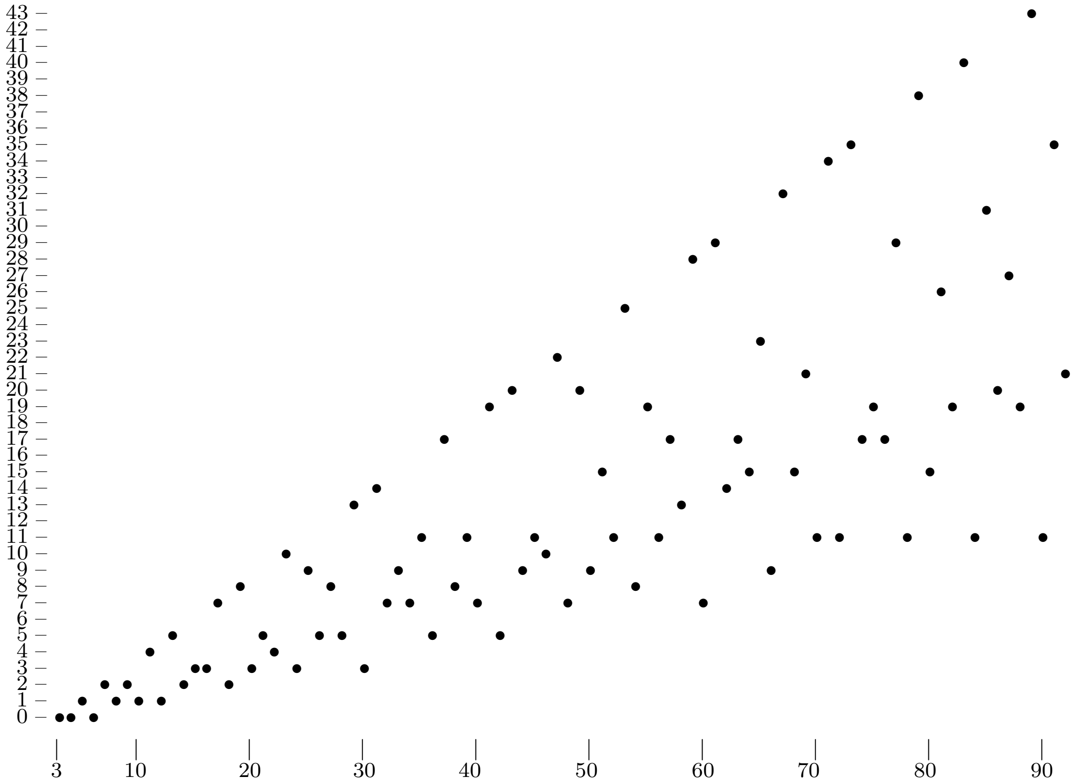
Ile jest gwiazd?

Oto wykres funkcji #:



Dla tych, którzy wolą liczby od rysunków, to samo w postaci tabelki:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
#	0	0	1	0	2	1	2	1	4	1	5	2	3	3	7	2	8	3

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
#	5	4	10	3	9	5	8	5	13	3	14	7	9	7	11	5	17	8

n	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
#	11	7	19	5	20	9	11	10	22	7	20	9	15	11	25	8	19	11

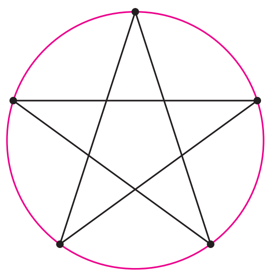
n	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
#	17	13	28	7	29	14	17	15	23	9	32	15	21	11	34	11	35	17

n	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
#	19	17	29	11	38	15	26	19	40	11	31	20	27	19	43	11	35	21

Co to za funkcja? Specjaliści z ubiegłorocznej CKE odrzekną, że to wielomian trzeciego stopnia, bo ma trzy miejsca zerowe – ale co odpowie uczeń? Uczeń zapewne zmodyfikuje pytanie i będzie chciał wiedzieć, skąd się ta funkcja wzięła.

Odpowiem (prawie zgodnie z prawdą), że jest to funkcja uzyskana empirycznie przez rysowanie gwiazd o danej liczbie rogów i zliczanie, ile też ich jest.

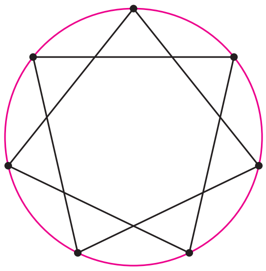
Powstanie pytanie, a co to takiego jest **gwiazda**. Można ją zdefiniować tak.

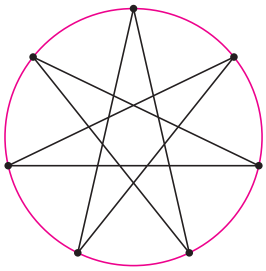


To np. jest pięcioramienna gwiazda; ma (jak widać) pięć rogów.

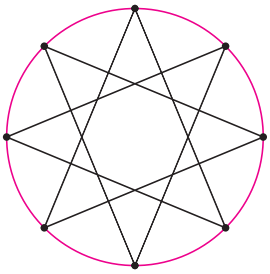
Gwiazda to łamana zamknięta, która ma
- *wszystkie odcinki równe;*
- *wszystkie wierzchołki na (jednostkowym) okręgu;*
- *jest od tego okręgu dłuższa.*

Nie trzeba zbytniej przenikliwości, aby stwierdzić, że boki łamanej odcinają na okręgu łuki tej samej długości i w konsekwencji wierzchołki gwiazdy o n rogach (wygodniej mówić n-*ramiennej*) to wierzchołki n-kąta foremnego, tyle że połączone w inny sposób, niż w takim wielokącie – tu łączymy wierzchołki niekolejne.





Z liczbą 7 względnie pierwsze (i większe od 1, a mniejsze od 6) są 2, 3, 4, 5. Gwiazd siedmioramiennych powinno być zatem cztery, ale jakoś dziwnie przedstawiają je tylko dwa rysunki.



Teraz już poprawnie z faktu, że z liczbą 8 względnie pierwsze są mniejsze od niej liczby 1, 3, 5 i 7, wnioskujemy, iż ośmioramienna gwiazda jest tylko jedna.

Powstaje kolejne pytanie: czy łącząc co drugi wierzchołek n-kąta foremnego, otrzymamy odcinek, którego n-krotność będzie dla każdego n większa od długości okręgu, w który ten n-kąt jest wpisany. A więc, jak zachowuje się funkcja $n \cdot 2\sin\frac{2\pi}{n}$, a w szczególności, czy dla każdego n jest $n\sin\frac{2\pi}{n} > \pi$.

Gdy to już rozstrzygniemy, powstanie kwestia, kiedy łamana łącząca co k-ty wierzchołek n-kąta foremnego zamknie się dopiero po n odcinkach. To też nie będzie bardzo trudne do rozstrzygnięcia. Gdy łamana taka zamknie się po m odcinkach ($m < n$), będzie to znaczyło, że m łuków, z których każdy stanowi $\frac{k}{n}$ okręgu, daje pełną liczbę okręgów (na poprzednim rysunku ta liczba wynosiła 2). A więc liczba

$$m \cdot \frac{k}{n} = \frac{m \cdot k}{n}$$

jest całkowita. Ponieważ zarówno k, jak i m, są mniejsze od n, więc tak k, jak m, mają z n wspólny dzielnik większy od 1. Zatem gwiazdę otrzymamy, łącząc co k-ty wierzchołek n-kąta foremnego, dla k większych od 1, mniejszych od $n-1$ i względnie pierwszych z n.

Żart zamieszczony na marginesie zwraca uwagę na fakt, że gdy otrzymamy gwiazdę n-ramienną dla pewnego k, to tę samą gwiazdę będzie można otrzymać dla $n-k$ – będzie ona tylko obiegana w przeciwną stronę.

I stąd widać już, jak wykonać tabelkę czy wykres z poprzedniej strony. Trzeba kolejno brać liczby naturalne, sprawdzać, jakie liczby są z nimi względnie pierwsze i rysować gwiazdki, a ich liczbę odnotowywać na wykresie lub w tabelce.

No nie, chyba nikt mi nie uwierzy, że w ten sposób „dojechałem” do 92 wierzchołków. Jak więc to zrobić szybciej? Należy posłużyć się funkcją φ Eulera. Jej wartości to liczba liczb względnie pierwszych z argumentem. Używając tej funkcji, możemy napisać wzór na liczbę gwiazd.

Liczba gwiazd n-ramiennych to $\frac{\varphi(n)}{2} - 1$.

Śliczny wzór, ale jak obliczać jego wartości nie „na piechotę”? W tym miejscu potrzebne jest BARDZO WAŻNE SPOSTRZEŻENIE, nie dla wszystkich oczywiste:

jeśli k i l są względnie pierwsze, to wśród liczb podzielnych przez k co l-ta liczba jest podzielna przez l,

a więc wśród liczb podzielnych przez 15 co druga dzieli się przez 2, co czwarta przez 4, co siódma przez 7, co ósma przez 8, a co trzydziesta siódma przez 37 itd. Ta bardzo ważna informacja daje się formalnie uzyskać przez zajmowanie się kongruencjami. Wydaje mi się jednak, że można ją pozyskać z uczniami niejako „przyrodniczo”.

Gdy już dysponujemy BWS, możemy sprawnie obliczać wartości $\varphi(n)$. Zajmijmy się rozkładem liczby n na liczby pierwsze. Niech to będzie $n = p_1^{w_1} \cdot p_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{w_k}$. Wiemy, że przez p_1 dzieli się co p_1-sza liczba – zatem na p_1 kolejnych liczb przez p_1 nie dzieli się $p_1 - 1$ liczb. Wśród nich na p_2 kolejnych liczb przez p_2 nie dzieli się $p_2 - 1$ liczb, itd. Zatem liczb niemających wspólnych, większych od 1, dzielników z n (czyli niepodzielnych ani przez p_1, ani przez p_2, ani ..., ani przez p_n) jest

$$n \cdot \left(\frac{p_1 - 1}{p_1}\right) \cdot \left(\frac{p_2 - 1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p_k - 1}{p_k}\right)$$

i to jest właśnie przepis na obliczanie wartości funkcji φ Eulera. Tak właśnie wypełniłem tabelkę i wykonałem wykres.

Można, oczywiście, nie zaglądać i samemu rozstrzygnąć otwarty dotąd problem, czy rzeczywiście funkcja φ każdą wartość przyjmuje co najmniej dwukrotnie.

Funkcja φ ma mnóstwo pasjonujących własności – warto zajrzeć np. do *Księgi liczb* Conwaya i Guya, *Elementarnej teorii liczb* Marzantowicza i Zarzyckiego, albo odważnie do monografii Wacława Sierpińskiego lub Władysława Narkiewicza.

M. K.