Jest to skrót odczytu wygłoszonego na XXXIX Szkole Matematyki Poglądowej *Domniemanie – Hipoteza – Dowód*, sierpień 2007.

Kłopotliwe domniemania

Jarosław GÓRNICKI, Rzeszów

Oto dwa epizody ukazujące meandry matematycznej twórczości.

Epizod I – Magia czasopisma

W 1949 roku na łamach *The American Mathematical Monthly* ukazał się artykuł B.H. Arnolda pod tytułem „A topological proof of the fundamental theorem of algebra", [1]. Pomysł pracy był bardzo atrakcyjny. Autor zamierzał podać krótki (liczący jedynie 22 linie tekstu) dowód zasadniczego twierdzenia algebry w oparciu o twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.

Przypomnijmy treść tych ważnych rezultatów:

Twierdzenie 1 (zasadnicze twierdzenie algebry, C. Gauss, 1799, [2]). *Każdy wielomian zespolony $f(z)$ nie równy tożsamościowo stałej posiada miejsce zerowe.*

Twierdzenie 2 (L.E.J. Brouwer, 1912, [3]) *Każde ciągłe przekształcenie koła $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$ w siebie ma punkt stały.*

Pomysł Arnolda był następujący: mając dany wielomian

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

($n \geqslant 1$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$) określamy koło domknięte

$$K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\} \quad \text{gdzie} \quad R = 2 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \geqslant 2.$$

Liczbę zespoloną przedstawiamy w postaci $z = re^{i\Theta}$, $0 \leqslant \Theta < 2\pi$, $r \geqslant 0$ i definiujemy funkcję $g : K_R \to K_R$

$$g(z) = \begin{cases} z - \dfrac{f(z)}{R^{n-1}e^{i(n-1)\Theta r}} & \text{dla } |z| \leqslant 1, \\ z - \dfrac{f(z)}{R^{n-1}z^{n-1}} & \text{dla } 1 \leqslant |z| \leqslant R. \end{cases}$$

Jeżeli g jest ciągła, to na mocy twierdzenia Brouwera istnieje punkt $z_0 \in K_R$ taki, że $g(z_0) = z_0$, czyli $f(z_0) = 0$.

Subtelny błąd w tej pracy, nieciągłość funkcji g w punktach odcinka $z = r$, $0 < r < 1$, gdy $n > 1$, zauważył J. Oxtoby.

Niech $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$. Elementy ciągu $z_k = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(2\pi - \frac{\pi}{k})}$, $k = 1, 2, \ldots$, należą do okręgu $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $|z_k - z_0| \to 0$, gdy $k \to +\infty$. Dla funkcji $h_n(z) = e^{i(n-1)\Theta r}$, $(0 \leqslant \Theta < 2\pi)$, przy $n > 1$,

$$\lim_{k\to+\infty} h_n(z_k) = \lim_{k\to+\infty} e^{i(n-1)(2\pi - \frac{\pi}{k})\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= e^{i(n-1)\pi\sqrt{2}} = \cos((n-1)\pi\sqrt{2}) + i\sin((n-1)\pi\sqrt{2}) \neq h_n(z_0) = e^0.$$

Zatem dla $n > 1$ funkcja h_n nie jest ciągła w punkcie $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a w konsekwencji nie jest ciągła funkcja g.

B.H. Arnold i I. Niven (ten ostatni próbował uogólnić wynik Arnolda) opublikowali w 1951 r. na łamach *The American Mathematical Monthly* [3] krótką (bo zaledwie 6 linjkową) notkę stwierdzającą, że praca Arnolda zawiera fundamentalny błąd.

Mimo to praca Arnolda nie odeszła w zapomnienie i nadal jest przywoływana. Kłopot z nią polega na tym, że jest ona bardzo sugestywna, a błąd w niej ukryty jest trudny do zauważenia. Nie pomaga nawet to, że w 1952 roku M.K. Fort, Jr. [4] podał poprawny dowód zasadniczego twierdzenia algebry w oparciu o twierdzenie Brouwera o punkcie stałym (ta praca jest znacznie dłuższa).

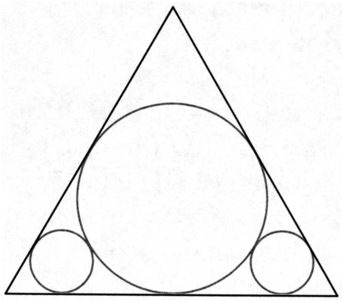
Bibliografia

1. Arnold B.H., A topological proof of the fundamental theorem of algebra, *Amer. Math. Monthly* 56 (1949), 465–466.
2. Sierpiński W., *Zasady algebry wyższej*, Monografie Matematyczne t. 11, Warszawa, Wrocław 1946.
3. Arnold B.H., Niven I., A correction, *Amer. Math. Monthly* 58 (1951), 104.
4. Fort M.K., Jr., Some properties of continuous functions, *Amer. Math. Monthly* 59 (1952), 372–375.

Epizod II – Zauroczenie

W 1803 roku G.F. Malfatti zainspirowany pewnym praktycznym zagadnieniem postawił następujący problem [2]:

Problem Malfattiego. *W trójkąt wpisać trzy koła (o rozłącznych wnętrzach), których łączna powierzchnia jest największa.*



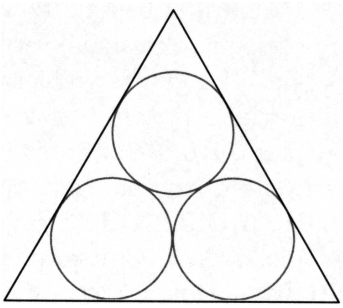
Rys. 1

Prowadząc algebraiczne i geometryczna rozważania Malfatti doszedł do wniosku, że rozwiązaniem tego problemu są trzy okręgi, z których każdy jest styczny do dwóch pozostałych i jednocześnie do dwóch boków trójkąta.

Matematycy współcześni Malfattiemu nie zakwestionowali tej propozycji, a zgodnie z ówczesnymi tendencjami swoją uwagę skierowali na wskazanie jak propozycję Malfattiego zrealizować przy pomocy cyrkla i linijki.
Wśród entuzjastów geometrii popularność zyskało następujące zadanie:

Zadanie. *Przy pomocy cyrkla i linijki w trójkąt wpisać trzy okręgi styczne do siebie i do boków danego trójkąta.*

To trudne zadanie (proszę je zrobić !) cieszyło się dużą popularnością. Rozwiązali je matematycy tej miary co A. Cayley, J. Steiner, a ten ostatni uczynił to na wiele sposobów (jedno z możliwych rozwiązań można znaleźć w *Delcie* 7/2004).

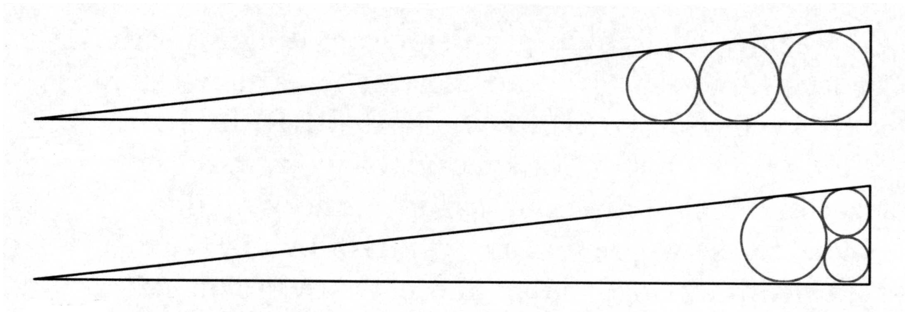


Rys. 2

Pewną ciekawostką jest informacja, że zadanie to i jego rozwiązanie pojawiło się niezależnie w kulturze japońskiej około 1772 roku, gdy Japonia znajdowała się w stanie oficjalnej izolacji (w latach 1639–1868).

Gdy osłabło zainteresowanie geometrią elementarną problem Malfattiego został zapomniany na blisko 130 lat. Sen o istnieniu rozwiązania problemu Malfattiego przerwali w 1930 roku H. Lob i H.W. Richmond [3], podając prosty kontrprzykład: w trójkącie równobocznym większą powierzchnię obejmują okręgi z rysunku 1, niż okręgi utworzone według pomysłu Malfattiego (rys. 2)!

Jeszcze lepiej jest to widoczne w trójkątach "długich" i "cienkich" (rys. 3). Powierzchnia kół z rysunku wyżej jest niemal dwa razy większa niż powierzchnia kół z rysunku niżej.



Rys. 3

W 1967 roku M. Goldberg [4] wykazał, że domniemanie Malfattiego nigdy nie jest rozwiązaniem problemu Malfattiego! Sprawę ostatecznie wyjaśnili matematycy ukraińscy V.A. Zalgaller, G.A. Los' [5] w 1992 roku (dowiedziałem się o tym dzięki uprzejmości profesorów K. Przesławskiego i Z. Świtalskiego z Uniwersytetu w Zielonej Górze):

Twierdzenie 3 (V.A. Zalgaller, G.A. Los', 1992). *Niech 2α, 2β, 2γ będą miarami kątów trójkąta $\triangle ABC$ przy wierzchołkach A, B, C, odpowiednio. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$. Wówczas spośród trzech wpisanych w trójkąt kół o rozłącznych wnętrzach maksymalną łączną powierzchnię mają koła rozmieszczone w następujący sposób. Koło K_1 jest wpisane w trójkąt $\triangle ABC$. Koło K_2 jest styczne do koła K_1 i boków AB, AC. Jeśli $\sin\alpha \geqslant \tan\frac{\beta}{2}$, to koło K_3 jest styczne do koła K_1 i boków BA, BC. Jeśli $\sin\alpha \leqslant \tan\frac{\beta}{2}$, to koło K_3 jest styczne do koła K_2 i boków AB, AC. (Gdy $\sin\alpha = \tan\frac{\beta}{2}$, to istnieją dwa różne rozmieszczenia kół wpisanych w trójkąt, maksymalizujące ich łączną powierzchnię.)*

Bibliografia

1. Górnicki J., *Okruchy matematyki*, WN PWN, Warszawa 1995.
2. Malfatti G., Memoria sopra una problema stereotomico, *Memoria di Matematica e di Fisica della Societa Italiana della Scienze* 10, no. 1 (1803), 235–244.
3. Lob H., Richmond H.W., On the solutions of Malfatti problem for a triangle, *Proc. London Math. Soc.* 2 (1930), 287–304.
4. Goldberg M., On the original Malfatti problem, *Math. Mag.* 40 (1967), 241–247.
5. Zalgaller V.A., Los' G.A., Solution of the Malfatti problem, *Ukrain. Geom. Sb.* 35 (1992), 14–33 (ang. *J. Math. Sci.* 72 (1994), 3163–3177).