Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XL Szkole Matematyki Poglądowej, *Matematyczne Obrazki*, styczeń 2008.

I jeszcze jeden, i jeszcze raz. . . , czyli o wielopowracaniu

Bartosz FREJ, Wrocław

1. Wstęp

W 1927 roku Bartel van der Waerden opublikował następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1 (van der Waerden, [1]). *Jeśli zbiory $B_1,\ldots,B_r$ tworzą rozbicie $\mathbb{Z}$, to jeden z tych zbiorów zawiera skończone postępy arytmetyczne dowolnej długości.*

W tym samym roku George Birkhoff zaprezentował obszerne dzieło [2] dotyczące teorii układów dynamicznych, zawierające między innymi twierdzenie o wielopowracaniu (Multiple Recurrence Theorem) mówiące, że każdy punkt układu dynamicznego, w którym działa d homeomorfizmów powraca pod działaniem każdego z nich dowolnie blisko swojego początkowego położenia, przy czym momenty powrotów są wspólne dla wszystkich przekształceń (sformułujemy to twierdzenie precyzyjnie w rozdziale 2). Dopiero w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku zauważono, że te dwa przynależące do różnych działów matematyki rezultaty są blisko spokrewnione ([3]). Wiemy obecnie, że związki między kombinatoryką a teorią układów dynamicznych są bardzo głębokie, a postęp w jednej z dziedzin pociąga często rozwój drugiej. W niniejszej pracy dowiedziemy twierdzenia o wielopowracaniu i wywnioskujemy zeń twierdzenie van der Waerdena. W dowodzie twierdzenia Birkhoffa będziemy odwoływać się do przekonującej ilustracji. W ogólnych zarysach dowód jest taki, jak w [3] i [4]. Zainteresowanym tą tematyką zdecydowanie polecam znakomitą książkę Furstenberga [5]. Godnym uwagi źródłem informacji jest też strona internetowa Terrence'a Tao [6].

2. Co warto wiedzieć o układach dynamicznych?

W klasycznym ujęciu układ dynamiczny to para (X,T), gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną, a $T\colon X \to X$ homeomorfizmem. Bada się ewolucję takich układów, tzn. zachowanie kolejnych iterat T^n, $n \in \mathbb{Z}$. Dla nas szczególnie ważne będzie zjawisko powracania. Powiemy, że punkt $x \in X$ jest *powracający*, gdy dla każdego otoczenia U tego punktu istnieje taka liczba naturalna n, że $T^n x \in U$. Innymi słowy, x jest powracający, gdy można znaleźć ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k), dla którego T^{n_k} zbiega do x, gdy $k \to \infty$. Okazuje się, że w każdym układzie dynamicznym istnieje przynajmniej jeden punkt powracający (dowód na razie pominiemy, gdyż mamy w planie uzasadnienie ogólniejszego twierdzenia). Często wygodnie jest rozważać układ „oszczędniejszy" niż dany (X,T). Przypuśćmy, że nasza przestrzeń X jest sumą rozłączną dwóch okręgów, a T działa na każdym z nich przez obrót (dopuszczamy sytuację, w której kąty obrotu są inne dla każdego z okręgów). Jest jasne, że nie ma żadnych interakcji między punktami z różnych okręgów, można więc badać każdy okrąg osobno, jako oddzielny układ dynamiczny. W tym celu wprowadzamy definicję *podzbioru niezmienniczego*, jako domkniętego niepustego podzbioru F przestrzeni X spełniającego $TF \subset F$. W naszym przykładzie każdy z okręgów jest niezmienniczy, choć jeśli któryś z obrotów jest okresowy, można wyróżnić mniejsze podzbiory niezmiennicze. Powiemy, że $M \subset X$ jest *podzbiorem minimalnym*, gdy jest niezmienniczy i nie zawiera właściwych podzbiorów niezmienniczych. (W naszym przykładzie, jeśli na każdym z okręgów działa obrót nieokresowy, tzn. o kąt niewspółmierny z π, to układ ma dwa podzbiory minimalne.) Jeśli układ jest jedynym swoim podzbiorem niezmienniczym, to mówimy, że jest to *układ minimalny.* Każdy układ dynamiczny zawiera podzbiór minimalny. Można tego dowieść wykorzystując lemat Kuratowskiego-Zorna dla rodziny niezmienniczych podzbiorów układu uporządkowanej przez relację zawierania. Zatem twierdzenia dotyczące istnienia (np. punktów powracających) można formułować dla układów minimalnych.

Inną charakteryzację układów minimalnych można wysłowić w języku orbit. Orbita to zbiór $O(x) = \{T^n x \colon n \in \mathbb{Z}\}$. Zauważmy, że domknięcie orbity jest podzbiorem niezmienniczym. Korzystając z tego faktu, nie jest trudno uzasadnić poniższe stwierdzenie:

Stwierdzenie 2.1. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *układ (X, T) jest minimalny;*
2. *każda orbita $O(x)$ jest gęsta w X;*
3. *dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ istnieje liczba naturalna N, dla której $X = \bigcup_{n=0}^{N} T^n U$.*

Klasyczną teorię układów dynamicznych można na różne sposoby uogólniać (np. osłabiając założenia dotyczące przestrzeni X lub rozważając nieodwracalne przekształcenia ciągłe). Nas będzie interesował przypadek, w którym na X działa d komutujących homeomorfizmów $T_1, \dots, T_d$. Idąc dalej, można rozważać działanie grupy G na X – wówczas z każdym elementem $g \in G$ związany jest homeomorfizm φ_g, przy czym zachodzą związki $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$, $\varphi_{g^{-1}} = \varphi_g^{-1}$, $\varphi_e = id$ (gdzie e oznacza element neutralny grupy G). W przypadku klasycznego układu (X, T) mówimy o działaniu grupy $\mathbb{Z}$, a w przypadku d komutujących homeomorfizmów o działaniu $\mathbb{Z}^d$.

W interesującej nas sytuacji powiemy, że $F \subset X$ jest *niezmienniczy*, gdy $T_i F \subset F$ dla każdego $i = 1, \dots, d$, a jest *minimalny*, gdy jest niezmienniczy i nie zawiera właściwych podzbiorów niezmienniczych. *Orbitą* będziemy nazywać zbiór $\left\{Sx \colon S = T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d},\ i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}\right\}$, zaś stwierdzenie 2.1 przybierze postać:

Stwierdzenie 2.2. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *układ $(X, T_1, \dots, T_d)$ jest minimalny;*
2. *każda orbita jest gęsta w X;*
3. *dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ istnieje liczba naturalna N, dla której $X = \bigcup_{n=0}^{N} S_n U$, gdzie każde przekształcenie S_n jest postaci $T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d}$.*

Powiemy, że $x_0 \in X$ jest *wielopowracający*, gdy istnieje rosnący ciąg n_k liczb naturalnych, dla którego $T_1^{n_k} x_0 \to x_0, \dots, T_l^{n_k} x_0 \to x_0$, gdy $k \to \infty$. Naszym głównym celem jest twierdzenie Birkhoffa o wielopowracaniu:

Twierdzenie 2.3. *Jeśli $T_1, \dots, T_d$ są komutującymi homeomorfizmami zwartej przestrzeni metrycznej X, to istnieje punkt wielopowracający.*

3. Jak wywnioskować twierdzenie van der Waerdena z twierdzenia Birkhoffa?

Zanim przystąpimy do dowodu twierdzenia Birkhoffa, zobaczmy, jak wykorzystać je do dowodu twierdzenia 1.1. Niech zbiory $B_1, \dots, B_r$ stanowią rozbicie zbioru liczb całkowitych, tzn. $B_1, \dots, B_r$ są parami rozłączne i $\bigcup_{j=1}^{r} B_j = \mathbb{Z}$. (Takie r-elementowe rozbicie można sobie wyobrażać jako sposób pokolorowania zbioru liczb całkowitych przy użyciu r kolorów.) Wystarczy uzasadnić, że dla każdej liczby $d = 2, 3, \dots$ pewien B_j zawiera postęp arytmetyczny długości d. Ponieważ zbiorów w rozbiciu jest skończenie wiele, któryś będzie musiał zawierać dowolnie długie postępy arytmetyczne.

W argumentacji wykorzystamy układy symboliczne (lub, jak wolą niektórzy, symbolowe) – szczególny przypadek układów dynamicznych. Ustalmy skończony zbiór Λ, który będziemy nazywać dalej alfabetem. W produkcie kartezjańskim $\Lambda^{\mathbb{Z}}$ wprowadźmy topologię produktową. Otrzymujemy przestrzeń zwartą i metryzowalną; my będziemy używać metryki:

$$\rho(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{k+1} \colon x_n = y_n \text{ dla } |n| < k \right\}.$$

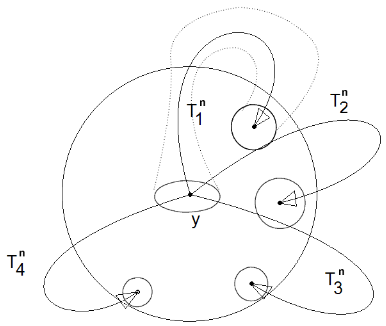
Określmy przekształcenie $\sigma \colon \Lambda^{\mathbb{Z}} \to \Lambda^{\mathbb{Z}}$ wzorem $\big(\sigma(x)\big)_n = x_{n+1}$ – przesunięcie ciągu $(x_n) \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$ o jedną pozycję w lewo (w terminologii angielskiej to przekształcenie nosi nazwę *shift*; w języku polskim nie przyjął się ogólnie żaden odpowiednik tej nazwy). *Układ symboliczny* (ang. *shift space* lub *subshift*) to para (X, σ_X), gdzie X jest podzbiorem $\Lambda^{\mathbb{Z}}$ niezmienniczym względem σ, a σ_X oznacza obcięcie σ do zbioru X – dalej będziemy opuszczać ten indeks i pisać σ na oznaczenie przesunięcia w lewo niezależnie od dziedziny. Układ $(\Lambda^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ nazywa się *pełnym układem symbolicznym.*

Między rozbiciami zbioru $\mathbb{Z}$ a elementami pełnego układu symbolicznego nad r-elementowym alfabetem $\Lambda = \{1, \ldots, r\}$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość; rozbicie $B_1,\ldots,B_r$ jest związane z elementem $(x_n) \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$ następującą regułą: n należy do B_j wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n = j$. Twierdzenie van der Waerdena można więc wysłowić tak:

Twierdzenie 3.1. *Dla każdego $x \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$ i $d \in \mathbb{N}$ istnieją takie m i n, że*

$$x(m) = x(m+n) = x(m+2n) = \cdots = x(m+dn).$$

Czyli $\sigma^{m+n}(x),\ldots,\sigma^{m+dn}(x)$ są odległe od $\sigma^m(x)$ o mniej niż 1 w metryce ρ.



Rys. 1. Ilustracja do dowodu twierdzenia 3.1

Dowód tw. 3.1. Ustalmy $x \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$ i oznaczmy przez Y jego orbitę domkniętą względem σ, tzn. $Y = \overline{\{\sigma^n(x) \colon n \in \mathbb{Z}\}}$. Rozważmy przekształcenia $T_1 = \sigma$, $T_2 = \sigma^2,\ldots,T_d = \sigma^d$. Zbiór Y jest niezmienniczy względem każdego z nich; rozważamy go jako przestrzeń topologiczną z topologią odziedziczoną z $\Lambda^{\mathbb{Z}}$. Z twierdzenia o wielopowracaniu zastosowanego do układu $(Y; T_1, \ldots, T_d)$ wynika, że możemy znaleźć punkt $y \in Y$ i rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k), dla którego $T_1^{n_k} y \to y,\ldots,T_d^{n_k} y \to y$, gdy $k \to \infty$. Zatem dla pewnego n punkty $\sigma^n(y),\ldots,\sigma^{dn}(y)$ są odległe od y o mniej niż 1 (patrz rys. 1). Ponieważ $\sigma^n,\ldots,\sigma^{dn}$ są ciągłe, zbiór takich y jest otwarty. Musi więc zawierać punkt postaci $\sigma^m x$. Dobierając taki punkt odpowiednio blisko y możemy zagwarantować, że $\sigma^{m+n}(x),\ldots,\sigma^{m+dn}(x)$ są odległe od $\sigma^m(x)$ o mniej niż 1. $\square$

4. Dowód twierdzenia Birkhoffa

Do przeprowadzenia powyższego dowodu nie jest, w istocie, potrzebne twierdzenie Birkhoffa w podanym brzmieniu. Wystarczy następujący, pozornie słabszy lemat.

Lemat 4.1. *Niech X będzie zbiorem* minimalnym *względem działania $T_1,\ldots,T_d$. Wówczas dla każdego $\epsilon > 0$ i każdego zbioru otwartego $W \subset X$ istnieją $y \in W$ i liczba naturalna n takie, że y, $T_1^n y,\ldots$, $T_d^n y$ leżą w kuli o średnicy mniejszej od ϵ, zawartej w W.*

Zgodnie z uwagą z rozdziału 2 dokładamy założenie minimalności układu. Nie żądamy też, by punkt y był wielopowracający, a jedynie by powracał do pewnego swojego ϵ-otoczenia. Jak odzyskać z tego sformułowania pełne twierdzenie o wielopowracaniu? Przypuśćmy, że lemat jest prawdziwy i oznaczmy przez $C_n^{\epsilon,W}$ zbiór tych $y \in W$, dla których punkty y, $T_1^n y,\ldots$, $T_l^n y$ zawarte są w pewnej kuli $K = K(x, \delta) \subset W$ o promieniu δ mniejszym niż ϵ. Oznaczając środek takiej kuli przez x, możemy zapisać

$$\begin{aligned} C_n^{\epsilon,W} &= \{y \in W \colon \exists x \in X,\ \exists \delta < \epsilon \ \ y, T_1^n y, \ldots, T_d^n y \in K(x,\delta) \subset W\} \\ &= \bigcup_{x \in X} \bigcup_{\delta < \epsilon} \{y \in W \colon y, T_1^n y, \ldots, T_d^n y \in K(x,\delta)) \subset W\}, \end{aligned}$$

więc, wobec ciągłości przekształceń T_i jest jasne, że jest to zbiór otwarty (choć nie wiemy, czy nie jest pusty). Stąd zbiór

$$C^\epsilon = \bigcup_W \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^{\epsilon,W}$$

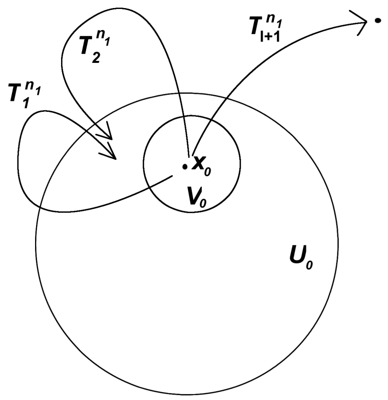
jest również otwarty i na dodatek nie jest pusty, bo z naszego lematu wynika, że dla każdego W zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^{\epsilon,W}$ jest niepusty. Zbiór C^ϵ jest więc nawet gęsty. Z twierdzenia Baire'a otrzymujemy, że przekrój $\bigcap_m C^{1/m}$ jest gęstym zbiorem typu G_δ. Ale ten przekrój to zbiór tych punktów y, dla których można każdej liczbie $\epsilon = \frac{1}{m}$ przyporządkować taką liczbę naturalnę n, że y,$T_1^n y,\ldots,T_d^n y$ leżą w kuli o średnicy mniejszej od ϵ. Czyli zbiór punktów wielopowracających. Ponieważ każdy układ zawiera podzbiór minimalny, udowodniliśmy twierdzenie Birkhoffa.

Powyższe rozumowanie wykazuje, że w układzie minimalnym punkty wielopowracające nie tylko istnieją, ale tworzą gęstą G_δ. Pozostaje jedynie udowodnić lemat. Posłużymy się indukcją względem liczby homeomorfizmów, pod działaniem których zachodzi powracanie.

Dowód lematu. Ustalmy $\epsilon > 0$ i zbiór otwarty W. Niech U będzie kulą o średnicy mniejszej niż ϵ, zawartą w W. Ponieważ działanie homeomorfizmów $T_1,\ldots,T_d$ jest minimalne, cała przestrzeń X zostaje pokryta przez skończenie wiele obrazów $U, S_1U,\ldots,S_NU$, gdzie każde S_n jest postaci $T_1^{i_1}\ldots T_d^{i_d}$ (tzn. należy do grupy generowanej przez działające homeomorfizmy). Wybierzmy dowolny punkt $x \in X$ i prześledźmy jego trajektorię $\{T^k x\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Wśród zbiorów $U,\ldots,S_NU$ można znaleźć taki, który zawiera przynajmniej dwa elementy tej trajektorii. Oznaczmy je przez $T^{k_1}x$ i $T^{k_2}x$, $k_1 < k_2$, a wyróżnionym zbiorem niech będzie S_1U. Wówczas $y_1 = S_1^{-1}T^{k_1}x$ i $y_2 = S_1^{-1}T^{k_2}x$ należą do kuli U i zachodzi

$$T^{k_2-k_1}y_1 = T^{k_2-k_1}S_1^{-1}T^{k_1}x = S_1^{-1}T^{k_2-k_1}T^{k_1}x = S_1^{-1}T^{k_2}x = y_2,$$

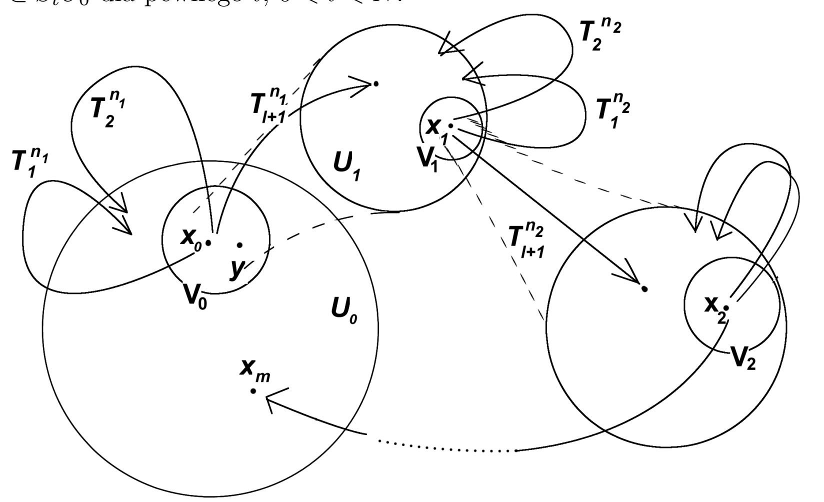
bo wszystkie przekształcenia $T_1,\ldots,T_d$ komutują.



Rys. 2. Punkt x_0 powraca do U_0 wraz ze swoim otoczeniem V_0 względem $T_1,\ldots,T_l$ po czasie n_1

Załóżmy teraz, że teza lematu zachodzi dla przekształceń $T_1,\ldots,T_l$, gdzie $l < d$. Ustalmy $\epsilon > 0$ i zbiór otwarty W. Z założenia indukcyjnego wynika, że możemy znaleźć kulę U_0 o średnicy mniejszej niż ϵ, zawartą w W oraz punkt x_0, który powraca do U_0 względem każdego z $T_1,\ldots,T_l$ po pewnej liczbie kroków n_1. To powracanie zachodzi także na pewnym otoczeniu $V_0 = U_0 \cap \bigcap_{i=1}^{l} T_i^{-n_1}U_0$ (rys.2). Tak jak w pierwszym kroku, pewna ilość obrazów $U_0, S_1U_0,\ldots,S_NU_0$ pokrywa całą przestrzeń X. Oznaczmy przekształcenie identycznościowe przez S_0. Punkt $T_{l+1}^{n_1}x_0$ należy do pewnego obrazu S_tU_0, $0 \leqslant t \leqslant N$. Zbiór $T_{l+1}^{n_1}V_0 \cap S_tU$ jest jego otoczeniem otwartym. I znów zgodnie z założeniem indukcyjnym zawiera on pewną kulę U_1 i punkt x_1, który powraca do tej kuli wraz z pewnym swoim otoczeniem V_1 względem przekształceń $T_1^{n_2},\ldots,T_l^{n_2}$, ale niekoniecznie względem $T_{l+1}^{n_2}$. Ponownie rozważając punkt $T_{l+1}^{n_2}x_1$, który należy do pewnego $S_{t_1}U_0$, oraz jego otoczenie $T_{l+1}^{n_2}U_1 \cap S_{t_1}U_0$ znajdujemy kulę U_2 i powracający do niej względem $T_1^{n_3},\ldots,T_l^{n_3}$ punkt x_2 itd. Tak postępując otrzymujemy ciąg punktów (x_k), kul (U_k) i otoczeń (V_k) o własnościach:

- $x_k \in V_k \subset U_k$ i $T_1^{n_{k+1}}V_k,\ldots,T_l^{n_{k+1}}V_k \subset U_k$
- $U_k \subset S_tU_0$ dla pewnego t, $0 \leqslant t \leqslant N$.

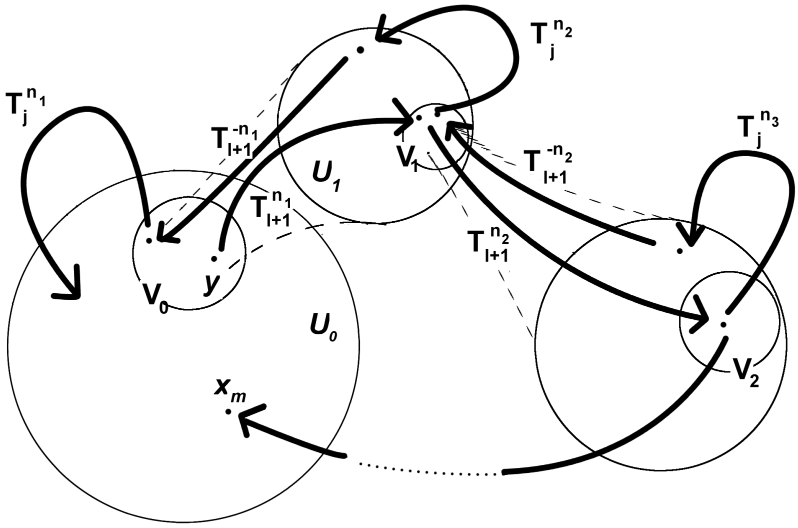


Rys. 3. Konstrukcja ciągów (x_k) i (U_k)

Wśród zbiorów S_tU_0, $0 \leqslant t \leqslant N$, możemy znaleźć taki, który zawiera dwa elementy ciągu (x_k). Załóżmy dla uproszczenia, że jest to $S_0U_0 = U_0$, a jednym z tych elementów jest x_0. Drugi oznaczmy przez x_m, przy czym $m > 0$. Niech $y = T_{l+1}^{-(n_1+\cdots+n_m)}x_m$. Wtedy y należy do U_0 i powraca do U_0 względem działania T_{l+1} po czasie $n_1 + \cdots + n_m$. Ale powraca także w tym samym czasie względem $T_1, \dots, T_l$, bo

$$T_j^{n_1+n_2+\dots+n_m} y = T_j^{n_1} T_{l+1}^{-n_1} \dots \underbrace{T_{l+1}^{-n_{m-1}} \underbrace{T_j^{n_m} \underbrace{T_{l+1}^{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}} y}_{\in V_{m-1}}}_{\in U_{m-1}}}_{\in V_{m-2}} \in U_0,$$

co kończy dowód, o ile potrafimy znaleźć różny od x_0 punkt x_m w U_0.



Rys. 4. Punkt y powraca do U_0 względem przekształcenia $T_{l+1}^{n_1+\dots+n_m}$, ale też względem $T_j^{n_1+\dots+n_m} = T_j^{n_1} T_{l+1}^{-n_1} T_j^{n_2} \dots T_{l+1}^{-n_{m-1}} T_j^{n_m} T_{l+1}^{n_1+\dots+n_{m-1}}$

Gdyby dwa punkty x_k, x_m, $0 < k < m$ zawierał inny zbiór $S_t U_0$, to otrzymalibyśmy tezę przyjmując $y = T_{l+1}^{-(n_{k+1}+\dots+n_m)} x_m \in S_t U_0$, a następnie wycofując ten punkt do U_0 przez S_t^{-1}.

Na mocy zasady indukcji istnieje $y \in U_0 \subset W$ i liczba naturalna m takie, że $T_1^m y, \dots, T_d^m y \in U_0$. □

Literatura

[1] van der Waerden B.L., *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wisk. 15 (1927), 212–216

[2] Birkhoff G., *Dynamical Systems*, AMS 1927

[3] Furstenberg H., Weiss B. *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. d'Analyse Math. 34(1978), 61–85

[4] Błaszczyk A., Plewik S., Turek S., *Topological multidimensional van der Waerden theorem*, Comment.Math.Univ.Carolinae 30(1989), 783–787

[5] Furstenberg H., *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton 1981

[6] Tao T., *http://terrytao.wordpress.com/2008/01/15/254a-lecture-4-multiple-recurrence*