Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXIX Szkole Matematyki Poglądowej *Domniemanie – Hipoteza – Dowód*, Sierpień 2007

Co daje wiedza?

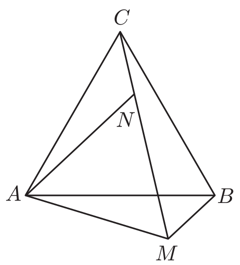
Maja SĘDŁAK, Toruń

Odpowiedź na pytanie: „Co daje wiedza?” jest tak ogólne, że nie można na nie szybko odpowiedzieć. Sytuacja wydaje się prostsza, gdy zapytamy bardziej konkretnie, a mianowicie, czy wiedza pomaga nam, czy przeszkadza w stawianiu hipotez i dowodzeniu twierdzeń matematycznych. Każdy natychmiast odpowie, że pomaga. Stwierdzenie to można poprzeć podając kilka bezpośrednich odpowiedzi na postawione pytanie:

1. Pozwala znajdować nowe dowody istniejących twierdzeń.
2. Pozwala upraszczać dowody już istniejące.
3. Pozwala uogólniać twierdzenia.
4. Zwiększa szanse na udowodnienie hipotez.
5. Daje dostęp do nowych dziedzin badań.

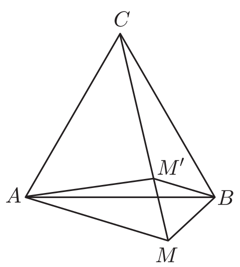
Zalety posiadania wiedzy można również zobrazować na następującym przykładzie:

Zadanie 1
Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech M będzie dowolnym punktem leżącym na łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że odległość punktu M od wierzchołka C jest równa sumie odległości punktu M od pozostałych wierzchołków.



Rys. 1

Rozwiązanie 1
Niech N będzie punktem odcinka CM takim, że $AM = MN$.
Wówczas $\angle AMN = \angle ABC = 60^\circ$ i $AN = AM$.
Stąd $\triangle CAN \equiv \triangle BAM$.
Ponieważ $CN = BM$, więc $CM = MN + NC = AM + BM$ (rys. 1).



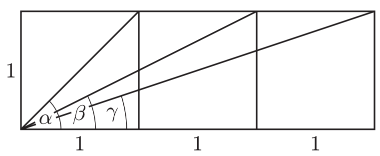
Rys. 2

Rozwiązanie 2
Rozpatrzmy obrót $R_B^{60^\circ}$ o kąt 60° wokół punktu B.
Niech $R_B^{60^\circ}(M) = M'$.
Wówczas $\triangle MBM'$ jest równoboczny oraz $R_B^{60^\circ}(A) = C$.
Ponadto $\angle CM'B = \angle AMB = 120^\circ$ i $CM' = AM$.
Stąd $\angle CM'M = \angle CM'B + \angle BM'M = 180^\circ$.
Zatem punkty C, M, M' są współliniowe,
więc $CM = CM' + M'M = AM + BM$ (rys. 2).

Rozwiązanie 3 Z tw. Ptolemeusza dla czworokąta $AMBC$ mamy:
$CM \cdot AB = AM \cdot BC + AC \cdot MB$.
Stąd $CM = AM + MB$.

Rozwiązanie pierwsze jest elementarne, wykorzystuje podstawowe wiadomości o przystawaniu trójkątów i kątach wpisanych w koło. Znajomość własności izometrii pozwala nam znaleźć drugie rozwiązanie. Trzeci sposób jest krótki i „elegancki”, jednak wymaga znajomości twierdzenia Ptolemeusza.

Następny przykład utwierdza nas w przekonaniu, jak cenna jest nasza wiedza.

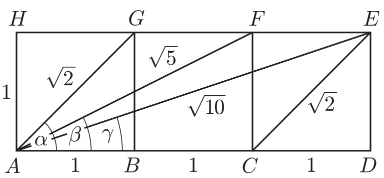


Rys. 3

Zadanie 2
Jaka jest miara kąta $\alpha + \beta + \gamma$ (rys. 3)?

Rozwiązanie 1
Oczywiste jest, że $\alpha = 45^\circ$.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy długości odpowiednich odcinków (patrz rysunek) i zauważmy, że

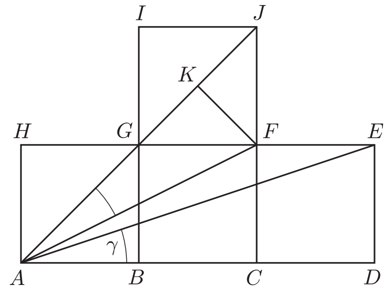
$$\triangle AFG \sim \triangle AEC.$$



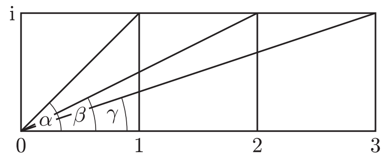
Rys. 4

Stąd (rys. 4)

$$\angle GAF = \angle EAC = \gamma, \qquad \beta + \gamma = 45^\circ$$



Rys. 5



Rys. 6

Rozwiązanie 2
Dorysujmy kwadrat $GFJI$ i oznaczmy przez K punkt przecięcia jego przekątnych. Wówczas łatwo zauważyć, że

$$\triangle AFK \sim \triangle AED.$$

Stąd $\beta + \gamma = 45^\circ$ (rys. 5).

Rozwiązanie 3
Korzystając z własności funkcji tangens mamy:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

Stąd $\beta + \gamma = 45^\circ$.

Rozwiązanie 4
Umieśćmy rysunek na płaszczyźnie zespolonej. Zauważmy, że kąty β i γ są argumentami liczb $2 + \mathrm{i}$ oraz $3 + \mathrm{i}$ odpowiednio. Pomnożenie ich daje liczbę o argumencie $\beta + \gamma$. Jest to liczba

$$(2 + \mathrm{i})(3 + \mathrm{i}) = 5 + 5\mathrm{i},$$

której argument to oczywiście 45° (rys. 6).

Kolejne wiadomości pozwalały nam na rozwiązanie tego zadania różnymi sposobami. Zaczęliśmy od bardzo elementarnego sposobu, a wykorzystując wiedzę o liczbach zespolonych skończyliśmy na bardzo efektownym rozwiązaniu. Jednak nie zawsze tak jest. Zdarzają się sytuacje, w których wiedza przegrywa z niewiedzą. Łatwo to pokazać dając matematykowi następujące zadanie do rozwiązania:

Zadanie 3
Sprzedawczyni w sklepie opowiadała taką niewiarygodną historię:
– Dziś rano pierwsza klientka kupiła połowę wszystkich jajek i jeszcze pół jajka, druga kupiła połowę pozostałych jajek i jeszcze pół jajka, tak samo było z trzecią, czwartą, piątą i szóstą klientką. Wtedy w koszu zostało tylko jedno jajko.
– Opowiada pani niestworzone rzeczy. Komu by pani sprzedała pół jajka.
– Ale ja zawsze sprzedawałam tylko całe jajka.
Tu wtrącił się do rozmowy student: – Ja byłem siódmym klientem, kupiłem połowę całego zapasu jajek i jeszcze pół jajka.
Na to sprzedawczyni:
– Pamiętam, pan kupił ostatnie jajko.

Rozwiązanie 1
Matematyk szybko spostrzeże, iż jest to typowe zadanie z jedną niewiadomą x – liczbą jajek na początku i (już nie tak szybko) uzupełni tabelę:

klient	kupił	zostawił
I	$1/2 \cdot x + 1/2$	$1/2 \cdot x - 1/2$
II	$1/4 \cdot x + 1/4$	$1/4 \cdot x - 3/4$
III	$1/8 \cdot x + 1/8$	$1/8 \cdot x - 7/8$
IV	$1/16 \cdot x + 1/16$	$1/16 \cdot x - 15/16$
V	$1/32 \cdot x + 1/32$	$1/32 \cdot x - 31/32$
VI	$1/64 \cdot x + 1/64$	$1/64 \cdot x - 63/64$
VII	$1/128 \cdot x + 1/128$	$1/128 \cdot x - 127/128$

Wiedząc, że ostatni klient kupił jedno jajko otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{128}x + \frac{1}{128} = 1$$

A stąd $x = 127$.

Rozwiązanie 2
Ci, którzy nie znają wyrażeń algebraicznych muszą radzić sobie inaczej i uzupełniają tabelę od końca rozumując następująco: Łatwo uzupełnić ostatni wiersz. Ostatni klient zastał jedno jajko, zatem tyle zostawił szósty.

Ponieważ kupił on połowę tego co zastał i jeszcze pół jajka, więc w koszu zostawił połowę tego co zastał minus pół jajka. Stąd połowę tego co zastał stanowi 1,5 jajka, a zatem zastał 3 jajka i kupił 2.

klient	zastał	kupił	zostawił
I	127	64	63
II	63	32	31
III	31	16	15
IV	15	8	7
V	7	4	3
VI	3	2	1
VII	1	1	0

Metoda ta jest szybsza niż poprzednia i nie wymaga tylu rachunków. Opiera się na tym, że gdy w koszu było $2n+1$ jajek, to klient kupił $n+1$ jajek i zastawił n jajek. Kontynuując wątek przewagi niewiedzy nad wiedzą popatrzmy na kolejne zadania.

Zadanie 4
Czy poniższa liczba jest wymierna?

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Rozwiązanie 1
Każdy matematyk wie, że rozwiążemy to zadanie oznaczając

$$x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

i wykonując następujące operacje

$$\begin{aligned}x^3 &= (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^3 = \\ &= 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2(9-\sqrt{80})}+ \\ &\quad +3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})^2} = \\ &= 18+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}x\end{aligned}$$

Zostaje nam już tylko rozwiązać równanie $x^3-3x-18=0$, skąd mamy $x=3$.

Rozwiązanie 2
Nie wszyscy jednak potrafią rozwiązywać równania trzeciego stopnia. Zdolni uczniowie mając ten brak robią to inaczej. Oznaczają $a=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$, $b=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ i liczą

$$a^3=9+4\sqrt{5}=\frac{8(9+4\sqrt{5})}{8}=\frac{72+32\sqrt{5}}{8}=\frac{(3+\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})}{8}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$b^3=9+4\sqrt{5}=\frac{8(9-4\sqrt{5})}{8}=\frac{72-32\sqrt{5}}{8}=\frac{(3-\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{8}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

Stąd $a+b=3$.

Zadanie 5
Wojtek rozwiązując pewne zadanie, trzykrotnie mnożył dwie liczby naturalne różniące się o 1. Oto otrzymane wyniki:

$$23304756,\ 1521524,\ 867498.$$

Dwa wyniki są złe. Które i dlaczego?

Rozwiązanie 1
Czyż nie jest naturalnym, że szukamy takiego n, aby $n(n+1)=a$, gdzie a jest jedną z otrzymanych liczb? Zatem wystarczy rozwiązać równanie kwadratowe

$$n^2+n-a=0$$

którego rozwiązanie, ze względu na ilość cyfr liczby a, wcale nie jest łatwe.
Dla $a=23304756$ otrzymujemy rozwiązanie.

Dla $a = 1521524$ i $a = 867498$ wyróżnik równania nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie 2
Zadanie to rozwiązują także uczniowie szkoły podstawowej. I to „ładniej” niż większość matematyków. Sposób jest następujący:
Ostatnie cyfry możliwych iloczynów to ostatnie cyfry następujących liczb: $0 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 7$, $7 \cdot 8$, $8 \cdot 9$, $9 \cdot 10$.
Czyli 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0.

Natomiast otrzymane liczby to

$$23304756,\ 1521524,\ 867498.$$

Tylko pierwsza ma „dobrą” cyfrę jedności.

Zadanie 6
W hurtowni rowerów były rowery dziecięce i młodzieżowe. Rowery dziecięce miały 3 koła, a młodzieżowe 2 koła. Wszystkich rowerów było 51, a wszystkich kół 147. Ile było rowerów każdego rodzaju?

Rozwiązanie 1
Matematyk powie, że to typowe zadanie „na układ równań”. Zatem oznaczamy
x – liczba rowerów dziecięcych
y – liczba rowerów młodzieżowych
i rozwiązujemy układ

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ 3x + 2y = 147 \end{cases}$$

$$x = 45, \quad y = 6.$$

Rozwiązanie 2
A dziecko nie mające pojęcia, co oznacza „układ równań” zauważy, że

$$147 = 102 + 45$$

Co oznacza, że gdyby wszystkie rowery były dwukołowe, to mielibyśmy 102 koła, ale mamy ich o 45 więcej, zatem jest to liczba rowerów o trzech kołach.

Kolejne zadanie przynosi ciekawe efekty, gdy spróbuje je rozwiązać student kierunku matematyki i licealista.

Zadanie 7 Oblicz wartość wyrażenia:

$$(x - a)(x - b) \cdot \ldots \cdot (x - z) =$$

Rozwiązanie
Większa część studentów przyzwyczajona do żmudnych rachunków zaczyna wymnażać kolejne czynniki iloczynu. Po czwartym mnożeniu poddają się nawet najwytrwalsi. Licealiści od razu rezygnują z wymnażania, czując, że przerasta to ich możliwości. Zaczynają się więc przyglądać temu nieco dziwnemu wyrażeniu i dość szybko zauważają, że jednym z czynników jest wyrażenie $x - x$, a zatem cały iloczyn wynosi zero.

* * *

Próbując samemu zmierzyć się z powyższymi zadaniami lub sięgając pamięcią wstecz zauważamy, że czasem ci, którzy mają mniejszą wiedzę potrafią nas zaskoczyć. Dysponując mniejszą ilością technik, mają więcej pomysłów i umysł otwarty na nietypowe rozwiązania. My, matematycy, ludzie z większą ilością wiadomości dysponujemy większą ilością metod, które możemy zastosować, przez co mamy mniej pomysłów. Staramy się podciągać wszystko pod jeden schemat, który znamy i wiemy, że przynosi on efekt. Trudno nam myśleć nietypowo i stąd zdarza nam się stosować zbyt ciężką artylerię do prostego problemu. Nie są to jednak częste sytuacje i dotyczą łatwych zagadnień. Zatem korzyści z posiadanej wiedzy są tak duże, że lepiej jest wiedzieć, niż nie wiedzieć. A opisane wyżej sytuacje są potrzebne, aby uświadamić nam, że nie jesteśmy idealni i czasem możemy nauczyć się czegoś od ludzi, którzy wiedzą mniej.