Jest to rozszerzony zapis odczytu wygłoszonego na XLI Szkole Matematyki Poglądowej, *Matematyczne obrazki*, sierpień 2008.

Wariacje na temat Zasady Banacha

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Celem tej prezentacji jest „dowód", że Zasada Banacha to niezwykły rezultat matematyczny. Od blisko 90-ciu lat twórczo inspiruje on kolejne pokolenia matematyków.

1. Odrobina historii

Stefan Banach, Kraków, 1919 r., źródło [3].

Stefan Banach (1892–1945) w 1920 roku otrzymał asystenturę matematyki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej u profesora Antoniego M. Łomnickiego. W tym samym roku za pracę *O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniu do równań całkowych*, z pominięciem regulaminowych przepisów (Banach nie miał ukończonych studiów), otrzymał na Uniwersytecie Jana Kazimierza stopień doktora. Promotorem był prof. A. Łomnicki. Praca doktorska Banacha opublikowana dwa lata później [*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133-181] to ważny krok w rozwoju gałęzi matematyki, której Paul Lévy nadał nazwę *analiza funkcjonalna* (pochodzi ona od tytułu książki: P. Lévy, *Lecons d'analyse fonctionelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922).

Za najważniejsze osiągnięcie rozprawy uważa się wyróżnienie ogólnych przestrzeni abstrakcyjnych, nazwanych przez Banacha, *przestrzeniami typu (B)* (są to unormowanie i zupełne przestrzenie wektorowe), i wskazanie ich użyteczności w badaniach matematycznych. W 1929 roku H. Steinhaus w pracy *Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie*, Studia Math. 1 (1929), 51-81, powołując się na M. Frécheta, nazwał przestrzeń typu (B) *przestrzenią Banacha*. Od tej pory nazwa ta jest powszechnie używana.

W rozprawie podanych jest również szereg twierdzeń dotyczących przekształceń między wyróżnionymi przestrzeniami. Jedno z nich znane jest obecnie jako Zasada Banacha lub jako twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

2. Zasada Banacha

Twierdzenie 1 (S. Banach, 1922). *Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Załóżmy, że $T: M \to M$ jest kontrakcją. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $z \in M$ taki, że $Tz = z$ oraz dla dowolnego $y \in M$, $T^n y \to z$, gdy $n \to \infty$.*

Odwzorowanie $T : M \to M$ nazywamy *kontrakcją*, gdy istnieje stała $k \in [0,1)$ taka, że $d(Tx,Ty) \leqslant kd(x,y)$ dla wszystkich $x, y \in M$. Oczywiście kontrakcja T jest odwzorowaniem ciągłym – jeśli dla danego $\varepsilon > 0$ przyjąć $\delta = \varepsilon$, to dla dowolnego $x \in M$ spełniony jest warunek $T(B(x,\delta)) \subset B(Tx,\varepsilon)$, gdzie $B(x,r)$ oznacza otwartą kulę o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$.

Dowód 1 (klasyczny). Niech $n, p \in \mathbb{N}$, $x \in M$. Wtedy

$$(1)\quad d(T^n x, T^{n+p}x) \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} d(T^{n+i}x, T^{n+i+1}x) \leqslant k^n \sum_{i=0}^{p-1} d(T^i x, T^{i+1}x) \leqslant$$

$$\leqslant k^n d(x,Tx) \sum_{i=0}^{p-1} k^i = k^n d(x,Tx)\frac{1-k^p}{1-k} \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x,Tx).$$

Nierówność (1) oznacza, że ciąg $\{T^n x\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ przestrzeń M jest zupełna, więc istnieje punkt $z \in M$ taki, że $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$. Wobec ciągłości przekształcenia T,

$$Tz = T\Big(\lim_{n\to\infty} T^n x\Big) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = z.$$

Punkt $Tz = z$ nazywamy *punktem stałym* przekształcenia T. To, że jest to jedyny punkt stały wynika z faktu, że jeśli $Tz_1 = z_1$ i $Tz_2 = z_2$, to $d(z_1,z_2) = d(Tz_1,Tz_2) \leqslant kd(z_1,z_2)$, i w konsekwencji $z_1 = z_2$.

Niech $y \in M$ będzie dowolnie wybrane. Ponieważ $z = Tz = T^2 z = \ldots$, więc dla $n = 1, 2, \ldots$, $d(T^n y, z) = d(T^n y, T^n z) \leqslant k^n d(y, z)$. Warunek $0 \leqslant k < 1$ gwarantuje, że $T^n y \to z$, gdy $n \to \infty$. $\square$

Dowód 2. Ponieważ T jest kontrakcją, więc

$$d(Tx, T^2 x) \leqslant k d(x, Tx).$$

Dodając do obu stron nierówności wielkość $d(x, Tx)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(x,Tx) + d(Tx, T^2 x) &\leqslant d(x, Tx) + k d(x, Tx), \\ (1-k) d(x, Tx) &\leqslant d(x, Tx) - d(Tx, T^2 x), \\ d(x, Tx) &\leqslant \frac{1}{1-k}\Big(d(x, Tx) - d(Tx, T^2 x)\Big). \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcję $\varphi : M \to [0, \infty)$ wzorem $\varphi(x) = \frac{1}{1-k} d(x, Tx)$, dostajemy nierówność

$$d(x, Tx) \leqslant \varphi(x) - \varphi(Tx), \quad x \in M.$$

Zatem dla $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$,

$$d(T^n x, T^m x) \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} d(T^i x, T^{i+1} x) \leqslant \varphi(T^n x) - \varphi(T^m x).$$

W szczególności, przyjmując $n = 1$ dla $m \to \infty$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(T^i x, T^{i+1} x) \leqslant \varphi(Tx) < \infty,$$

co implikuje, że $\{T^n x\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Dalsze postępowanie jest takie samo jak w dowodzie 1. $\square$

Dowód 3 (elementarny, 2007, [6]). Z nierówności trójkąta dla $a, b \in M$, otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leqslant d(a, Ta) + d(Ta, Tb) + d(Tb, b), \\ d(a,b) &\leqslant \frac{1}{1-k}\Big(d(a, Ta) + d(Tb, b)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

W szczególności jeśli $Ta = a$ i $Tb = b$, to z (2) wynika, że $a = b$.

Niech $a = T^n x$, $b = T^m x$, $x \in M$. Wtedy z nierówności (2) mamy

$$d(T^n x, T^m x) \leqslant \frac{1}{1-k}\Big(d(T^n x, T^{n+1} x) + d(T^m x, T^{m+1} x)\Big) \leqslant \frac{k^n + k^m}{1-k} d(x, Tx).$$

Ponieważ $0 \leqslant k < 1$, więc $d(T^n x, T^m x) \to 0$, gdy $n, m \to \infty$. Oznacza to, że $\{T^n x\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Jeżeli $T^m x \to z$, gdy $m \to \infty$, to

$$d(T^n x, z) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x, Tx),$$

co daje identyczne oszacowanie jak nierówność (1). $\square$

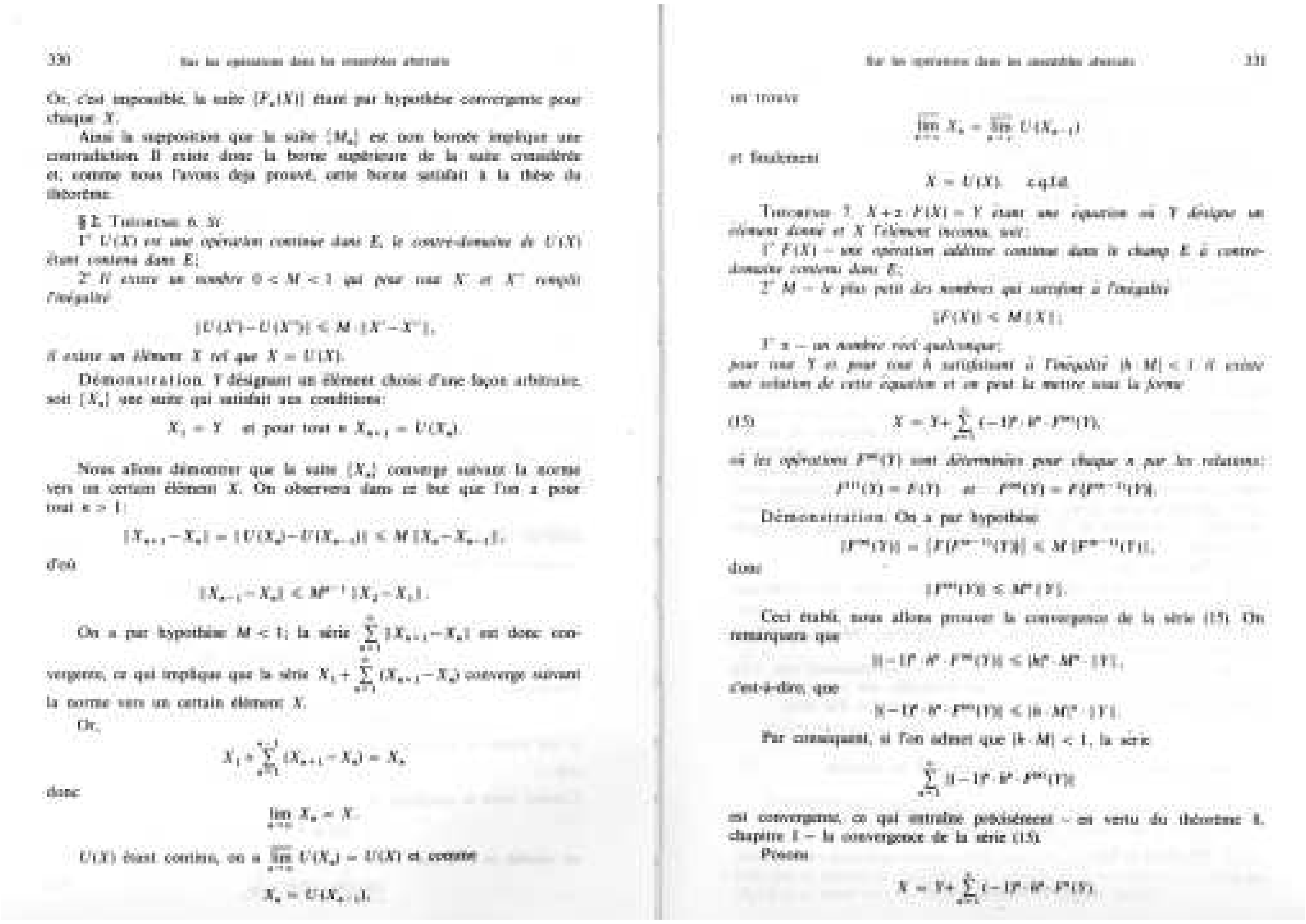
Dowód 4 (niekonstruktywny). Niech $A = \inf\{d(x, Tx) : x \in M\}$. Załóżmy, że $A > 0$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wybieramy wtedy $x \in M$ takie, że $d(x, Tx) < A + \varepsilon$. Wówczas,

$$A \leqslant d(Tx, T^2 x) \leqslant k d(x, Tx) < k(A + \varepsilon),$$

co prowadzi do sprzeczności, gdy $\varepsilon \downarrow 0$. Zatem $A = 0$.

Zbiory $D_\varepsilon = \{x \in M : d(x, Tx) \leqslant \varepsilon\}$ są niepuste i domknięte, a ponadto $D_{\varepsilon_1} \subset D_{\varepsilon_2}$ dla $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$. Zauważmy też, że dla $x, y \in D_\varepsilon$ z nierówności (2) wynika, że $d(x, y) \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-k}$, czyli $diam D_\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \downarrow 0$. Na mocy twierdzenia Cantora o przecięciu $Fix\ T = \bigcap_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon$ składa się dokładnie z jednego punktu $z = Tz$. $\square$

Dowód 5 (z pracy Banacha).



330 Sur les opérations dans les ensembles abstraits

Or, c'est impossible, la suite $\{F_n(X)\}$ étant par hypothèse convergente pour chaque X.

Ainsi la supposition que la suite $\{M_n\}$ est non bornée implique une contradiction. Il existe donc la borne supérieure de la suite considérée et, comme nous l'avons déjà prouvé, cette borne satisfait à la thèse du théorème.

§ 2. Théorème 6. Si

1° $U(X)$ *est une opération continue dans* E, *le contre-domaine de* $U(X)$ *étant contenu dans* E;

2° *Il existe un nombre* $0 < M < 1$ *qui pour tout* X' *et* X'' *remplit l'inégalité*

$$\|U(X')-U(X'')\| \leq M\cdot\|X'-X''\|,$$

il existe un élément X *tel que* $X = U(X)$.

Démonstration. Y désignant un élément choisi d'une façon arbitraire, soit $\{X_n\}$ une suite qui satisfait aux conditions:

$$X_1 = Y \quad \text{et pour tout } n \;\; X_{n+1} = U(X_n).$$

Nous allons démontrer que la suite $\{X_n\}$ converge suivant la norme vers un certain élément X. On observera dans ce but que l'on a pour tout $n > 1$:

$$\|X_{n+1}-X_n\| = \|U(X_n)-U(X_{n-1})\| \leq M\,\|X_n-X_{n-1}\|,$$

d'où

$$\|X_{n+1}-X_n\| \leq M^{n-1}\,\|X_2-X_1\|.$$

On a par hypothèse $M < 1$; la série $\sum_{n=1}^{\infty}\|X_{n+1}-X_n\|$ est donc convergente, ce qui implique que la série $X_1+\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n+1}-X_n)$ converge suivant la norme vers un certain élément X.

Or,

$$X_1+\sum_{n=1}^{n-1}(X_{n+1}-X_n) = X_n$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

$U(X)$ étant continu, on a $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, U(X_n) = U(X)$ et comme

$$X_n = U(X_{n-1}),$$

Sur les opérations dans les ensembles abstraits 331

on trouve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, U(X_{n-1})$$

et finalement

$$X = U(X). \quad \text{c.q.f.d.}$$

Théorème 7. $X+x\cdot F(X) = Y$ *étant une équation où* Y *désigne un élément donné et* X *l'élément inconnu, soit:*

1° $F(X)$ — *une opération additive continue dans le champ* E *à contre-domaine contenu dans* E;

2° M — *le plus petit des nombres qui satisfont à l'inégalité*

$$\|F(X)\| \leq M\,\|X\|;$$

3° x — *un nombre réel quelconque;*

pour tout Y *et pour tout* h *satisfaisant à l'inégalité* $|h\cdot M| < 1$ *il existe une solution de cette équation et on peut la mettre sous la forme*

$$X = Y+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot h^n\cdot F^{(n)}(Y), \tag{15}$$

où les opérations $F^{(n)}(Y)$ *sont déterminées pour chaque* n *par les relations:*

$$F^{(1)}(Y) = F(Y) \quad \text{et} \quad F^{(n)}(Y) = F[F^{(n-1)}(Y)].$$

Démonstration. On a par hypothèse

$$\|F^{(n)}(Y)\| = \|F[F^{(n-1)}(Y)]\| \leq M\,\|F^{(n-1)}(Y)\|,$$

donc

$$\|F^{(n)}(Y)\| \leq M^n\,\|Y\|.$$

Ceci établi, nous allons prouver la convergence de la série (15). On remarquera que

$$\|(-1)^n\cdot h^n\cdot F^{(n)}(Y)\| \leq |h^n\cdot M^n\cdot\|Y\||,$$

c'est-à-dire, que

$$\|(-1)^n\cdot h^n\cdot F^{(n)}(Y)\| \leq |h\cdot M|^n\cdot\|Y\|.$$

Par conséquent, si l'on admet que $|h\cdot M| < 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|(-1)^n\cdot h^n\cdot F^{(n)}(Y)\|$$

est convergente, ce qui entraîne précisément — en vertu du théorème 8, chapitre I — la convergence de la série (15).

Posons

$$X = Y+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot h^n\cdot F^{(n)}(Y).$$

3. Kilka słów o założeniach

Wszystkie założenia Twierdzenia 1 są optymalne.

1. Nie można zrezygnować z założenia zupełności. Przestrzeń $M = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ z metryką $d(x,y) = |x-y|$ nie jest zupełna. Przekształcenie $Tx = \frac{x}{2}$ jest w tej przestrzeni kontrakcją bez punktu stałego.
2. Zastąpienie warunku kontrakcji warunkiem
$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \quad \text{dla wszystkich} \quad x \neq y,$$
nie gwarantuje istnienia punktu stałego. Dla przekształcenia $Tx = \ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$, mamy nierówność
$$|Tx-Ty| = |T'\xi|\cdot|x-y| = \frac{e^\xi}{1+e^\xi}|x-y| < |x-y|,$$
i przekształcenie T nie ma punktu stałego.
3. Proste zastąpienie warunku kontrakcji warunkiem nieoddalania, $k = 1$, również nie gwarantuje istnienia punktu stałego. Pokazuje to izometria $Tx = x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Jednak założenie $k < 1$ jest silniejsze niż to konieczne. Patrząc na nierówność (1) można zauważyć, że wystarczy założenie

$$\text{przekształcenie } T \text{ jest lipschitzowskie i takie, że} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\|T^i\| < \infty,$$

gdzie $\|T^i\| = \sup\left\{\frac{d(T^ix,T^iy)}{d(x,y)} : x,y\in M, x\neq y\right\}$.

Nawet mamy następujący rezultat:

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że* (M,d) *jest przestrzenią metryczną zupełną i* $T : M \to M$ *(może być nieciągłe) jest odwzorowaniem, dla którego* T^N *jest* *kontrakcją dla pewnego naturalnego $N > 1$. Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Z Twierdzenie Banacha, T^N ma dokładnie jeden punkt stały $z = T^N z$. Jednak, $T^N(Tz) = T(T^N z) = Tz$, więc Tz również jest punktem stałym odwzorowania T^N. Ponieważ punkt stały przekształcenia T^N jest dokładnie jeden, więc $Tz = z$. Jeśli dla innego punktu y jest $Ty = y$, to $T^N y = T^{N-1}(Ty) = T^{N-1}y = T^{N-2}(Ty) = T^{N-2}y = \ldots = y$, a w konsekwencji $y = z$. □

Przekształcnie $Tx = sign(x) + 2$, $x \in \mathbb{R}$, jest nieciągłe, a jego iteracja $T^2x = sign(sign(x) + 2) + 2 = 3$ jest kontrakcją. Może być nawet gorzej, jednocześnie wszystkie iteracje T^i dla $i < N$ mogą być bardzo „dzikie" i nieciągłe. Rzeczywiście, niech M będzie dowolną przestrzenią składającą się z co najmniej N punktów. Przedstawmy przestrzeń M w postaci sumy $M = \bigcup_{i=0}^{N-1} M_i$, gdzie zbiory M_i są parami rozłącznymi, niepustymi podzbiorami przestrzeni M. Weźmy dowolne $z \in M_{N-1}$. Każde przekształcenie $T : M \to M$ takie, że $T(M_0) \subset M_1$, $T(M_1) \subset M_2$, $\ldots$, $T(M_{N-2}) \subset M_{N-1}$ i $T(M_{N-1}) = \{z\}$ ma tę własność, że T^N jest przekształceniem stałym.

4. Spektakularne zastosowania

Zasada Banacha okazała się bardzo użytecznym narzędziem. Przy jej udziale dowody wielu ważnych rezultatów stały się krótsze i łatwiejsze. Należą do nich m.in. (zob. [5], [7]):

Twierdzenie 3 (R. Lipschitz, 1876). *Niech $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej*

$$\exists_{L>0} \forall_{x,y \in \mathbb{R}} \forall_{t \in [0,T]} \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L|x - y|.$$

Niech $\xi \in \mathbb{R}$ będzie ustalone. Wtedy równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[0, T]$.

Twierdzenie 4 (o funkcji uwikłanej). *Niech N będzie otoczniem punktu (a, b) w $\mathbb{R}^2$. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą zmiennych x i y w N oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ istnieje w N i jest ciągła w punkcie (a, b). Gdy $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ i $f(a, b) = 0$, to istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła y_0 w pewnym otoczeniu punktu a taka, że $f(x, y_0(x)) = 0$.*

Twierdzenie 5 (Stone'a–Weierstrassa). *Niech Ω będzie przestrzenią metryczną zwartą i niech $A \subset C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ będzie podalgebrą algebry $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ rozdzielającą punkty przestrzeni Ω i zawierającą funkcję stałą $f(t) = 1$ dla $t \in \Omega$. Wtedy A jest zbiorem gęstym w $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$.*

Dowód tego twierdzenia z wykorzystaniem Zasady Banacha podał J. Zemánek (Comment. Math. 20 (1987), 495–497).

5. Uogólnienia i inspiracje

Twierdzenie 6 (M. Edelstein, 1962). *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną (niekoniecznie zupełną!) i $T : M \to M$ spełnia warunek $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, gdy $x \neq y$. Załóżmy, że istnieje $x \in M$ taki, że ciąg $\{T^n x\}$ zawiera podciąg zbieżny. Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały z i $z = \lim_{n\to\infty} T^n y$ dla dowolnego $y \in M$.*

Twierdzenie 7 (F. Browder, 1968). *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, $T : M \to M$ oraz $d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x, y))$ dla $x, y \in M$. Załóżmy, że $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest funkcją prawostronnie ciągłą, niemalejącą i $\varphi(t) < t$ dla $t > 0$. Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały i dla każdego $x \in M$, ciąg iteracyjny $\{T^n x\}$ jest zbieżny do tego punktu stałego.*

W zależności od funkcji φ zbieżność ciągu kolejnych iteracji przekształcenia T może być o wiele wolniejsza niż zbieżność szeregu geometrycznego, odpowiadająca przypadkowi twierdzenia Banacha z funkcją $\varphi(t) = kt$. Na przykład, jeśli $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ i $diam(M) = d$, to $\varphi^{(n)}(d) \leqslant \frac{d}{1+nd}$ dąży do 0 znacznie wolniej niż jakikolwiek ciąg geometryczny. Pokazuje to, że przekształcenia spełniające warynek $d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x, y))$ tworzą szerszą klasę niż klasa wszystkich kontrakcji.

Twierdzenie 8 (J. Caristi, 1976). *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i $T : M \to M$ (niekoniecznie przekształceniem ciągłym). Jeżeli $\psi : M \to [0, \infty)$ jest funkcją dolnie półciągłą taką, że $d(x, Tx) \leqslant \psi(x) - \psi(Tx)$ dla wszystkich $x \in M$, to T ma punkt stały.*

Twierdzenie 9 (C. Bessaga, 1958) *Niech $M \neq \emptyset$ i $T : M \to M$ będzie przekształceniem takim, że każda iteracja T^n, $n = 1, 2, \ldots$, ma dokładnie jeden punkt stały (jest on oczywiście wspólny dla wszystkich T^n). Wtedy dla każdego $k \in (0, 1)$ istnieje metryka d_k taka, że (M, d_k) jest przestrzenią metryczną zupełną i T jest kontrakcją ze stałą k.*

Rezultat ten jest równoważny Pewnikowi Wyboru.

Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną wszystkich niepustych, ograniczonych, domkniętych podzbiorów przestrzeni M. Przekształcenie $T : M \to \mathcal{M}$, które każdemu elementowi $x \in M$ przyporządkowuje niepusty, ograniczony i domknięty podzbiór przestrzeni M nazywamy *przekształceniem wielowartościowym.* Rodzinę $\mathcal{M}$ wyposażamy w metrykę Hausdorffa $\mathcal{H}$.

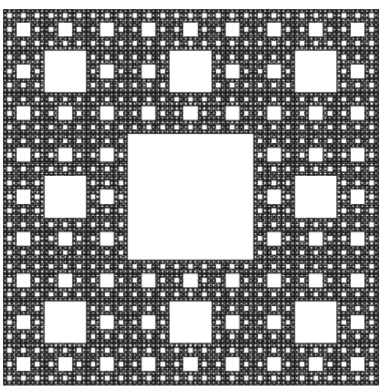
Twierdzenie 10 (J. Markin, S. Nadler, 1968/1969). *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeśli $T : M \to \mathcal{M}$ jest wielowartościową kontrakcją (tj. dla pewnego $k \in [0, 1)$ i wszystkich $x, y \in M$, $\mathcal{H}(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y)$), to istnieje punkt $z \in M$ taki, że $z \in Tz$.*

Jeżeli $\mathcal{M}_n$ jest rodziną wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, to $(\mathcal{M}_n, \mathcal{H})$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

Twierdzenie 11 (J. Hutchinson, 1981). *Niech $S_1, S_2, \ldots, S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będą kontrakcjami (tzn. $|S_i x - S_i y| \leqslant c_i |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant c_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$) i niech $S : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ będzie określone wzorem $S(X) = S_1(X) \cup \ldots \cup S_m(X)$ dla $X \in \mathcal{M}_n$. Wtedy istnieje dokładnie jeden zbiór $F \in \mathcal{M}_n$ taki, że*

$$F = S(F) = S_1(F) \cup \ldots \cup S_m(F). \tag{3}$$

Co więcej, dla każdego $E \in \mathcal{M}_n$ zachodzi $F = \lim_{j \to \infty} S^j(E)$ w metryce Hausdorffa.



Zbiory $F \in \mathcal{M}_n$ spełniające warunek (3) nazywamy *samopodobnymi względem kontrakcji $S_1, \ldots, S_m$* lub *fraktalami.* Zbiory te mogą być bardzo „egzotyczne”. Na przykład:

(a) W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ odwzorowania $S_1 x = \frac{1}{3}x$, $S_2 x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$, są kontrakcjami ze stałymi $c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$. Punkt stały przekształcenia $S : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ danego wzorem $S(X) = S_1(X) \cup S_2(X)$ jest klasycznym zbiorem Cantora $\mathcal{C}$.

(b) W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ dla $e_0 = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$, $e_3 = (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}^2$, definiujemy kontrakcje $S_1 x = \frac{1}{3}x$, $S_2 x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}e_2$, $S_3 x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}e_3$, $S_4 x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}e_4$. Wówczas punktem stałym przekształcenia $S : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ danego wzorem $S(X) = S_1(X) \cup S_2(X) \cup S_3(X) \cup S_4(X)$ jest *dywan Sierpińskiego* (umieszczony w kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$).

O innych wariacjach na temat Zasady Banacha (topologicznych kontrakcjach, lokalnych kontrakcjach, zagadnieniu remetryzacji, ultrametrykach, rozszerzeniach hybrydowych, losowych punktach stałych, punktach stałych przekształceń rozmytych) można przeczytać w [4] i wskazanych tam pracach źródłowych.

Z końcem XX wieku pojawiło się intrygujące przypuszczenie, że prawdziwe jest następujące uogólnienie Zasady Banacha (J.R. Jachymski, J.D. Stein, Jr., J. Austral. Math. Soc. (Series A) 66 (1999), 224–243):

Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, $0<k<1$ i $T : M \to M$. Niech J będzie skończonym zbiorem dodatnich liczb całkowitych. Załóżmy, że dla każdej pary $x, y \in M$ jest

$$\min\{d(T^i x, T^i y) : i \in J\} \leqslant kd(x,y).$$

Wtedy T ma punkt stały.

Dla oryginalnej Zasady Banacha mamy $J = \{1\}$. Również Twierdzenie 2 jest szczególnym przypadkiem powyższego przypuszczenia dla $J = \{N\}$. Względnie prosty jest dowód tego przypuszczenia przy dodatkowym założeniu, że T jest przekształceniem jednostajnie ciągłym (patrz [2]). W pozostałych przypadkach znane dotychczas dowody różnych wariantów tego przypuszczenia ($\#(J) > 1$) korzystają ze skomplikowanych narzędzi kombinatorycznych, m.in. z twierdzenia Ramseya o kolorowaniu. Takie kombinatoryczne dowody mogą wydawać się dziwne dla tak elementarnych rozważań i nie wiadomo, czy są potrzebne. Badania trwają!

Na koniec wspomnijmy jeszcze o najbardziej naturalnym uogólnieniu kontrakcji – przekształceniach *nieoddalających* $T : M \to M$ spełniających dla wszystkich $x, y \in M$ warunek, $d(Tx, Ty) \leqslant d(x,y)$. W ogólnym przypadku niewiele można powiedzieć o istnieniu punktów stałych takich przekształceń. Istnieje jednak klasa przestrzeni, dla której teoria punktów stałych przekształceń nieoddalających jest dobrze rozwinięta. To klasa domkniętych i wypukłych podzbiorów przestrzeni Banacha. Od 1965 roku rozwinęła się ona w obszerną, atrakcyjną i matematycznie „elegancką" teorię, której jednym ze źródeł jest Zasada Banacha. Bogactwo i różnorodność tej teorii przedstawia monografia *Handbook of metric fixed point theory* (W.A. Kirk, B. Sims, Eds.), Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 2001.

Zasada Banacha ma proste uzasadnienie, liczne i ważne zastosowania, zainspirowała powstanie wielu nowych twierdzeń, a nawet szeroko rozbudowanej teorii, i – co nie jest bez znaczenia – inspiruje nadal. To wszystko bezapelacyjnie „dowodzi", że Zasada Banacha to niezwykły rezultat.

Literatura

[1] R. Duda, *Lwowska szkoła matematyczna*, Wyd. Uniw. Wrocławskiego, Wrocław, 2007.

[2] K. Goebel, *Twierdzenia o punktach stałych. Wykłady – Tokio 2002*, Wyd. UMSC, Lublin, 2005.

[3] E. Jakimowicz, A. Miranowicz, *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka*, Wyd. Uniw. Gdańskiego i WN UAM, Gdańsk – Poznań, 2007.

[4] W.A. Kirk, *Contraction mappings and extensions*, in: *Handbook of metric fixed point theory* (W.A. Kirk, B. Sims, Eds.), Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 2001, 1–34.

[5] H. i J. Musielakowie, *Analiza matematyczna, t. II, cz. 1, Funkcje i odwzorowania wielu zmiennych*, WN UAM, Poznań, 2003.

[6] R.S. Palais, *A simple proof of the Banach contraction principle*, J. Fixed Point Theory and Appl. 2 (2007), 221–223.

[7] D.R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1974.