Szacujemy

Każdy wie, że dla dowolnych trzech punktów A, B, C mamy

$$AB + BC \geq AC,$$

przy czym nierówność jest ostra, gdy punkty nie leżą na jednej prostej. Jest to *nierówność trójkąta* i przydaje się w najróżniejszych zadaniach. Oto przykład.

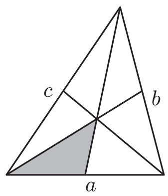
Oszacowanie sumy środkowych trójkąta. Oznaczmy przez a, b, c boki trójkąta, a zaczynające się na nich środkowe odpowiednio przez k, l, m. Jak wiadomo, środkowe dzielą się w stosunku 1:2.

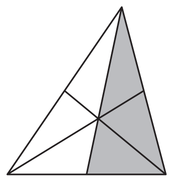
Oszacowanie z dołu. Sześć trójkątów takich, jak na rysunku obok, daje

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k + \frac{2}{3}l & > & \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{3}k + \frac{2}{3}m & > & \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{3}l + \frac{2}{3}m & > & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{3}l + \frac{2}{3}k & > & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}k & > & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}l & > & \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Sumując stronami, mamy więc

$$2(k + l + m) > a + b + c.$$





Oszacowanie z góry. Sześć trójkątów takich, jak na rysunku obok, daje

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b & > & k \\ \frac{1}{2}b + a & > & l \\ \frac{1}{2}b + c & > & l \\ \frac{1}{2}c + b & > & m \\ \frac{1}{2}c + a & > & m \\ \frac{1}{2}a + c & > & k \end{cases}$$

Sumując stronami, mamy więc

$$3(a + b + c) > 2(k + l + m).$$

Mamy zatem oszacowanie

pół obwodu < suma środkowych < półtora obwodu.

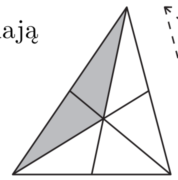
Czy nie można tego oszacowania poprawić? Można!

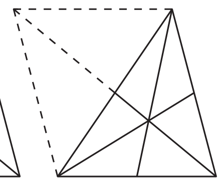
Lepsze oszacowanie z dołu. Trzy trójkąty takie, jak na rysunku obok, dają

$$\begin{cases} \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}l & > & c \\ \frac{2}{3}l + \frac{2}{3}m & > & a \\ \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}k & > & b \end{cases}$$

Sumując stronami, mamy więc

$$\frac{4}{3}(k + l + m) > a + b + c.$$





Lepsze oszacowanie z góry. Odbijając na trzy sposoby trójkąt względem środka boku, jak na rysunku obok, dostajemy

$$\begin{cases} a + b & > & 2m \\ b + c & > & 2k \\ c + a & > & 2l \end{cases}$$

Sumując stronami, mamy więc

$$2(a + b + c) > 2(k + l + m).$$

Tym razem okazało się, że

trzy czwarte obwodu < suma środkowych < obwód.

A czy to można poprawić? Czytelniku, sprawdź!

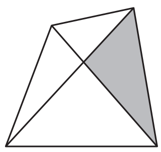
Oszacowanie sumy przekątnych czworokąta. Oznaczmy przez a, b, c, d boki czworokąta, a przez $p(= p_1 + p_2)$ i $q(= q_1 + q_2)$ jego przekątne.

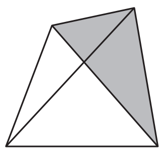
Oszacowanie z dołu. Cztery trójkąty takie, jak na rysunku obok, dają

$$\begin{cases} p_1 + q_1 & > & a \\ q_1 + p_2 & > & b \\ p_2 + q_2 & > & c \\ q_2 + p_1 & > & d \end{cases}$$

Sumując stronami, mamy

$$2(p_1 + p_2 + q_1 + q_2) = 2(p + q) > a + b + c.$$





Oszacowanie z góry. Cztery trójkąty takie, jak na rysunku obok, dają

$$\begin{cases} a + b & > & p \\ b + c & > & q \\ c + d & > & p \\ d + a & > & q \end{cases}$$

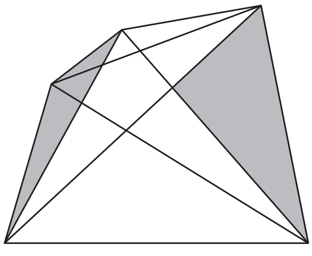
Sumując stronami, mamy więc

$$2(a + b + c + d) > 2(p + q).$$

Mamy zatem oszacowanie

pół obwodu < suma przekątnych < obwód.

Czy nie można tego oszacowania poprawić? Otóż dolnego nie można – sprawdź, Czytelniku! Ale co z górnym?



Dla pięciokąta można (wskazówka na rysunku obok) analogicznie wykazać, że

obwód < suma przekątnych < dwa obwody.

Pozostaje do sprawdzenia, czy nie da się lepiej.

A co z sześciokątami, siedmiokątami itd., albo ogólnie – z n-kątami? Można też zapytać o podobne zależności między krawędziami i przekątnymi wielościanów.

M. K.