Studium kynologiczne – akcepteriery, obliczury i turingwajlery

Adam KOLANY, Katowice

Wyobraźmy sobie pieska biegającego po parku. Piesek, jak to piesek, biega sobie, obwąchuje drzewa i wprawia go to w różne nastroje. Raz to podskakuje ochoczo, raz to merda ogonkiem. Innym zaś razem zwiesza smutno głowę i przechodzi do następnego drzewa. Zdarza się także, że obwąchawszy drzewo rzuca się pędem przed siebie ujadając przeraźliwie, aby drżąc z przerażenia schować się pod ławką swego pana. Innym razem zaś wypada na łąkę skacząc z radości jak oszalały i radośnie szczeka.

Ogół nastrojów (zwanych także STANAMI) pieska rozbija się na dwie klasy. Do pierwszej zaliczymy te, które powodują, iż piesek po dotarciu do łąki zaczyna szaleć z radości. Nastroje te nazwiemy AKCEPTUJĄCYMI (ozn. A). Pozostałe stany, zwane ODRZUCAJACYMI, zaliczamy do klasy drugiej (ozn. R).

Powiemy, że piesek POLUBIŁ lub ZAAKCEPTOWAŁ scieżkę, po której przebiegł, jeżeli po dotarciu do łąki jest w nastroju akceptującym.

Zaznaczmy znakiem 1 fakt, że przy danym drzewie piesek coś „wywąchał” oraz znakiem 0, że piesek nie wywąchał nic. Wówczas ścieżka w parku staje się z punktu widzenia pieska ciągiem znaków 0 i 1. Traktując ten ciąg jako liczbę w reprezentacji dwójkowej (pierwszemu drzewu odpowiada najmniej znacząca cyfra), dochodzimy do pytania, jakie zbiory liczb naturalnych są akceptowalne przez danego pieska. Poniżej znajdziemy przykłady takich zbiorów oraz przykłady zbiorów, które nie są akceptowane przez żadnego pieska.

Rasa 1 – **Akcepteriery**

AKCEPTERIEREM dla zbioru liczb $A \subseteq \mathbb{N}$ nazwiemy pieska, który akceptuje te i tylko te ścieżki, które reprezentują dwójkowo liczby ze zbioru A.

Akcepterier lubiący wielokrotności 3.

	0	1	#
$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_a}$	A
$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_s}$	R
$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_n}$	$\mathsf{P_p}$	R
$\mathsf{P_n}$	$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_s}$	A

Na przecięciu wiersza i kolumny znajduje się stan w jakim znajdzie się piesek po odczytaniu znaku znajdującego się w nagłówku kolumny znajdując się w stanie z kolumny pierwszej tego wiersza. Tak na przykład będąc w stanie $\mathsf{P_n}$ po odczytaniu znaku 0, piesek przejdzie do stanu $\mathsf{P_p}$. Ostatnia kolumna oznacza jakie stany osiąga piesek na końcu ścieżki. Zaczynamy w stanie $\mathsf{P_s}$.

Powiedzmy, na przykład, że wzdłuż ścieżki zakodowano liczbę 20, która w reprezentacji dwójkowej przyjmuje postać 10100. Na poniższym rysunku widzimy trasę pieska z wyszczególnionymi stanami (czytamy od prawej do lewej!):

	#	1	0	1	0	0
R	$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_s}$

Ponieważ osiągnęliśmy stan R, piesek odrzuca liczbę 20. Zobaczmy teraz co będzie z 21 (dwójkowo 10101). Mamy:

	#	1	0	1	0	1
A	$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_n}$	$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_s}$

Ponieważ osiągnęliśmy stan A, piesek akcepuje liczbę 21.

Dowód tego, że wyżej zdefiniowany piesek akceptuje tylko i wyłącznie liczby podzielne przez 3 pozostawiamy jako interesujące ćwiczenie.

Rozważmy teraz pieska, który „obwąchuje” drzewo z obu stron. Wtedy ścieżka w parku wyznacza parę liczb naturalnych (α, β). Możemy wówczas rozszerzyć pojęcie akcepteriera dla przypadku relacji $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Relację nazwiemy $\pi\mathsf{s}$ – akceptowalną ($\pi\mathsf{s}$ od PI-ES), jeżeli pewien akcepterier ją akceptuje. Relacje $\pi\mathsf{s}$ – akceptowalne nazywać też będziemy $\pi\mathsf{s}$ – definiowalnymi.

- Relacja $\alpha \leq \beta$ jest $\pi\mathsf{s}$-akceptowalna. Aby to zobaczyć rozważmy pieska, którego zachowanie jest opisane nastepującą tabelą:

stan	00	01	10	11	#
$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_b}$	$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_s}$	A
$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_b}$	$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_a}$	A
$\mathsf{P_b}$	$\mathsf{P_b}$	$\mathsf{P_b}$	$\mathsf{P_a}$	$\mathsf{P_b}$	R

- Relacja $\beta = M\alpha$ jest $\pi\mathsf{s}$ – definiowalna, $M \geq 2$. Można pokazać, że piesek zdefiniowany następująco:

$$\Pi_M \stackrel{\mathrm{Df}}{=} \{\, \mathsf{P}_\kappa(\varepsilon,\delta) \to \mathsf{P}_\lambda :\ M\varepsilon + \kappa = 2\lambda + \delta,\ \varepsilon,\delta \in \{\,0,1\,\},\ \kappa,\lambda < M\,\},$$

  gdzie $\mathsf{P}_\kappa(\varepsilon,\delta) \to \mathsf{P}_\lambda$ oznacza, że ze stanu P_κ nasz piesek przejdzie do stanu P_λ widząc parę $\langle\varepsilon,\delta\rangle$, definiuje tę relację. Umawiamy się przy tym, że brak jawnie wypisanego stanu, do którego ma przejść akcepterier, oznacza, że wpada on w przerażenie i pomijając wszystkie pozostałe drzewa pędzi na łąkę do swojego pana. Oczywiście jest to stan odrzucający. Przyjmujemy ponadto, że jedynie stan P_0 na końcu ścieżki jest akceptujący.

Zobaczmy to na przykładzie $M = 3$. Mamy:

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{P}_{00}(0,0) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 0 + 00 = 2\cdot\lambda + 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 00\\
\mathsf{P}_{00}(0,1) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 0 + 00 = 2\cdot\lambda + 1 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}_{00}(0,1) = \mathsf{R}\\
\mathsf{P}_{00}(1,0) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 1 + 00 = 2\cdot\lambda + 0 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}_{00}(1,0) = \mathsf{R}\\
\mathsf{P}_{00}(1,1) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 1 + 00 = 2\cdot\lambda + 1 \ \Rightarrow\ \lambda = 01\\
\mathsf{P}_{01}(0,0) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 0 + 01 = 2\cdot\lambda + 0 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}_{01}(0,0) = \mathsf{R}\\
\mathsf{P}_{01}(0,1) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 0 + 01 = 2\cdot\lambda + 1 \ \Rightarrow\ \lambda = 00\\
\mathsf{P}_{01}(1,0) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 1 + 01 = 2\cdot\lambda + 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 10\\
\mathsf{P}_{01}(1,1) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 1 + 01 = 2\cdot\lambda + 1 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}_{01}(1,1) = \mathsf{R}\\
\mathsf{P}_{10}(0,0) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 0 + 10 = 2\cdot\lambda + 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 01\\
\mathsf{P}_{10}(0,1) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 0 + 10 = 2\cdot\lambda + 1 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}_{10}(0,1) = \mathsf{R}\\
\mathsf{P}_{10}(1,0) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 1 + 10 = 2\cdot\lambda + 0 \ \Rightarrow\ \mathsf{P}_{10}(1,0) = \mathsf{R}\\
\mathsf{P}_{10}(1,1) \to \mathsf{P}_\lambda & \Leftrightarrow & 3\cdot 1 + 10 = 2\cdot\lambda + 1 \ \Rightarrow\ \lambda = 10
\end{array}$$

Tym sposobem dostajemy tabelę:

	00	01	10	11	#
P_{00}	P_{00}	R	R	P_{01}	A
P_{01}	R	P_{00}	P_{10}	R	R
P_{10}	P_{01}	R	R	P_{10}	R

Nie istnieje akcepterier dla relacji $\beta = \alpha^2$.

Przypuśćmy, że jest inaczej. Niech Π bedzie akcepterierem dla zbioru par (α, α^2) i niech K będzie liczbą jego stanów. Niech dalej $N > 4K$, $M \stackrel{\mathrm{Df}}{=} 2^N$ i niech $A \stackrel{\mathrm{Df}}{=} \langle\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{2N}\rangle$ i $B \stackrel{\mathrm{Df}}{=} \langle\delta_0 \ldots \delta_{2N}\rangle$ będą dwójkowymi reprezentacjami liczb M i M^2, odpowiednio. Oczywiście, wówczas $\varepsilon_0 = \ldots = \varepsilon_{N-1} = \varepsilon_{N+1} = \ldots = \varepsilon_{2N} = 0$, $\varepsilon_N = 1$ oraz $\delta_0 = \ldots = \delta_{2N-1} = 0$, $\delta_{2N} = 1$. Ponieważ para (M, M^2) jest akceptowana przez Π, istnieje ciąg stanów $s_0, \ldots, s_{2N}, s_{2N+1}$ o tej własności, że s_0 jest stanem początkowym, a s_{2N+1} jest stanem akceptującym, oraz takim, że $\langle s_j, (\varepsilon_j, \delta_j)\rangle \to s_{j+1}$ jest zmianą stanu pieska Π, dla $j = 0, \ldots, 2N$. Ponieważ $N > 4K$, a trójek postaci (s, ε, δ), gdzie s jest stanem pieska, a $\varepsilon, \delta \in \{\,0,1\,\}$, jest $4K$, więc istnieją $0 \leq k < l < N$, dla których $s_k = s_l$, $\varepsilon_k = \varepsilon_l$ i $\delta_k = \delta_l$. Widzimy wówczas, że ciąg:

$$\begin{array}{llll}
\langle s_0,(\varepsilon_0,\delta_0)\rangle \to s_1 \ , & \ldots & ,\ldots, & \\
\langle s_k,(\varepsilon_k,\delta_k)\rangle \to s_{k+1}, & \langle s_{k+1},(\varepsilon_{k+1},\delta_{k+1})\rangle \to s_{k+2} & ,\ldots, & \langle s_{l-1},(\varepsilon_{l-1},\delta_{l-1})\rangle \to s_l \ , \\
\langle s_l,(\varepsilon_l,\delta_l)\rangle \to s_{l+1} & ,\langle s_{k+1},(\varepsilon_{k+1},\delta_{k+1})\rangle \to s_{k+2} & ,\ldots, & \langle s_{l-1},(\varepsilon_{l-1},\delta_{l-1})\rangle \to s_l \ , \\
\langle s_l,(\varepsilon_l,\delta_l)\rangle \to s_{l+1} \ , & \langle s_{l+1},(\varepsilon_{l+1},\delta_{l+1})\rangle \to s_{l+2} & ,\ldots, & \langle s_N,(\varepsilon_N,\delta_N)\rangle \to s_{N+1} \ , \\
 & & & \ldots,\langle s_{2N},(\varepsilon_{2N},\delta_{2N})\rangle \to s_{2N+1}
\end{array}$$

jest ciągiem zachowań pieska Π dla ścieżki (od prawej do lewej)

ε_{2N}	ε_{2N-1}	$\cdots$	ε_N	ε_{N-1}	$\cdots$	ε_{l+1}	ε_l	$\cdots$	ε_{k+1}	ε_l	$\cdots$	ε_{k+1}	ε_k	$\cdots$	ε_0
δ_{2N}	δ_{2N-1}	$\cdots$	δ_N	δ_{N-1}	$\cdots$	δ_{l+1}	δ_l	$\cdots$	δ_{k+1}	δ_l	$\cdots$	δ_{k+1}	δ_k	$\cdots$	δ_0
$\uparrow\ \underbrace{}_{2N+l-k}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{2N-1+l-k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{N+l-k}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{N-1+l-k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{2l-k+1}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{2l-k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{l+1}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{l}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{k+1}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{0}$

To znaczy, dla ścieżki

0	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\uparrow\ \underbrace{}_{2N+l-k}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{2N-1+l-k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{N+l-k}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{N-1+l-k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{2l-k+1}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{2l-k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{l+1}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{l}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{k+1}$	$\uparrow\ \underbrace{}_{k}$	$\cdots$	$\uparrow\ \underbrace{}_{0}$

Oznacza to jednak, że Π akceptuje parę $\left\langle 2^N \cdot 2^{l-k},\, 2^{2N} \cdot 2^{l-k}\right\rangle$. Skąd wynika, że $\left(2^N \cdot 2^{l-k}\right)^2 = 2^{2N+(l-k)}$, co nie jest prawdą, bo $k \neq l$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje piesek akceptujący relację $\beta = \alpha^2$.

Zadania:

– Podać akcepteriera dla podzielności przez dowolną liczbę $M \in \mathbb{N}$.
– Czy istnieje akcepterier dla zbioru liczb pierwszych ?

Własności domknięciowe klasy relacji πs-akceptowalnych.

Całkiem łatwo zauważyć, że jeśli jakaś relacja jest πs – definiowalna, to jej dopełnienie też jest πs – definiowalne. Niech teraz Π_1 i Π_2 będą akcepterierami dla relacji $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$, odpowiednio. I niech $\Pi_\vee$ i $\Pi_\wedge$ będą akcepterierami, których stanami są pary stanów $\langle\sigma,\tau\rangle$ akcepterierów Π_1 i Π_2 i które wśród swoich przejść zawierają przejścia:

$$\langle\sigma,\tau\rangle a \mapsto \langle \Pi_1(\sigma,a), \Pi_2(\tau,a)\rangle, \qquad a \ \text{– opis drzewa.} \tag{$\star$}$$

Ponadto niech $\Pi_\vee$ zawiera przejścia $\langle\sigma,\mathsf{A}\rangle \mapsto \mathsf{A}$ i $\langle\mathsf{A},\tau\rangle \mapsto \mathsf{A}$, a $\Pi_\wedge$ oprócz przejść $(\star)$ niech zawiera tylko przejście $\langle\mathsf{A},\mathsf{A}\rangle \mapsto \mathsf{A}$. Wówczas $\Pi_\vee$ akceptuje $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, a $\Pi_\wedge$ akceptuje $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.

Rasa 2 – Obliczury

Obliczurem nazywamy pieska, który po obwąchaniu drzewa wykopuje dołek (chyba, że już jest jakiś) pod tym drzewem, albo taki dołek zasypuje (jeśli oczywiście jest co zasypać). Powiemy, że piesek jest obliczurem dla funkcji f, jeżeli – po przejściu ścieżki kodującej argument dla f – układ dołków pod drzewami koduje wartość funkcji f dla tego argumentu. Funkcje, dla których istnieją obliczury nazywamy funkcjami πs-obliczalnymi.

Poniżej widzimy obliczury dla dodawania i odejmowania.

$+$	00	01	10	11
$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_s}, 0$	$\mathsf{P_s}, 1$	$\mathsf{P_s}, 1$	$\mathsf{P_p}, 0$
$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_s}, 1$	$\mathsf{P_p}, 0$	$\mathsf{P_p}, 0$	$\mathsf{P_p}, 1$

$-$	00	01	10	11
$\mathsf{P_s}$	$\mathsf{P_s}, 0$	$\mathsf{P_p}, 1$	$\mathsf{P_s}, 1$	$\mathsf{P_s}, 0$
$\mathsf{P_p}$	$\mathsf{P_p}, 1$	$\mathsf{P_p}, 0$	$\mathsf{P_s}, 0$	$\mathsf{P_p}, 1$

– cyfra obok stanu przyjmowanego przez pieska po przeczytaniu opisu drzewa oznacza, czy zostawi dołek po jego przeciwnej stronie (1), czy nie (0).

Prześledźmy ich działanie na przykładzie liczb 25 (binarnie 11001) i 13 (binarnie 01101)

(+)	#	1	1	0	0	1
	#	0	1	1	0	1
P_s	P_p	P_p	P_s	P_s	P_p	P_s
	1	0	0	1	1	0

(koniec napisu, jak widzimy jest interpretowany jako 0)

(−)	#	1	1	0	0	1
	#	0	1	1	0	1
P_s	P_s	P_p	P_p	P_s	P_s	P_s
	0	0	1	1	0	0

Jeśli zamienimy argumenty miejscami dostaniemy

(−)	#	0	1	1	0	1
	#	1	1	0	0	1
P_p	P_p	P_s	P_s	P_s	P_s	P_s
	1	1	0	1	0	0

czyli obliczenie kończące się stanem nieakceptującym. To oznacza, że dla takiej pary argumentów funkcja jest nieokreślona.

Dla dowolnego $M > 0$, istnieje obliczur dla mnożenia przez M. Jego stanami są ciągi binarne odpowiadające liczbom mniejszym od M, jego przejścia dane są wzorami:

$$\mathsf{P}_\kappa(\varepsilon) \to \mathsf{P}_\lambda, \delta \;\Leftrightarrow\; M \cdot \kappa + \varepsilon = 2\lambda + \delta \;\;,\;\; \lambda < M,\ \varepsilon, \delta \in \{0, 1\}.$$

Na przykład dla $M = 3$, mamy

	0	1
P_{00}	$\mathsf{P}_{00}, 0$	$\mathsf{P}_{01}, 1$
P_{01}	$\mathsf{P}_{00}, 1$	$\mathsf{P}_{10}, 0$
P_{10}	$\mathsf{P}_{01}, 0$	$\mathsf{P}_{10}, 1$

Sprawdźmy:

	#	1	0	1
P_{00}	P_{01}	P_{00}	P_{01}	P_{00}
	1	1	1	1

Zgadza się: $3 \cdot 5 = 15$.

Dla dowolnego obliczura dla f istnieje akcepterier dla relacji $\beta = f(\alpha)$. W rzeczy samej. Niech:

	0	1
σ_0	$\sigma_{00},\ y_{00}$	$\sigma_{10},\ y_{10}$
σ_1	$\sigma_{01},\ y_{01}$	$\sigma_{11},\ y_{11}$
σ_2	$\sigma_{02},\ y_{02}$	$\sigma_{12},\ y_{12}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
σ_N	$\sigma_{0N},\ y_{0N}$	$\sigma_{1N},\ y_{0N}$

będzie tabelką zachowań dla obliczura funkcji f. Wówczas tabelka akcepteriera dla relacji $\beta = f(\alpha)$ ma postać:

	00	01	10	11
σ_0	$\Pi_{00}(0)$	$\Pi_{00}(1)$	$\Pi_{10}(0)$	$\Pi_{10}(1)$
σ_1	$\Pi_{01}(0)$	$\Pi_{01}(1)$	$\Pi_{11}(0)$	$\Pi_{11}(1)$
σ_2	$\Pi_{02}(0)$	$\Pi_{02}(1)$	$\Pi_{12}(0)$	$\Pi_{12}(1)$
...	...	...	...	...
σ_N	$\Pi_{0N}(0)$	$\Pi_{0N}(1)$	$\Pi_{1N}(0)$	$\Pi_{1N}(1)$

gdzie $\Pi_{ij}(k) = \sigma_{ij}$ jeżeli $y_{ij} = k$, w przeciwnym wypadku $\Pi_{ij}(k)$ jest stanem odrzucającym R. Stanami akceptującymi tego akcepteriera są stany akceptujące odpowiadającego mu obliczura.

W szczególności, dla zdefiniowanego wyżej obliczura potrajającego, dostaniemy znaną już tabelę akcepteriera dla relacji $\beta = 3\alpha$.

Zadania:

– Czy powyższe stwierdzenie da się odwrócić?

– Czy klasę relacji πs-akceptowalnych i funkcji πs–obliczalnych powiększy się, dopuszczając do rozważań możliwość wielokrotnego analizowania ścieżki przez danego pieska?

Kupą mości panowie, czyli akceptacja za pomocą sfory.

Mówiąc o akceptacji za pomocą sfory mamy na myśli możliwość kolejnego użycia nieograniczonej liczby psów do analizy danej ścieżki. Do tego celu musimy użyć nieco innych psów niż te, co do tej pory. Zakładamy, że pod każdym drzewem znajduje się ustalona liczba dołków w ustalonej kolejności. Każdy z dołków może być pusty lub zasypany. Psy należące do sfory zamiast obwąchiwać drzewa analizują zawartość dołków, zmieniają nastrój i ewentualnie zasypują lub odkopują jeden z dołków. Może też być istotne, w jakich nastrojach poszczególne psy docierają do łąki.

Sfora akceptująca podzielność.

Zakładamy, że pod każdym drzewem są trzy dołki, przy czym początkowo trzeci rząd dołków jest zasypany. Ponieważ istnieje obliczur dla odejmowania, możemy nakazać mu wynik odejmowania zachować w trzecim rzędzie dołków. Będziemy też potrzebowali akcepterierów dla ($\leqslant$) oraz jednego akcepteriera dla bycia zerem (można dobrać ilość typów psów bardziej oszczędnie, ale będą one bardziej skomplikowane „wewnętrznie"). Scenariusz akceptacji podzielności $\alpha|\beta$ wygląda następująco: puszczamy kolejno obliczura dla odejmowania, po czym polecamy akcepterierowi dla niewiększości sprawdzić, czy wynik odejmowania jest mniejszy od α. Jeśli tak, to akcetpterier zera rozstrzyga ostatecznie czy α dzieli β, czy nie.

Zadanie: Wykazać, że nie istnieje akcepterier dla relacji podzielności.

Rasa 3 – Turingwajlery

Podobnie jak dopuszczenie sfory do analizy, dopuszczenie możliwości powrotów na ścieżce wraz z założeniem, że ścieżka jest nieograniczenie długa i nie kończy się łąką, zwiększa nasze możliwości obliczeniowe. Dopuszczamy tutaj nową rasę psów Turingwajlery. Zakładamy, że psy takie, wyruszając w podróż po lesie, obserwują stan dołków pod drzewami ścieżki, po której się poruszają, zmieniając swój nastrój zasypują, bądź odkopują dołek, po czym przemieszczają się o jedno drzewo w przód, w tył, lub pozostają na miejscu. Po pewnym czasie wracają w miejsce, z którego wyruszyły i na podstawie stanu, w jakim się znajdują rozstrzygamy, czy ścieżka została zaakceptowana, czy nie. Mówimy wtedy o turingwajlerach akceptujących. O turingwajlerach obliczających mówimy wtedy, gdy nie tyle interesują nas ich nastroje przy powrocie, co wygląd ścieżki, jaki po sobie zostawiły.

Na użytek turingwajlerów, zakłada się, że ciągi dołków pod drzewami nie oznaczają liczb w zapisie dwójkowym, lecz że liczbę k koduje wystąpienie $k + 1$ kolejnych dołków (dlatego $k + 1$, że by móc zakodować liczbę zero).

Powiemy, że turingwajler T oblicza funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jeżeli idąc po ścieżce, na której zakodowano liczbę k, po skończonym czasie T wróci z lasu, zostawiając na ścieżce kod liczby $f(k)$. Nietrudno zauważyć, że równie dobrze moglibyśmy zakładać, że T zostawi kod wyniku za kodem argumentu. Wystarczy najpierw nakazać mu, żeby skopiował argument o jedno drzewo za nim, a potem zaczął obliczać wartość f. Następnie, by po zakończeniu obliczania powrócił na początek ścieżki.

Zadanie: Zdefiniować, co oznacza, że turingwajler oblicza funkcję więcej niż jednej zmiennej.

Turingwajlery akceptujące dla liczb kwadratowych.

Być liczbą kwadratową jest równoważne byciu sumą pewnej ilości początkowych kolejnych liczb nieparzystych. Rozważmy turingwajlera, który cyklicznie generuje kolejne liczby nieparzyste za badaną liczbą (za każdym razem wykopuje dwa nowe dołki), a następnie odejmuje tę liczbę od argumentu. Proces kończy się, gdy argument przyjmnie wartość mniejszą od dwójki. Początkowa liczba była kwadratowa, jeżeli to, co pozostało, jest zerem. Na koniec wystarczy tylko „posprzątać” na ścieżce i wrócić do punktu wyjścia.

Zadanie: Zaprojektować turingwajlera dla mnożenia.

Sosnowiec, Warszawa, Kraków, Sosnowiec: listopad 1998 – wrzesień 2007.