawowy powszechnej matury są tak bardzo proste, iż nawet całkowicie odżegnujący się od matematyki uczniowie zrobią je skutecznie – odmienny stan rzeczy wywoływałby wśród nauczycieli obawy, że procent zdanych matur mógłby być niski, co powodowałoby niską ocenę ich pracy. Sami zaś nie chcieliby puszczać się na eksperymenty z innym materiałem, niż sprawdzone przez nich w ciągu wielu lat powszechnie znane algorytmy.*

*Zwolennicy tego drugiego poglądu zadania propagujące matematyczne myślenie, natomiast uwolnione od obciążeń standardowymi algorytmami i typowymi twierdzeniami, nazywali lekceważąco anegdotkami, nie widząc dla nich zastosowania w aktualnym szkolnictwie. Na szczęście nikt z konferencyjnych prelegentów (a więc nauczycieli gimnazjalnych, licealnych i uniwersyteckich) nie obraził się, a zasadnicza dla skutecznego działania świadomość, że istnieją (co najmniej) dwie drogi, zapewne zaowocuje głębszą analizą tego, co proponujemy swoim uczniom.*

*M.K.*