Jak wygrać z szulerem – czyli o pewnej nierówności dla martyngałów oraz funkcji biwypukłych

Adam OSĘKOWSKI, Warszawa

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie optymalnej strategii w pewnej losowej grze.

1. Opis gry

Załóżmy, iż udajemy się do (bardzo nietypowego) kasyna i naszym celem jest zdobycie kapitału λ. Z pewnych technicznych przyczyn załóżmy, że $\lambda > 2$. Przyjmujemy, iż na początku nasz kapitał wynosi 0 i kasyno zgadza się udzielać nam nieskończonego kredytu. W pojedynczej grze najpierw ustalamy dwie liczby $a < 0 < b$ (które mogą być różne w różnych grach), a następnie maszyna losująca wybiera jedną z nich. Jeśli jest to a – tracimy $-a$, natomiast gdy wylosowano b, zyskujemy b. Dodatkowo przyjmujemy, że każda gra jest sprawiedliwa, tzn. średnia wygrana w każdej grze wynosi 0. Oznacza to, iż prawdopodobieństwa wylosowania liczb a, b wynoszą $b/(b-a)$, $-a/(b-a)$, odpowiednio. Wreszcie, zakładamy, że wyniki kolejnych gier są niezależne oraz że nie ma ograniczeń na liczbę gier. Oznaczmy przez S_n nasz kapitał po n-tej grze, a X_n – naszą wygraną w n-tej grze, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tak więc mamy

$$(1) \qquad S_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Bez żadnych dodatkowych ograniczeń kasyno skazane jest na bankructwo, a my na zwycięstwo. Istotnie, na przykład w każdej grze możemy wziąć $a = -1$, $b = 1$; wówczas nasz kapitał jest modelowany poprzez symetryczne błądzenie losowe: ciąg (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. Jak wiadomo (por. [2]), takie błądzenie z prawdopodobieństwem 1 dotrze kiedyś do każdej z góry ustalonej liczby całkowitej. Zatem w szczególności nasz cel – poziom λ – zostanie kiedyś osiągnięty.

Aby uniknąć tego niebezpieczeństwa, kasyno wprowadza pewne ograniczenia. Każdemu graczowi zostaje przydzielony pracownik kasyna, którego będziemy nazywać *szulerem.* Osoba ta uczestniczy we wszystkich naszych grach na następujących warunkach: w każdej grze, oprócz doboru liczb a, b musimy zdecydować, czy szuler będzie grać razem z nami, czy też przeciwko nam (tzn. czy jego wygrana będzie równa naszej, czy też będzie przeciwna do naszej). Kluczowym założeniem, narzuconym przez kasyno, jest, aby dla każdego n kapitał szulera po n-tej grze (oznaczany dalej przez Y_n) był zawarty w przedziale $[-1, 1]$. W szczególności oznacza to też, iż szuler, posiadając np. kapitał $0,9$, nie godzi się uczestniczyć w grze, w której mógłby wygrać $0,2$, gdyż jego kapitał przekroczyłby dozwolony poziom. Dodatkowo przyjmujemy $Y_0 = 0$.

Powyższe warunki można bardzo łatwo opisać matematycznie. Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$, n-ta gra wyznaczona jest przez trójkę liczb $a_n < 0$, $b_n > 0$ oraz $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$: przyjmujemy, że $\varepsilon_n = 1$, jeśli szuler gra razem z nami oraz $\varepsilon_n = -1$, jeśli gra przeciwko nam. Nasz kapitał po n grach jest określony równościami (1), a kapitał szulera wynosi

$$Y_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad Y_n = \varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \ldots + \varepsilon_n X_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Obserwujemy więc proces (S_n, Y_n) przyjmujący wartości w zbiorze $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ i naszym celem jest „przeprowadzić” go do zbioru $[\lambda, \infty) \times [-1, 1]$. Ściślej, interesuje nas

$$\sup \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda \quad \text{dla pewnego } n),$$

gdzie supremum wzięte jest po wszystkich ciągach trójek $((a_n, b_n, \varepsilon_n))$. Ponadto, rzecz jasna, interesują nas te ciągi, które to supremum wybijają (bądź asymptotycznie wybijają): zawierają one opis optymalnej strategii.

2. Diagonalnie wklęsła funkcja specjalna

Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XL Szkole Matematyki Poglądowej, *Matematyczne Obrazki*, styczeń 2008.

Kluczem do rozwiązania powyższego problemu jest rozważenie ogólniejszej sytuacji, w której nasz kapitał początkowy wynosi $s \in \mathbb{R}$ oraz $Y_0 = y \in [-1, 1]$.

Niech $V : \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$V(s,y) = \sup \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda \quad \text{dla pewnego } n | (S_0, Y_0) = (s,y)),$$

gdzie, podobnie jak wyżej, supremum jest wzięte po wszystkich ciągach trójek $((a_n, b_n, \varepsilon_n))$. Funkcja V posiada wiele interesujących własności. Są one zebrane w poniższym lemacie.

Lemat 1. (i) $V(s,-1) = V(s,1) = 0$ *dla* $s < \lambda$*;*

(ii) $1 \geqslant V(\lambda, y) \geqslant 1_{\{s \geqslant \lambda\}}$*;*

(iii) V *jest funkcją diagonalnie wklęsłą: dla ustalonego punktu* $(s,y) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$ *oraz* $\varepsilon \in \{-1,1\}$*, funkcja* $t \mapsto V(s+t, y+\varepsilon t)$ (*określona dla takich* t*, że* $y + \varepsilon t \in [-1,1]$) *jest wklęsła.*

Dowód: (i) Jest to jasne. Jeśli kapitał szulera wynosi -1 bądź 1, wówczas nasz pobyt w kasynie jest zakończony: jedynym (dopuszczalnym) ciągiem gier jest ciąg zerowy $(0,0,\pm 1)$, dla którego prawdopodobieństwo osiągnięcia kapitału λ wynosi 0.

(ii) Te nierówności także są oczywiste. Lewe oszacowanie wynika natychmiast z tego, iż prawdopodobieństwo jest liczbą nie przekraczającą 1, natomiast prawe wynika z następującej obserwacji: jeśli $s < \lambda$, to oczywiście $V \geqslant 0$, jako supremum z liczb nieujemnych, jeśli zaś $s \geqslant \lambda$, to $V = 1$: wystarczy od razu wycofać się z gry.

(iii) Ustalmy $(s,y) \in \mathbb{R}$ i ustalmy „dopuszczalną" grę, $(a_1, b_1, \varepsilon_1)$. Niech, dla ustalonego $\delta > 0$, $A^l = ((a_n^l, b_n^l, \varepsilon_n^l))$, $A^r = ((a_n^r, b_n^r, \varepsilon_n^r))$ oznaczają δ-optymalne ciągi gier dla punktów startowych $(s+a, y+\varepsilon_1 a)$, $(s+b, y+\varepsilon_1 b)$, odpowiednio. Ściślej,

$$V(s+a, y+\varepsilon_1 a) \leqslant \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda \text{ dla pewnego } n | (S_0, Y_0) = (s+a, y+\varepsilon_1 a)) + \delta$$

oraz

$$V(s+b, y+\varepsilon_1 b) \leqslant \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda \text{ dla pewnego } n | (S_0, Y_0) = (s+b, y+\varepsilon_1 b)) + \delta,$$

gdzie procesy (S_n) występujące pod prawdopodobieństwami po prawych stronach są opisane przez ciągi A^l, A^r.

Wówczas „sklejamy" te strategie, w zależności od tego, co się stało w pierwszej grze. Formalnie,

$$(a_n, b_n, \varepsilon_n) = \begin{cases} (a_{n-1}^l, b_{n-1}^l, \varepsilon_{n-1}^l) & \text{jeśli } X_1 = a, \\ (a_{n-1}^r, b_{n-1}^r, \varepsilon_{n-1}^r) & \text{jeśli } X_1 = b, \end{cases}$$

$n = 2, 3, \ldots$. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite widzimy, iż ten ciąg gier daje prawdopodobieństwo sukcesu

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda \text{ dla pewnego } n | (S_0, Y_0) = (s+a, y+\varepsilon_1 a)) \frac{b_1}{b_1 - a_1} +$$

$$+ \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda \text{ dla pewnego } n | (S_0, Y_0) = (s+b, y+\varepsilon_1 b)) \frac{-a_1}{b_1 - a_1} \geqslant$$

$$\geqslant V(s+a, y+\varepsilon_1 a) \frac{b_1}{b_1 - a_1} + V(s+b, y+\varepsilon_1 b) \frac{-a_1}{b_1 - a_1} - 2\delta.kern2cm$$

Ale z drugiej strony, strategia ta nie musi być optymalna; stąd dostajemy oszacowanie

$$V(s,y) \geqslant V(s+a, y+\varepsilon_1 a) \frac{b_1}{b_1 - a_1} + V(s+b, y+\varepsilon_1 b) \frac{-a_1}{b_1 - a_1} - 2\delta.$$

Z dowolności δ wnioskujemy, iż

$$V(s,y) \geqslant V(s+a, y+\varepsilon_1 a) \frac{b_1}{b_1 - a_1} + V(s+b, y+\varepsilon_1 b) \frac{-a_1}{b_1 - a_1},$$

a ponieważ a_1, b_1 są dowolne – muszą tylko spełniać $y + \varepsilon_1 a_1$, $y + \varepsilon_1 b_1 \in [-1,1]$ – powyższa nierówność pociąga za sobą diagonalną wklęsłość funkcji V. □

Okazuje się, iż wśród wszystkich funkcji $W : \mathbb{R} \times [-1,1]$ spełniających warunki (ii) i (iii) powyższego lematu (z V zastąpionym przez W) istnieje najmniejsza, i jest nią funkcja V. Istotnie, niech W będzie taką funkcją. Mamy, korzystając z (ii),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda|(S_0,Y_0)=(s,y)) = \mathbb{E}(1_{\{|S_n|\geqslant\lambda\}}|(S_0,Y_0)=(s,y)) \leqslant \\ \leqslant \mathbb{E}(W(S_n,Y_n)|(S_0,Y_0)=(s,y)).\end{aligned} \tag{2}$$

Teraz, ponieważ $(S_n,Y_n) = (S_{n-1}+X_n, Y_{n-1}+\varepsilon_{n-1}X_n)$, warunek (iii) oraz nierówność Jensena pozwalają nam napisać

$$\mathbb{E}(W(S_n,Y_n)|(S_0,Y_0)=(s,y)) \leqslant \mathbb{E}(W(S_{n-1},Y_{n-1})|(S_0,Y_0)=(s,y)). \tag{3}$$

Iterując tę nierówność, dostajemy

$$\mathbb{E}(W(S_n,Y_n)|(S_0,Y_0)=(s,y)) \leqslant \mathbb{E}(W(S_0,Y_0)|(S_0,Y_0)=(s,y)) = W(s,y).$$

Stąd

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda|(S_0,Y_0)=(s,y)) \leqslant W(s,y),$$

a zatem, zbiegając z $n \to \infty$ i biorąc supremum po wszystkich możliwych grach, dostajemy nierówność $V \leqslant W$.

Dostaliśmy więc analityczne sformułowanie wyjściowego problemu: wyznaczyć najmniejszą funkcję V spełniającą warunki (ii) oraz (iii). Jak już wiemy, spełnia ona także warunek (i).

3. Rozwiązanie

Zacznijmy od obserwacji, iż w przypadku ciągu optymalnych gier (o ile w ogóle istnieją – ale tym się na razie nie przejmujmy) powinniśmy otrzymać równości w (2) oraz (3). Pierwsze z tych oszacowań daje nam warunek $V(s,y)=1$ dla $s \geqslant \lambda$, $y \in [-1,1]$. Drugie z nich niesie ze sobą znacznie istotniejszą informację. Równość w nierówności Jensena przy nietrywialnych wagach ma miejsce, gdy funkcja jest liniowa. To prowadzi nas do następującego wniosku.

Dla każdego (s,y), co najmniej jedna z funkcji
$$t \mapsto V(s+t,y+t),\ t \mapsto V(s+t,y-t)$$
jest liniowa w pewnym otoczeniu 0.

Ponadto zauważmy, iż bezpośrednio z definicji V wynika, iż mamy $V(s,y)=V(s,-y)$: istotnie, w ciągu gier „wybijających” supremum definiujące $V(s,y)$ wystarczy zmienić znaki wszystkich ε_n, aby otrzymać ciąg „wybijający” $V(s,-y)$.

W jaki sposób szukać funkcji V? Pewne intuicyjne rozważania prowadzą do następujących hipotez: niech δ będzie (małą) liczbą dodatnią.

1° Jeśli proces (S_n,Y_n) znajduje się w punkcie (s,y), $y>0$, $s+y<\lambda-1$, to optymalną grą jest $(y-1,y,-1)$: wówczas punkt (s,y) „wędruje” bądź do punktu $(s+y-1,1)$, bądź do $(s+y,0)$.
2° Jeśli proces (S_n,Y_n) znajduje się w punkcie $(s,0)$, $s<\lambda$, to optymalną grą jest $(-1,\delta,1)$, gdzie δ jest pewną ustaloną małą liczbą dodatnią. Wówczas punkt $(s,0)$ „wędruje” bądź do punktu $(s-1,-1)$, bądź do $(s+\delta,\delta)$.
3° Jeśli proces (S_n,Y_n) znajduje się w punkcie (s,y), $s+y \geqslant \lambda-1$, $s-y \leqslant \lambda-1$, to optymalną grą jest taka gra, w której punkt (s,y) „wędruje” bądź na prostą $y=1$, bądź na prostą $x-y=\lambda-1$.
4° Jeśli proces (S_n,Y_n) znajduje się w punkcie (s,y), $s+y=\lambda-1$, to optymalną grą jest taka gra, w której punkt (s,y) „wędruje” bądź do punktu $(\lambda,1)$, bądź do punktu $(\lambda-2,-1)$.
5° Wreszcie, jeśli proces (S_n,Y_n) znajduje się w punkcie (s,y), $s-y>\lambda-1$ $s<\lambda$, to optymalną grą jest taka gra, w której punkt (s,y) „wędruje” bądź na prostą $x=\lambda$, bądź na prostą $x-y=\lambda-1$.

Powyższe hipotezy pozwalają wyznaczyć kandydata na funkcję V. Jest to funkcja dana wzorem

$$V(s,y) = \begin{cases} (1-|y|)e^{s+|y|-\lambda+1}/2 & \text{jeśli } s < \lambda - 1 - |y|, \\ \dfrac{(1-|y|)(3+s+|y|-\lambda)}{2(\lambda - s - |y| + 1)} & \text{jeśli } \lambda - 1 - |y| \leqslant s < \lambda - 1 + |y|, \\ 1 - (\lambda - s)/2 & \text{jeśli } \lambda - 1 + |y| \leqslant s < \lambda, \\ 1 & \text{jeśli } s > \lambda. \end{cases}.$$

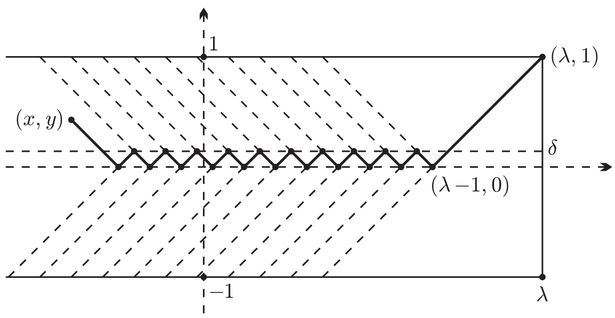
Aby zilustrować, w jaki sposób dochodzimy do powyższego wzoru, weźmy punkt (s,y) taki, że $s<0$, $y>0$ i ustalmy (dużą) liczbę całkowitą dodatnią N. Niech

$$\delta = (\lambda - 1 - s - y)/(2N). \tag{4}$$

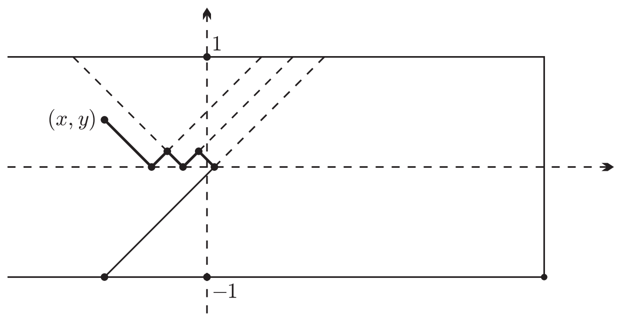
Ponadto, niech $p_0 = 1 - y$,

$$p_{2n+1} = p_{2n} \cdot \frac{1}{1+\delta}, \qquad p_{2n+2} = p_{2n+1} \cdot (1-\delta),$$

dla $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$.



Rys. 1. „Sprzyjająca” trajektoria procesu $((S_n, Y_n))$: kończymy w punkcie $(\lambda, 1)$.



Rys. 2. „Niesprzyjająca” trajektoria. Po sześciu grach kapitał szulera wynosi -1.

Zauważmy, iż gdy poruszamy się według zasad opisanych w hipotezach 1° oraz 2° powyżej, prawdopodobieństwo tego, że startując z punktu (s,y) dojdziemy do $(\lambda-1,0)$, wynosi p_{2N} (por. rys. 1 i rys 2.). Stosując teraz hipotezę 4° widzimy, iż dochodzimy do punktu $(\lambda,1)$ z prawdopodobieństwem $1/2p_{2N}$, co jest równe

$$\frac{1-y}{2}(1-\delta)^N \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^N.$$

Wykorzystując teraz równość (4) i zbiegając z δ do 0, widzimy, iż prawdopodobieństwo zbiega do $V(s,y)$. Dla innych punktów początkowych (s,y) postępujemy analogicznie.

Aby dowieść, że V jest funkcją której szukamy, wystarczy tylko wykazać, iż spełnia ona warunki (ii) i (iii) Lematu 1; istotnie, jej minimalność wynika z faktu, iż została ona zbudowana w oparciu o konkretny ciąg gier. Sprawdzenie wklęsłości funkcji $t \mapsto V(s+t, y+t)$, $t \mapsto V(s+t, y-t)$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Istnieje wiele innych ciekawych modyfikacji i uogólnień powyższego problemu. Na przykład, można wprowadzić dodatkowe ograniczenie, iż kasyno udziela nam kredytu dopóki nasze zadłużenie nie przekroczy μ. Innym wariantem jest reguła, iż szuler, po dotarciu ze swoim kapitałem do poziomu ± 1, zgadza się wyzerować swoje konto w zamian za zmniejszenie naszego kapitału o pewną wielkość, itp. Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do pracy [1], która traktuje o nierównościach dla pewnych szczególnych procesów, *martyngałów* – modelujących gry sprawiedliwe. Z takimi grami mieliśmy do czynienia w tym artykule.

Literatura

[1] D. L. Burkholder, *Explorations in martingale theory and its applications*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989, 1–66, Lecture Notes in Math., 1464, Springer, Berlin, 1991.

[2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii rachunku prawdopodobieństwa*,