Twierdzenie Kakutaniego

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

W wielu sytuacjach społecznych, ekonomicznych dokonujemy wyborów uwzględniając wybrane oddziaływania zewnętrzne. Modele matematyczne tego typu zachowań (konfliktów lub współpracy) nazywamy *grami*. Charakteryzują je następujące cechy:

- wynik gry nie zależy jedynie od decyzji pojedynczego gracza, lecz jest określony przez układ decyzji wszystkich uczestników gry,
- decyzje poszczególnych graczy są niezależne i nie wiedzą oni, jakich wyborów dokonali pozostali uczestnicy gry (o efekcie swoich decyzji dowiadują się po pewnym czasie).

Systematyczną analizę tego typu modeli rozpoczęto w latach dwudziestych ubiegłego wieku.

W modelu matematycznym opis postępowania gracza w każdej sytuacji, jaką dopuszcza gra, nazywamy *strategią*. W grze n-osobowej ($n \geqslant 2$) *punktem równowagi* nazywamy taki układ n strategii (po jednej wybranej przez każdego gracza), że każda z nich jest najlepszą odpowiedzią na strategie wybrane przez pozostałych graczy. Zasadnicze problemy teorii gier kryją się w następujących pytaniach:

- czy w danej grze istnieją punkty równowagi?
- jaką strategię powinien wybrać każdy z graczy i jak ją wyznaczyć?

Okazało się, że u podstaw badań nad tymi problemami leży twierdzenie Kakutaniego o punktach stałych.

Shizuo Kakutani urodził się w 1911 roku w Osace (Japonia). Ukończył Tôhoku University, a doktorat z matematyki uzyskał na Uniwersytecie w Princeton (1941). Pracował w Illinois State University, a następnie w Yale University (1949–1982). Interesował się teorią prawdopodobieństwa, teorią ergodyczną i analizą funkcjonalną. Zmarł w 2004 r. w New Haven (Connecticut, USA).

Jego najbardziej znanym wynikiem jest twierdzenie, które z jednej strony stało się podstawowym narzędziem teorii gier, a z drugiej strony dało początek badaniom nad punktami stałymi odwzorowań wielowartościowych.

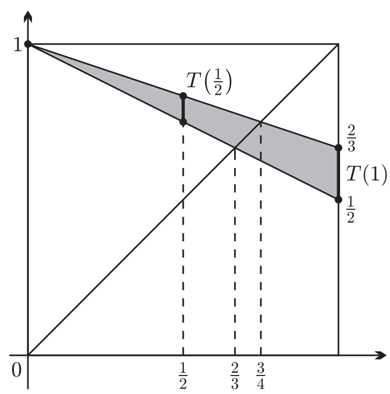
Spróbujemy przybliżyć wynik Kakutaniego w prostym przypadku i wskazać jego konsekwencje.

Relacja, polegająca na przyporządkowaniu każdemu człowiekowi zbioru wszystkich jego znajomych, jest przykładem odwzorowania wielowartościowego określonego na zbiorze mieszkańców Ziemi. Podobnie, przyporządkowanie każdej funkcji całkowalnej f zbioru $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, gdzie $F' = f$, jest przekształceniem wielowartościowym.

Definicja 1. Niech $X \neq \varnothing$, zaś 2^X oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X. Przekształcenie $T : X \to 2^X$ nazywamy *wielowartościowym*, jeśli każdemu $x \in X$ przyporządkowany jest niepusty zbiór $T(x) \subset X$. (Znane ze szkoły funkcje $f : X \to X$ są ich szczególnym przypadkiem.)

Definicja 2. Element $x_0 \in X$ nazywamy *punktem stałym* odwzorowania wielowartościowego T, gdy jest on zawarty w swoim obrazie, tj. $x_0 \in T(x_0)$.

Pojęcia te zilustrujemy następującym przykładem:



Rys. 1

Przykład 1. Niech $X = [0,1]$ i określamy przekształcenie $T : X \to 2^X$ wzorem $T(x) = [1 - \frac{x}{2}, 1 - \frac{x}{3}]$, $x \in [0,1]$. Wówczas, $T(0) = \{1\}$, $T(\frac{1}{2}) = [\frac{3}{4}, \frac{5}{6}]$, $T(1) = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ (rys. 1).

Analizując sytuację przedstawioną na rysunku bez trudu zauważamy, że dla przekształcenia T każdy punkt $x \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ jest jego punktem stałym, np. $x_0 = \frac{3}{4} \in T(\frac{3}{4}) = [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$. $\square$

Przekształcenia wielowartościowe odgrywają istotną rolę w równaniach różniczkowych, teorii optymalizacji, teorii sterowania, matematycznej teorii gier, dla której stały się naturalnym językiem opisu występujących tam zjawisk. Szczególnego waloru użytkowego nabrała teoria punktów stałych przekształceń wielowartościowych. Do jej wyników zaczęto się odwoływać w ekonomii, zarządzaniu, psychologii, socjologii.

Badania nad punktami stałymi przekształceń wielowartościowych zapoczątkował S. Kakutani w 1941 roku. Wskazał on nowy kierunek możliwych uogólnień klasycznego twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Wykazanie rezultatu Kakutaniego w prostym przypadku nie jest szczególnie trudne.

Twierdzenie 1 (przypadek szczególny twierdzenia Kakutaniego) *Każde przekształcenie wielowartościowe* $T : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ *takie, że* $T(x)$ *jest zbiorem niepustym, wypukłym, domkniętym w* $[0,1] \times [0,1]$ *dla każdego* $x \in [0,1]$*, ma punkt stały.*

Dowód. Niech $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ oraz $p_0 \in T(a_0)$, $q_0 \in T(b_0)$. Rekurencyjnie tworzymy cztery ciągi punktów (a_i, b_i, p_i, q_i), których elementy spełniają warunki:

(1) $0 \leqslant a_i < b_i \leqslant 1$,
(2) $b_i - a_i \leqslant 2^{-i}$,
(3) $p_i \in T(a_i)$,
(4) $q_i \in T(b_i)$,
(5) $p_i \geqslant a_i$,
(6) $q_i \leqslant b_1$, dla $i = 0, 1, 2, \ldots$

Punkty a_0, b_0, p_0, q_0 są poprawnie wybrane. Załóżmy, że wybraliśmy już punkty a_k, b_k, p_k, q_k, $k \geqslant 0$, które spełniają warunki (1) – (6). Opiszemy jak można wybrać punkty $a_{k+1}, b_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}$.

Niech $m = \frac{1}{2}(a_k + b_k) \in [0,1]$.

Przypadek 1. Jeśli istnieje $r \in T(m)$ takie, że $r > m$, to przyjmujemy: $a_{k+1} = m, b_{k+1} = b_k, p_{k+1} = r, q_{k+1} = q_k$. Tak wybrane punkty spełniają warunki (1) – (6). W szczególności:

(ad (3)) $p_{k+1} = r \in T(m) = T(a_{k+1})$,
(ad (4)) $q_{k+1} = q_k \in T(b_k) = T(b_{k+1})$,
(ad (5)) $p_{k+1} = r \geqslant m = a_{k+1}$,
(ad (6)) $q_{k+1} = q_k \leqslant b_k = b_{k+1}$.

Przypadek 2. W przeciwnym wypadku, ponieważ $T(m) \neq \varnothing$, więc istnieje $s \in T(m)$ takie, że $s \leqslant m$. Przyjmujemy wówczas:
$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = s, p_{k+1} = p_k, q_{k+1} = s$. Również w tym wypadku łatwo można sprawdzić, że spełniają one warunki (1) – (6).

Mamy zatem indukcyjnie wygenerowany ciąg $(a_i, b_i, p_i, q_i)_{i \geqslant 0}$. Ponieważ „kostka" $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc twierdzenie Bolzano–Weierstrassa gwarantuje istnienie w tym ciągu podciągu zbieżnego

$$(a_{i_j}, b_{i_j}, p_{i_j}, q_{i_j}) \xrightarrow{j} (a^*, b^*, p^*, q^*) \in [0,1]^4.$$

Z założenia każdy zbiór $T(x)$ jest domknięty (w zbiorze $[0,1] \times [0,1]$), więc $p^* \in T(a^*)$, $q^* \in T(b^*)$. Z warunków (5) i (6) mamy: $p^* \geqslant a^*$, $q^* \leqslant b^*$, a z warunku (2) wynika, że $a^* = b^*$.

Niech $x = a^*$. Wtedy,

$$q^* \leqslant x \leqslant p^* \text{ i } p^* \in T(x) \text{ i } q^* \in T(x).$$

Jeżeli $p^* = q^*$, to $x = p^*$ i oczywiście $x \in T(x)$.

Jeżeli q^*, p^*, to wobec wypukłości zbioru $T(x)$ i przedstawienia $x = \frac{x-q^*}{p^*-q^*} \cdot p^* + \left(1 - \frac{x-q^*}{p^*-q^*}\right) \cdot q^*$, mamy $x \in T(x)$, co kończy uzasadnienie. $\square$

Ogólniejsza wersja tego twierdzenia jest następująca:

Twierdzenie 2 (S. Kakutani, 1941) *Niech X będzie niepustym, domkniętym, ograniczonym, wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$), $T : X \to 2^X$ będzie przekształceniem wielowartościowym na X takim, że $T(x)$ jest zbiorem niepustym, wypukłym i $\{(x, y) : y \in T(x)\}$ jest zbiorem domkniętym (tj. jeśli $x_n \to x$ w X, $y_n \in T(x_n)$ i $y_n \to y$, to $y \in T(x)$) dla każdego $x \in X$. Wtedy przekształcenie T ma punkt stały.* □

Zauważmy, że wszystkie założenia tego twierdzenia są istotne. W szczególności niezbędna jest wypukłość zbiorów $T(x)$. Ilustruje to następujący przykład nawiązujący do twierdzenia 1.

Przykład 2. Dla przekształcenia $T : [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ opisanego wzorem

$$T(x) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{x}{2}, \dfrac{3}{4}\right], & \text{dla } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right\}, & \text{dla } x = \dfrac{1}{2}, \\ \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\right], & \text{dla } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

zbiór $T(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ nie jest wypukły i przekształcenie T nie ma punktu stałego. □

Shizuo Kakutani odkrył omawiane twierdzenie pracując nad uproszczeniem dowodu twierdzenia minimaksowego Johna von Neumanna.

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym, domkniętym, ograniczonym, wypukłym zbiorem strategii gracza P, a $N \subset \mathbb{R}^n$ niepustym, domkniętym, ograniczonym, wypukłym zbiorem strategii gracza Q. Funkcja rzeczywista $f(x, y)$ zdefiniowana dla wszystkich $x \in M$, $y \in N$, liniowa ze względu na każdą zmienną, jest zwana *funkcją wypłaty.* Obaj gracze znają funkcję f, zbiory M, N, a gra polega na wybraniu przez gracza P strategii $x \in M$, przez gracza Q strategii $y \in N$, przy czym gracze P i Q nie wiedzą o wyborze przeciwnika. Rozstrzygnięcie gry następuje po jednoczesnym ujawnieniu przez graczy swoich wyborów i wypłacie zgodnie z zadaną funkcją f.

Jeżeli gracz P chce zmaksymalizować funkcję $f(x, y)$ wybierając $x \in M$, a gracz Q zminimalizować funkcję $f(x, y)$ wybierając $y \in N$ (cele graczy P i Q są przeciwstawne, każdy z nich dąży do zwycięstwa) to powstaje pytanie: czy istnieje para strategii (X, Y) taka, że

$$(*) \qquad f(x, Y) \leqslant f(X, Y) \leqslant f(X, y) \text{ dla każdego } x \in M,\ y \in N.$$

Gdyby taka strategia istniała, to żaden z graczy P i Q nie byłby zainteresowany jej zmianą (bo na jednostronnej zmianie nic by nie zyskał, a mógłby stracić).

Relację $(*)$ możemy zapisać następująco

$$(**) \qquad f(X, Y) = \min_{y \in N} f(X, y) = \max_{x \in M} f(x, Y).$$

Zatem (X, Y) jest punktem stałym (o ile taki punkt istnieje) przekształcenia zdefiniowanego następująco:

dla każdego y, gracz P wybiera $x(y)$ (wybór ten nie musi być jednoznaczny) takie, że

$$(***) \qquad f(x(y), y) = \max_{x \in M} f(x, y)$$

i dla każdego x, gracz Q wybiera $y(x)$ (wybór ten nie musi być jednoznaczny) takie, że

$$(****) \qquad f(x, y(x)) = \min_{y \in N} f(x, y).$$

Tak opisane przekształcenie wielowartościowe $T : M \times N \to 2^{M \times N}$ dane wzorem

$$(x, y) \to \{(x(y), y(x)) : \text{ spełnione są warunki } (***) \text{ i } (****)\}$$

spełnia założenia twierdzenia Kakutaniego. W szczególności, liniowość funkcji f ze względu na każdą zmienną gwarantuje, że zbiór $T(x, y)$ jest wypukły. Istnieje zatem punkt stały (X, Y) przekształcenia T, czyli para strategii (X, Y) spełniających warunek $(**)$, a więc i warunek $(*)$.

Strategie (X, Y) spełniające warunek $(*)$ zwane są *równowagą Nasha* rozważanej gry.

Dowiedliśmy w ten sposób prostej wersji fundamentalnego twierdzenia teorii gier:

Twierdzenie 3. *Jeżeli M i N są niepustymi, domkniętymi, ograniczonymi, wypukłymi podzbiorami skończenie wymiarowych przestrzeni euklidesowych i $f : M \times N \to \mathbb{R}$ jest funkcją liniową ze względu na każdą zmienną, to istnieje punkt $(X, Y) \in M \times N$ taki, że spełniony jest warunek*

$$f(X, Y) = \min_{y \in N} f(X, y) = \max_{x \in M} f(x, Y).$$

Wniosek 1 (twierdzenie minimaksowe von Neumanna, 1928). *Przy założeniach twierdzenia 3 istnieje punkt $(X, Y) \in M \times N$ taki, że*

$$f(X, Y) = \min_{y \in N}\{\max_{x \in M} f(x, y)\} = \max_{x \in M}\{\min_{y \in N} f(x, y)\}.$$

Dowód. Niech $g(x) = \min_{y \in N} f(x, y)$, $h(y) = \max_{x \in M} f(x, y)$. Dla wszystkich $(x, y) \in M \times N$,

$$g(x) \leqslant f(x, y) \leqslant h(y),$$

więc

$$\max_{x \in M} g(x) \leqslant \min_{y \in N} h(y).$$

Na podstawie twierdzenia 3 istnieje punkt $(X, Y) \in M \times N$ taki, że

$$g(X) = f(X, Y) = h(Y),$$

więc

$$\max_{x \in M} g(x) \geqslant g(X) = f(X, Y) = h(Y) \geqslant \min_{y \in N} h(y) \geqslant \max_{x \in M} g(x),$$

skąd wynika teza. $\square$

Istnieje wiele powodów, dla których nawet w grach dwuosobowych strategia minimaksowa może nie być najlepszą z możliwych. Jednym z nich są emocje graczy (uczucia, zaufanie, podejrzliwość, lojalność, nielojalność, strach), które nieodłącznie nam towarzyszą i mają wpływ na podejmowane przez nas decyzje. Dobrze jest to widoczne w sytuacjach wyzwalających duże emocje, np. na giełdzie, gdy panuje na niej bessa. Wówczas wielu inwestorów podejmuje swoje decyzje nie pod wpływem analizy wyników poszczególnych spółek, a pod wpływem emocji, czy zachowań innych graczy.

Jednak w wielu sytuacjach strategia minimaksowa pozwala zachować zadowalający poziom bezpieczeństwa rozgrywki i stanowi punkt wyjścia do dalszych poszukiwań. Sytuację tę zilustrujemy następującym przykładem.

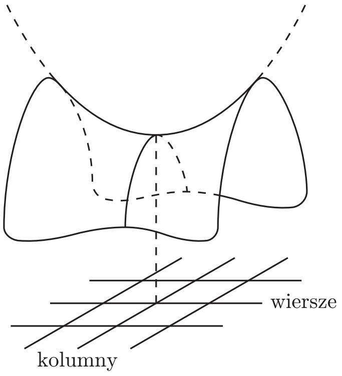
Przykład 3 (dylemat więźnia, 1950). Dwaj gangsterzy, nazwijmy ich: gracz I oraz gracz II, zostali zatrzymani przez policję podczas napadu na bank. Policja o każdym z nich ma wiedzę operacyjną na temat przestępstw, jakich się dopuścili, lecz nie może uzyskać wystarczających dowodów dla sądu. Prokurator zatrzymał ich w osobnych celach (gracze nie mogą ze sobą współpracować!) i złożył każdemu z nich identyczną ofertę:

1° jeśli przyznasz się do winy i oskarżysz drugiego zatrzymanego, wtedy jako świadek koronny wyjdziesz na wolność, a on dostanie 10 lat,
2° jeśli ty się przyznasz i on się przyzna, to świadek koronny nie jest nam potrzebny, ale zważywszy na współpracę, każdy z was dostanie po 6 lat,
3° jeśli ty się nie przyznasz, a on ciebie oskarży, to ty dostaniesz 10 lat, a on wyjdzie na wolność,
4° jeśli obaj się nie przyznacie, to każdy z was dostanie po dwa lata za napad na bank.

Określimy teraz dla gracza I funkcję wypłaty, którą przedstawimy w postaci tablicy (macierzy). Każda komórka będzie określała, o ile lat krócej będzie przebywać w więzieniu gracz I, gdy obaj gracze będą podejmować wszystkie możliwe decyzje. Ponieważ każdy z graczy ma dwie możliwości: NW (nie podejmuje współpracy), W (podejmuje współpracę), więc tabela ma następującą postać:

Gracz II / Gracz I	NW	W
NW	8	0
W	10	4

Dla gracza II tabela wypłaty jest macierzą transponowaną.



Rys. 2

Patrząc na tabelę, widzimy od razu, że bez względu na to, co wybierze gracz II, gracz I powinien wybrać strategię podjęcia współpracy, gdyż w każdym przypadku osiąga większe korzyści niż gracz II. Taki sam wynik otrzymamy stosując wskazanie zawarte w twierdzeniu minimaksowym. Szukamy *punktów siodłowych* (o ile takie istnieją), w których w wierszu przyjmowana jest wartość najmiejsza, a jednocześnie w kolumnie wartość największa (rys. 2).

W przypadku rozważanego dylematu więźnia sugeruje to, że optymalną strategią dla obydwu graczy jest podjęcie współpracy z prokuratorem (W,W) – każdy gangster dostaje 6 lat więzienia (każdy zyskuje 4 lata wolności). Podjęcie takiej decyzji nie jest jednak dla gracza bezproblemowe – pociąga za sobą utratę honoru (gangster staje się „kapusiem") i naraża go, lub jego najbliższe otoczenie, na odwet.

W zmodyfikowanym modelu tej gry, gdy gangsterzy mogą ze sobą współpracować, korzystniejsza jest dla nich strategia (NW,NW) – każdy z gangsterów dostanie tylko 2 lata więzienia (każdy zyskuje 8 lat wolności). Problem tkwi w tym, że ta strategia wymaga od obydwu graczy wzajemnego zaufania, co jako czynnik emocjonalny może być trudne do uzyskania i w ocenie każdego gracza może być obarczone zbyt dużym ryzykiem.

Zaprezentowany przykład i jego analiza są istotne, gdyż wiele typowych sytuacji społecznych ma strukturę „dylematu więźnia" (np. konflikty w grupie przyjaciół, konkurencja cenowa sklepów, wyścig zbrojeń). Pokazuje on jednocześnie, jak duże sprzeczości tkwią pomiędzy interesami indywidualnymi, a interesem grupowym.

Czy kiedyś będziemy potrafili powiedzieć, jakie zachowanie jest racjonalne i czy matematyka może być w takiej ocenie pomocna?