Co zobaczyła Alicja po drugiej stronie lustra?

Marek KORDOS, Warszawa

W czerwcu 1995 roku stanąłem przed bardzo trudnym zadaniem. Miała się odbyć wielka uroczystość wręczenia dyplomów pierwszym absolwentom nowosądeckiego Kolegium Nauczycielskiego, którego byłem opiekunem naukowym (o dziwo – z ramienia UJ). Oczekiwano ode mnie wygłoszenia odczytu podczas tej uroczystości, a poprzeczkę miałem ustawioną bardzo wysoko, gdyż mój wykład inaugurujący działalność tego Kolegium zyskał pewien rozgłos, tym bardziej że stał się podstawą kazania wygłoszonego wówczas na uroczystej mszy w nowosądeckiej Bazylice Mniejszej.

Głównym problemem był fakt, że należało mówić o matematyce, a w uroczystości mieli wziąć udział (i wzięli) ludzie o bardzo różnym stopniu oswojenia z tą dyscypliną. Byli wybitni matematycy polscy (w tej liczbie ówczesny Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego), ale też sądeccy parlamentarzyści i najznakomitsi przedstawiciele nowosądeckiego Ratusza (z Prezydentem Miasta na czele), sądecka Hierarchia Kościelna, wykładowcy Kolegium (a więc także muzycy, sportowcy, psychologowie, angliści itd.), nauczyciele szkolni, studenci i liczna gawiedź (bo rzecz odbywała się w bardzo pojemnej ratuszowej auli – tej z przepięknym piecem kaflowym). Jak tu powiedzieć coś, czego bez znudzenia mogliby wysłuchać oni wszyscy?

Niniejszy tekst stanowi relację z tego, co ostatecznie zdecydowałem się opowiedzieć.

Podobny odczyt miałem też 13 lat później, gdy problem z doborem tematu był analogiczny. Miałem mianowicie zainaugurować uroczyste obchody XXV-lecia Ogólnopolskich Sejmików Matematycznych organizowanych przez Pracownię Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach. Publiczność była równie zróżnicowana i równie liczna, bo mówiłem na scenie miejscowego teatru.

A ocenę sensowności omawiania w trzy kwadranse tak ogólnego tematu pozostawiam wyrozumiałości Czytelników.

Chciałbym opowiedzieć o najtrudniejszym pojęciu matematyki. Najtrudniejszym, choć intuicyjnie prostym i używanym powszechnie również przez niematematyków. Chodzi o orientację.

Zacznijmy od jednego z najbardziej znanych matematyków – chodzi o Charlesa L. Dodgsona (1832–1898), studenta, a później profesora Christ Church College w Oxfordzie. Oczywiście, spieszę uspokoić tych, którzy nie odnajdują w swojej pamięci takiego matematyka: Charles Dodgson nie jest znany jako matematyk i, na dodatek, nie jest znany pod swoim nazwiskiem. To Lewis Carrol, którego dwie książeczki – *Alice's Adventures in Wonderland* (1865) i *Through the Looking Glass* (1875) – należą do (przynajmniej europejskiego) kanonu lektur dziecięcych. Pierwsza z nich ma ustaloną polską wersję tytułu: *Alicja w krainie czarów*, druga zaś znana jest w Polsce pod różnymi tytułami, wśród których jest i *Co zobaczyła Alicja po drugiej stronie lustra?*

No właśnie – co zobaczyła? Nasuwająca się odpowiedź to: zobaczyła siebie. Każdy jednak, kto np. próbował z pomocą lustra coś sobie obciąć, powiedzmy wąsy albo grzywkę, wie, że napotkamy przy takiej czynności pewne trudności i nasza sprawność sterowania ruchami widzianych w lustrze nożyc jest znacznie naruszona. W ogóle wydaje się, że trzymane w prawej ręce nożyce w lustrze trzymamy w ręce lewej.

Pozwala to postawić hipotezę, że lustro zamienia prawą i lewą stronę. Każdy zresztą chętnie poprze ten pogląd, uważając przy tym, że wie to od dziecka. Jeśli jednak mamy umysł przenikliwy i zwyczaj zadawania sobie i innym pytania *dlaczego?*, natychmiast zaczniemy poszukiwać odpowiedzi, dlaczego akurat prawą i lewą, a nie, powiedzmy, dół i górę.

Ufni w potęgę poznawczą doświadczeń, możemy wykonać eksperyment: z nagła, aby kompletnie zaskoczyć lustro, obróćmy je o $90°$. Okaże się, że lustro dalej będzie zamieniało prawą i lewą, choć teraz będą one wypadały w tych akurat miejscach lustra, w których poprzednio znajdowały się niezamieniane dół i góra.

I tak pytanie staje się poważne, jak każde pytanie, na które nie umiemy dać zadowalającej odpowiedzi.

Właściwa odpowiedź jest zaskakująca: lustro nie zamienia prawej i lewej. Wydaje się to bzdurą, choć jest prawdą. Zrozumienie tej prawdy jest rzeczą trudną, bo też nie leży ona w optyce, ale głęboko w strukturze używanych przez nas pojęć, właściwie wręcz w filozofii.

Chodzi o to, że używane przez nas pojęcia pochodzą „z różnych szuflad". Każdy, oczywiście, uzna, że *prostopadłość* i *posłuszeństwo* to pojęcia o różnym pochodzeniu – wywodzą się one z zupełnie odmiennych kręgów doświadczeń. Okazuje się jednak, że różne pochodzenie mogą mieć również pojęcia dotyczące tego samego obszaru działania. Dla ilustracji przytoczę trzy przykłady. Pierwszy będzie dotyczył etyki, drugi geografii, a trzeci geometrii.

Przykład I. W okresie największego rozkwitu Starożytnych Aten działała grupa filozofów nazywających się sofistami. Podstawowym kierunkiem ich dociekań było badanie reguł prowadzenia dyskusji.

W szczególności interesowało ich, jak można wygrać debatę niezależnie od tego, jakie racje się głosi i jakie racje ma do przedstawienia kontrdyskutant. Swoje przemyślenia potrafili też zastosować praktycznie, udzielając (cóż tu ukrywać – odpłatnie) porad politykom, na co w demokratycznym systemie Aten było duże zapotrzebowanie. Sofistą – należącym do końcowego okresu ich działalności – był Sokrates. Jego końcowa konkluzja była taka, że gdy za przesłanki naszego wywodu przyjmiemy jedno stwierdzenie z zakresu prawa naturalnego, a drugie stwierdzenie z zakresu prawa moralnego, wówczas będziemy mogli uzasadnić zupełnie dowolną tezę. Na przykład, jeśli w debacie będziemy powoływać się z jednej strony na wolny rynek i konkurencję, a z drugiej na solidarność międzyludzką i miłość bliźniego, uda się nam bez trudu uzasadnić wszystko, co tylko się komu zamarzy. Można to zresztą zaobserwować w dyskusjach naszych dzisiejszych polityków. Nie byliby oni jednak zadowoleni z powyższego stwierdzenia. Niezadowoleni byli też politycy współczesnych Sokratesowi Aten, więc oskarżyli go o bezbożność i skazali na śmierć, każąc mu wypić kielich cykuty, co też uczynił.

Przykład II. Dla określenia swojego położenia na kuli ziemskiej żeglarz musi stwierdzić, na jakiej szerokości i długości geograficznej się znajduje. Szerokość geograficzna w pogodną noc daje się łatwo określić – jest to bowiem pojęcie przyrodnicze: wystarczy stwierdzić, jaki kąt z poziomem tworzy kierunek ku Gwieździe Polarnej. Ten kąt to właśnie szerokość geograficzna na naszej półkuli. Nie istnieje natomiast doświadczenie przyrodnicze pozwalające określić długość geograficzną. Już sam południk zerowy jest ustalany umownie – do pierwszej wojny światowej były zresztą trzy takie umowy: brytyjska – z południkiem zerowym przechodzącym przez londyńskie przedmieście Greenwich, francuska – z zerowym południkiem przez Paryż (mam nawet globus z tak zaznaczonym południkiem zerowym) i hiszpańska – przez Kadyks. Dziś powszechnie przyjmuje się tę pierwszą umowę. Do określenia długości geograficznej (nawet przez GPS!) potrzebna jest znajomość różnicy czasu astronomicznego (np. kiedy jest południe) między nami a południkiem zerowym – ta różnica czasu w godzinach pomnożona przez 15 daje długość geograficzną w stopniach (wschodnią, jeśli nasz zegar jest szybszy od londyńskiego, i zachodnią, gdy jest wolniejszy). W czasach, gdy nie było dostatecznie dokładnych zegarów, kłopoty z ustalaniem długości geograficznej były bardzo poważne (posługiwano się tzw. tablicami astronomicznych efemeryd). Stąd w XVII wieku admiralicje Anglii i Holandii, posiadających największe floty, ufundowały wielką nagrodę za skonstruowanie morskiego chronometru, co nie udało się mimo starań ani Galileuszowi, ani Huygensowi. Dopiero John Harrison (1705) taki chronometr skonstruował i ten przy niewielkich zmianach dotrwał do pojawienia się radia. Inna rzecz, że Harrison musiał przez okrągłe 30 lat procesować się ze skąpymi admirałami, zanim nagrodę mu wypłacono.

Przykład III. Jeśli chcemy opisać rozwartość jakiegoś kąta, wystarczy podać, jaką część (właściwą lub nie) kąta pełnego on stanowi. Rozwartość kąta pełnego możemy opisać na różne sposoby: a to, że jest to 360°, a to, że 2π radianów, a to, że 400 gradusów (jak chciała Rewolucja Francuska), a to, że 6 000 tysięcznych, jak chcą artylerzyści i to wyznaczy rozwartość naszego kąta. Tak czy owak, możemy poinformować o rozwartości kąta, nie odwołując się do żadnego materialnego wzorca. Ten fakt określamy, mówiąc, że kąt ma miarę naturalną. Natomiast odcinek nie ma miary naturalnej i, aby podać jego długość, obok podania jakiejś liczby musimy odwołać się do jakiegoś materialnego wzorca. Za czasów mojej młodości była to szyna z dwoma nacięciami przechowywana w Sévres pod Paryżem. Dziś używa się do tego prędkości światła (cytuję: 1 m *to odległość, jaką przebywa płaska fala elektromagnetyczna w ciągu* 1/299792458 s – prościej, prawda?).

Wróćmy jednak do Alicji. Spróbujmy – pamiętając, że mamy różne możliwości – przyjrzeć się pochodzeniu różnych charakterystycznych kierunków jej ciała (wstydliwi mogą, oczywiście, przyglądać się sobie).

Góra i dół są pojęciami przyrodniczymi. Zarówno fizyka (ciążenie), jak wynikająca stąd anatomia (nogi u dołu, głowa u góry) wyraźnie różnicę góry i dołu wyznaczają.

Przód i tył – też są przyrodnicze, bo każdy z nas coś innego ma z przodu (np. nos) niż z tyłu.

Natomiast lewa i prawa to tylko konwencja. Do dwóch strzałek prostopadłych dobieramy trzecią – można to zrobić na dwa równoważne sposoby. Arbitralność widać w trudnościach, jakie mają dzieci (często do późnej starości), z nauczeniem się, gdzie jest prawo, a gdzie lewo – chodzi o czystą umowę: tego nie można zrozumieć, tego trzeba się nauczyć na pamięć. A żarty w rodzaju: *lewa ręka to ta, gdzie kciuk jest z prawej strony*, tylko ową arbitralność podkreślają.

Do tej umowy wrócimy za chwilę, ale teraz zakończmy sprawę z lustrem:
– góry i dołu zmienić nie może;
– przód i tył oczywiście zamienia: nie zwróciliśmy na to uwagi, ale przecież stoimy ze swoim odbiciem nos w nos; zmienia strzałkę skierowaną do lustra na skierowaną od lustra;
– prawej i lewej też nie zmienia: przecież ręka z zegarkiem jest z tej samej strony, co była; **to my zmieniamy jej nazwę!**

I tu pojawia się matematyczne pojęcie orientacji. Jest to kolejność wzajemnie prostopadłych strzałek. Wybór tej kolejności to *orientacja* przestrzeni. I tu zdumiewający fakt: zarówno w jedno-, jak w dwu-, trój- i więcejwymiarowej przestrzeni jest tyle samo orientacji – dwie. Czyli w dowolnie wymiarowej przestrzeni każdy zestaw maksymalnej liczby wzajemnie prostopadłych strzałek z ustaloną kolejnością daje się przemieścić tak, że się nałoży na jeden z ustalonych dwu takich zestawów. Utarło się, że o jednej orientacji mówimy dodatnia, a o drugiej – ujemna. W przestrzeni trójwymiarowej funkcjonują też techniczne nazwy: prawoskrętna i lewoskrętna.

Matematycznie obie orientacje są równoważne. Ale w szkole – gdzie wszystko musi być jednoznacznie zadekretowane – ustalono, by nazywać je niejako geograficznie: dodatnia (prawoskrętna) orientacja to wschód-północ-góra, na płaszczyźnie wschód-północ i na prostej wschód. Ale nic by się nie zmieniło, gdybyśmy się umówili odwrotnie.

Używając jednak tej terminologii w przypadku Alicji, stwierdzamy, że dodatnia jest np. orientacja nogi-nos-prawa ręka (jak też nos-prawa ręka-nogi, nos-nogi-lewa ręka itd.), a orientacja np. nos-nogi-prawa ręka jest ujemna.

Powstaje pytanie, czy przyroda – jak matematyka – jest wobec tych równoprawnych możliwości sprawiedliwa. A odpowiedź jest – nie. Sprawa ma jednak różne oblicza.

Zacznijmy od siebie – było takie hasło wyborcze: *serce masz po lewej stronie, a po prawej masz wątrobę*. I przeważnie istotnie tak jest. Skąd biorą się takie nieregularności?

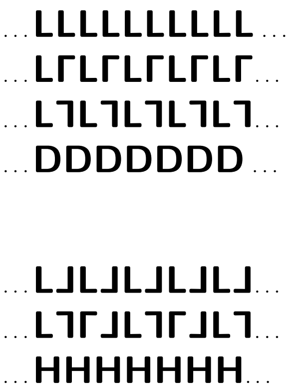
Nierównoprawność w wyborze orientacji przez przyrodę dostrzeżono dawno. Najbardziej oczywistym przykładem są muszle ślimaków – rzeczywiście przytłaczająca większość z nich odpowiada orientacji prawoskrętnej. Od pół wieku objaśnia się to tak: jakakolwiek nierównomierność wzrostu muszli – z jednej strony troszeczkę szybciej niż z drugiej – powoduje jej kształt spiralny; proces ten pogłębił się podczas upływu pokoleń, bo odchylenia się genetycznie przekazywały, a w wyniku ewolucyjnej konkurencji jedna z orientacji stała się dominująca.

Odkrycie helisy DNA (też praktycznie zawsze o tej samej orientacji) nie zmieniło poglądu na tę sprawę – po prostu jedna z orientacji wygasła.

Asymetria jest też w chemii – tam, zamiast o orientacji, mówi się o *chiralności*. Złożone związki organiczne mają bardzo skomplikowaną strukturę przestrzenną i mogą istnieć w wersjach o odmiennej chiralności (czyli orientacji). Okazuje się, że ma to wielkie znaczenie, gdy zostają wchłonięte przez żywy organizm – pożywne substancje w wersji o odmiennej chiralności niejednokrotnie stają się truciznami. Stąd konieczność kontrolowania chiralności przy produkowaniu substancji odżywczych czy też zwłaszcza lekarstw. Oczywiście, nie zawsze substancja odmienna chiralnie od miłej nam musi być dla nas niemiła: przykładem są zapachy cytrynowy i pomarańczowy, które są swymi lustrzanymi odbiciami.

Znaczenie chiralności zostało podkreślone przyznaniem w 2001 roku Nagrody Nobla właśnie za *chirally catalysed synthesis* (chiralność i po angielsku jest chiralnością – i podobnie się czyta – bo to słowo pochodzi z greki, a oznacza rękę – patrz żart o kciuku). Otrzymali ją Wiliam S. Knowles, Ryoji Nyori i K. Barry Sharpless.

Sięgając do zjawisk jeszcze bardziej podstawowych, czyli do fizyki, też stwierdzamy, że jedna z orientacji jest wyróżniona. Jeśli prąd płynie wzdłuż wyciągniętej lewej ręki, a siły magnetyczne przebijają dłoń od dołu, to siła Ampère'a działa na przewodnik w kierunku kciuka. Jakkolwiek by nie nazwać orientacji związanej z tym zjawiskiem, jest ona we wszystkich doświadczeniach taka sama. Taka asymetria już nie jest wytworem żadnej ewolucji, co można było jakoś sugerować nawet przy chemicznych związkach organicznych. Próbowano, jako wyjaśnienie tego, że z określonymi zjawiskami związana jest określona orientacja, tworzyć hipotetyczną teorię twierdzącą, że w antymaterii z analogicznymi zjawiskami związana byłaby orientacja przeciwna.



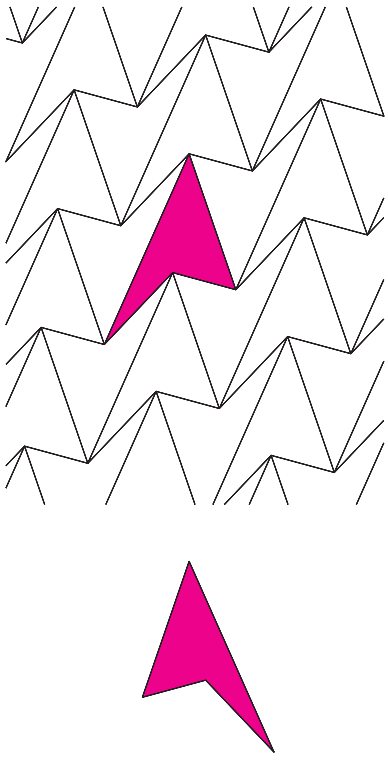
Rys. 1. Który z tych rytmów to rytm popularnego meandra, jakim zdobiono togi w Starożytności?

Pomysły te jednak nie mają dziś żadnego znaczenia, gdyż się okazało, że na poziomie zjawisk kwantowych asymetria orientacji też występuje, choć – zgodnie z twierdzeniem von Neumana (zwanego twierdzeniem o parametrach ukrytych) – zjawiska kwantowe nie są wynikiem żadnego procesu losowego czy statystycznego wśród obiektów jeszcze bardziej elementarnych.

Po tym pesymistycznym uznaniu, iż przyroda nie podziela opinii matematyki o równoprawności orientacji, zwróćmy uwagę na fakt, że niektóre obiekty matematyczne niosą ze sobą jakąś wyróżnioną orientację, a inne nie. Okazuje się też, że to zjawisko również nie poddaje się symetrii. Dobrze można to zaobserwować na styku matematyki i geologii, jakim jest krystalografia.

Krystalografia (jako obiekt, a nie jako zajmująca się nim dyscyplina) to rytmiczne wypełnienie przestrzeni. Oczywiście, można zastanawiać się nad krystalografią przestrzeni o różnych wymiarach.

Dla wymiaru 1 chodzić będzie o rytmiczne ornamenty wstęgowe. Okazuje się, że tutaj pełny komplet możliwych rytmów odkryliśmy bardzo dawno temu. Niezwykle ważny moment w dziejach ludzkości to *przełom neolityczny.* Jest to moment, w którym praludzkie stado zamienia się w ludzkie plemię, kiedy powstaje mowa, kiedy zaczyna się ceramika. W tych też czasach rozwijające się zdobnictwo znało już wszystkie siedem możliwych rytmów wstęgowego ornamentu. Są one pokazane na rysunku 1. Rytmy te zostały podzielone na dwie grupy, które różnią się, jeśli chodzi o orientację. Krystalografowie mówią, że górne cztery dopuszczają *enantiomorfizm* – oznacza to, że ich lustrzane odbicie (prawo-lewo – jesteśmy przecież w przestrzeni jednowymiarowej) jest od nich różne. Dolne trzy rytmy po odbiciu lustrzanym pozostają niezmienione. Ze względu na możliwość podwojenia górnych rytmów, czasami mówi się, że rytmów jednowymiarowych jest 11.



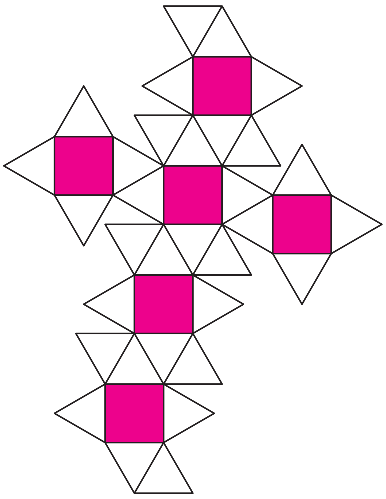
Rys. 2

Odkrycie wszystkich rytmów dwuwymiarowych należy przypisać Arabom. Niezależnie od rozbieżności w poglądach skrupulatnych badaczy, większość jest zdania, że wszystkie 17 możliwych rytmów (płaskich) mozaik można znaleźć w zabytkach wzniesionej przez Maurów, dzisiaj hiszpańskiej, Alhambry. To, że faktycznie możliwych rytmów jest 17, udowodnił matematycznie w 1890 roku bynajmniej nie matematyk, lecz geolog, Rosjanin, Jewgraf S. Fiodorow. Z tych 17 rytmów pięć dopuszcza enantiomorfizm. Na czym to polega, można zobaczyć na przykładzie wyparkietowania płaszczyzny nieregularnymi czworokątami (okazuje się, czego nie wszyscy się spodziewają, że dowolny czworokąt nadaje się na klepkę parkietową!). Na rysunku 2 mamy parkiet powstały z kopii wyróżnionego czworokąta. Poniżej jest lustrzana kopia tego czworokąta – każdy zauważy, że nie może się ona wkomponować w narysowany parkiet, choć parkiet powstały z jej kopii byłby w istocie (czyli enantiomorficznie) taki sam, jak ten narysowany. Można więc i tutaj powiedzieć, że rytmów na płaszczyźnie jest 22.

Napisałem, że w przypadku jedno- i dwuwymiarowym *można by* doliczyć do możliwych rytmów ich enantiomorficzne sobowtóry, bo z reguły tak się nie robi. Natomiast takie doliczanie w przypadku krystalografii trójwymiarowej jest powszechnie stosowane. Wszystkie rodzaje rytmicznego wypełnienia przestrzeni zostały wyliczone we wspomnianej już pracy Fiodorowa, co niezależnie zrobili też Niemiec, Artur M. Schönflies (w 1891) i Anglik, William Barlow (w 1894). Ich liczba to 219, a z wliczeniem wersji enantiomorficznych – 230.

Gdy chodzi o krystalografię, to rozważa się jeszcze klasyfikację „klocków", które pozwalają zrealizować wypełnienia. Interesującą rzeczą jest to, że choć matematyka dopuszcza (w przypadku trójwymiarowym) 32 typy kryształów, to geologom i chemikom do tej pory udało się znaleźć tylko kryształy realizujące 31 z tych typów – brakuje typu oznaczanego C_6C_3, co oznacza kryształ, który przy obrocie o 60° ma zamienione dół i górę (a więc po obrocie o następne 60° powracają one na poprzednie miejsca).

Nie ma natomiast problemu ze znalezieniem enantiomorficznych wersji tego samego minerału: znajdując kryształy kwarcu tzw. typu α-SiO_2, będziemy natrafiali z bliską 1/2 częstością na oba enantiomorficzne typy.

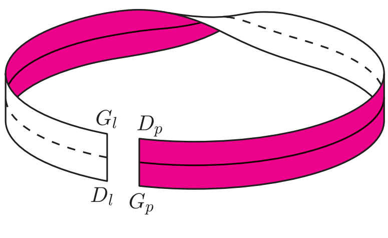


Rys. 3

Gdyby ktoś natomiast chciał sam wyprodukować sobie coś enantiomorficznego, to może np. skleić jeden z wielościanów archimedesowych, a więc takich, których ściany są wielokątami foremnymi, ale nie jednakowymi, natomiast w każdym narożu zbiega się taki sam cykl wielościanów. Konkretnie chodzi o ten, w którego każdym narożu zbiegają się cztery trójkąty równoboczne i jeden kwadrat. Ma on łącznie 32 ściany trójkątne i 6 kwadratowych. Na rysunku 3 jest jego siatka. Kilkakrotne sklejenie tej siatki da najprawdopodobniej ten sam efekt, co kolejne znaleziska kryształu kwarcu typu α. Otrzymane z tej samej siatki wielościany mogą być enantiomorficzne, czyli jeden może być lustrzanym odbiciem drugiego, choć jednakowe nie będą. Efekt ten powstanie, gdy za jednym razem wielokąty siatki zegniemy ku sobie, a za drugim razem od siebie. Zauważmy, że np. sześcian nie ma enantiomorficznej pary i niezależnie od tego, w którą stronę będziemy zaginali jego siatkę, powstanie identyczna bryła.

Zliczenie tych obiektów, które mają enantiomorficzne wersje, wskazuje, że zarówno w krystalografii, jak wśród wielościanów, stanowią one mniejszość – np. wśród wielościanów foremnych (jednakowe foremne ściany i jednakowe naroża) nie ma ich wcale.

Zatem nasze poprzednie stwierdzenie, że obie orientacje są w matematyce równoprawne, okazuje się bardziej złożone. Równoprawność polega na tym, że większości obiektów można nadać obie możliwe orientacje, ale są też takie, które mają orientację wpisaną w swoją strukturę i równoprawność manifestuje się przez istnienie ich odpowiedników z wpisaną orientacją odwrotną.



Rys. 4

Istotne nowe spojrzenie na tę sprawę przyniosły prace Ferdinanda Möbiusa dotyczące geometrii rzutowej. Okazało się mianowicie, że są obiekty, którym żadnej orientacji nadać nie można. Pierwszy odkryty taki obiekt nazywamy *wstęgą Möbiusa*. Powstaje on z prostokątnego paska papieru, gdy lewy górny róg G_l skleimy z prawym dolnym rogiem D_p i równocześnie lewy dolny D_l z prawym górnym G_p (rys. 4). O tym, że powstała w ten sposób wstęga jest nieorientowalna, przekonujemy się łatwo: zacznijmy np. od G_l i mając sklejenie po lewej stronie, posuwajmy palcem wzdłuż brzegu aż ponownie trafimy na sklejenie (czyli w G_p)– będzie ono teraz po stronie prawej: zamieniliśmy lewo na prawo bez pomocy lustra. Inaczej mówiąc: wstęga Möbiusa znajduje się zarówno po lewej, jak po prawej stronie swojego jednego (!) brzegu – jest więc nieorientowalna.

Ponieważ orientacja jest nieco podobna do bieguna wschodniego i zachodniego – mianowicie mówi się o niej niechętnie – wstęga Möbiusa reklamowana jest nie jako nieorientowalna, lecz jako jednostronna. Jest to niby prawda: gdybyśmy mieli pomalować wstęgę Möbiusa z całej jednej strony, to okazałoby się, że pomalowane są obie strony papieru, z którego ją zrobiliśmy. Dlaczego wobec tego *niby*? Otóż dlatego, że wszelkie powierzchnie w matematyce nie mają dwóch stron. Czy gdy nauczycielka mówi w klasie: *weźcie punkt* **na** *płaszczyźnie*, to pilni uczniowie dociekają *co będzie, gdy weźmiemy punkt* **pod** *płaszczyzną?* – oczywiście, nie. Strony powierzchni pojawiają się dopiero, gdy bierzemy pod uwagę jej orientowalne otoczenie: przestrzeń jest orientowalna, dlatego możemy mówić o zewnętrzu i wnętrzu powierzchni kuli, czy też o półprzestrzeni nad, czy też pod płaszczyzną. Papier, z którego wykonana jest wstęga Möbiusa, jest cienki, ale jednak trójwymiarowy, dlatego wstęga prezentuje nam nie powierzchnię, lecz papier jednostronny.

Spróbujmy teraz zobaczyć, co się stanie, gdy weźmiemy pod uwagę nieorientowalną powierzchnię zamkniętą, jak sfera. Nietrudno sobie taką wyprodukować. Skoro wstęga Möbiusa ma jeden brzeg, to – gdy zrobimy ją np. z płótna – możemy do niego na całej długości przyszyć jedną z części suwaka z rozpinanej kurtki (to będzie mała wstęga) lub śpiwora (ta już będzie spora). Drugą zaś część przyszyjmy do odpowiedniej wielkości również płóciennego koła (jego obwód musi być dwukrotnie większy od długości paska, z którego zrobiliśmy wstęgę). A potem suwak zapnijmy, tak, jak zapinamy kurtkę czy śpiwór. Co się stanie? Okaże się, że nie będziemy potrafili tego zrobić. Suwak się nie zapnie, choć w kurtce czy w śpiworze działał bez zarzutu. I tak doświadczalnie przekonaliśmy się, że zamknięta powierzchnia nieorientowalna nie mieści się w przestrzeni trójwymiarowej. Nie mieści się nie tylko ta, którą próbowaliśmy zrobić z płótna i suwaka (jest to *płaszczyzna rzutowa* – to jej właśnie własności badał Möbius), lecz każda. Możemy zresztą łatwo spróbować zrobić sobie inną zamkniętą powierzchnię zamkniętą, przyszywając dwie połówki suwaka do dwóch jednakowych wstęg Möbiusa i zapinając ten suwak – też długo będzie szło dobrze, ale potem okaże się, że do końca zapiąć się nie da. Gdyby się udało, mielibyśmy w ręku *butelkę Kleina*. Płaszczyzna rzutowa jest nieorientowalnym odpowiednikiem sfery (czyli powierzchni kuli), a butelka Kleina – torusa (czyli dętki).

W sposób naturalny nasuwa się pytanie, jak to jest z naszą rzeczywistą przestrzenią, czyli Wszechświatem, np. czy jest on orientowalny, czy też nie. Astronomia dziś nie daje nam odpowiedzi na to pytanie. Ale można wobec tego zadać pytanie, wśród jakich możliwości znajduje się odpowiedź. Przy czym możemy nawet zapytać jedynie o to, jakie możliwości dopuszcza dla przestrzeni trójwymiarowej matematyka – o takiej możliwości w matematyce mówi się *rozmaitość*. A więc, jak wyglądają wszystkie możliwe rozmaitości trójwymiarowe – bo przecież trójwymiarowo postrzegamy przestrzeń, w której żyjemy.

Okazuje się, że i na to pytanie odpowiedzi do niedawna nie umiano podać. Pierwszy istotny krok w kierunku pokonania tego problemu zrobił Amerykanin, William Thurston, na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Zamiast odpowiadać po prostu na pytanie o klasyfikację rozmaitości, zapytał o to, jakie geometrie jednorodne (czyli takie, że w każdym punkcie lokalne własności przestrzeni będą takie same) mogą się realizować na danej rozmaitości. Dla wyobrażenia, o co chodzi, powróćmy do przestrzeni dwuwymiarowych, czyli powierzchni i zauważmy, że na sferze geometria jednorodna jest inna niż na płaszczyźnie – np. pole koła o danym promieniu na sferze jest mniejsze niż pole koła o tym samym promieniu na płaszczyźnie. Ale już na walcu geometria jest lokalnie taka sama jak na płaszczyźnie – jeśli wytniemy niewielki kawałek walca, to będzie można go bez kłopotu położyć na płaszczyźnie, bo przecież każdy z nas niejednokrotnie wykonywał operację odwrotną – zwijał walec z płaskiej kartki papieru.

W przypadku dwuwymiarowym możliwe geometrie jednorodne są trzy: lokalnie taka, jak na sferze (nazywa się ją eliptyczną), lokalnie jak na siodle (nazywa się ją hiperboliczną lub Bolyai-Łobaczewskiego) i lokalnie jak na płaszczyźnie (nazywa się ją paraboliczną lub euklidesową). I na każdej rozmaitości można jakąś z tych geometrii określić.

Nie jest to zresztą sprawiedliwe: rozmaitości, na których można określić geometrię eliptyczną, są dwie (sfera i płaszczyzna rzutowa) – rozmaitości, na których można określić geometrię paraboliczną, jest pięć (płaszczyzna, walec, torus, wstęga Möbiusa i butelka Kleina), a rozmaitości, na których można określić geometrię hiperboliczną, jest cała reszta, czyli nieskończenie wiele.

W przypadku trójwymiarowym już od początku jest inaczej – na większości z nich w ogóle żadnej jednorodnej geometrii nie da się określić. Jeśli się już da, to – jak wykazał Thurston – jest to jedna z ośmiu geometrii (nie będziemy tu ich przywoływać). Za ten wynik otrzymał on w 1983 roku – na Międzynarodowym Kongresie Matematyków, Warszawa 1982 – medal Fieldsa, najwyższe matematyczne odznaczenie. Wyraził też przypuszczenie, zwane potem Hipotezą Geometryzacyjną, że każdą rozmaitość trójwymiarową można porozcinać (dwywymiarowymi) sferami i torusami na części, z których każda będzie już pozwalała na wprowadzenie w niej lokalnie jednorodnej geometrii. Pytanie o prawdziwość Hipotezy Geometryzacyjnej uchodziło za jedno z najważniejszych i najtrudniejszych w matematyce. Roztrzygnięte zostało pozytywnie w 2005 roku przez Rosjanina, Grigorija Perelmana, który za ten wynik uzyskał medal Fieldsa na Kongresie w Madrycie w 2006 roku. Mamy więc nadzieję, że powoli zaczniemy opanowywać intelektualnie problem rozmaitości trójwymiarowych, czyli możliwych kształtów Wszechświata.

Podana wyżej lista rozmaitości dwuwymiarowych pozwala odpowiedzieć na pytanie o orientowalność możliwych dwuwymiarowych przestrzeni: spośród tych z geometrią eliptyczną jedna jest orientowalna, jedna nie; spośród tych z geometrią paraboliczną trzy są orientowalne, a dwie nie (każdy z Czytelników tego tekstu powinien wiedzieć już, które są jakie); spośród tych z geometrią hiperboliczną jest nieskończenie wiele tak jednych, jak drugich. A nikogo nie zdziwi, gdy napiszę, że pełnej klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych ze względu na ich orientowalność nie ma.

Aby jednak nie zakończyć opowieści bez jakiegoś kategorycznego stwierdzenia, podajmy informację, jak byłoby z Wszechświatem, gdyby okazał się geometryzowalny bez rozcięć i obowiązywała w nim geometria euklidesowa, czyli ta szkolna – bo to akurat wiadomo. Wówczas byłoby 10 możliwości, że Wszechświat jest orientowalny (w tym 6 byłyby to Wszechświaty ograniczone) i 8 możliwości, że nieorientowalny (w tym cztery ograniczone i cztery – nie).

Oto, do rozważania jakich problemów może doprowadzić proste pytanie,

co zobaczyła Alicja po drugiej stronie lustra?