

Problemy z 3-rozmaitościami

Zdzisław POGODA, Kraków

Jednym z najważniejszych pojęć, które zrobiły w XX wieku ogromną karierę jest pojęcie rozmaitości. Z jednej strony rozmaitość n -wymiarowa lokalnie przypomina n -wymiarową przestrzeń euklidesową, a z drugiej strony globalnie jest to przestrzeń topologiczna o, często, bardzo skomplikowanej strukturze. Specyficzna konstrukcja rozmaitości pozwala na wykorzystanie do ich badania nie tylko metod topologicznych, lecz również analizy matematycznej i innych dopuszczalnych w przestrzeniach euklidesowych. Dlatego też obiekty te stały się niezwykle przydatne do modelowania, przede wszystkim, różnorodnych sytuacji w fizyce, a z czasem i w innych dziedzinach. Historycznie pojęcie rozmaitości wywodzi się z pojęcia krzywej oraz powierzchni i jest ich naturalnym uogólnieniem. Logiczne jest pytanie o klasyfikację rozmaitości w danym wymiarze z dokładnością do homeomorfizmu. W ogóle problemy klasyfikacji rozmaitych obiektów w matematyce należą do najważniejszych i im specjaliści poświęcają najwięcej uwagi.

Idea pojęcia rozmaitości n -wymiarowej została opisana w słynnym wykładzie habilitacyjnym Riemanna w 1854 roku, ale trzy lata wcześniej Riemann rozważał powierzchnie, nazwane później powierzchniami Riemanna, które próbował klasyfikować ze względu na typ spójności nie dowodząc jednak swoich spostrzeżeń. Pierwszą udaną próbę klasyfikacji powierzchni z dowodem zawdzięczamy Möbiusowi. W niezwykle pomysłowy sposób Möbius scharakteryzował orientowalne powierzchnie bez brzegu nazywane obecnie również dwuwymiarowymi rozmaitościami zamkniętymi ([8]). Orientowalność możemy rozumieć w ten sposób, że powierzchnia nie zawiera w sobie wstęgi Möbiusa albo inaczej, że z powierzchni nie da się wyciąć wstęgi Möbiusa. Powierzchniami nieorientowanymi zajęli się uczeń Kleina – Walter von Dyck. Pełne twierdzenie klasyfikujące powierzchnie z dokładnością do homeomorfizmu przedstawili Max Dehn i Paul Heegaard w artykule *Analysis situs* umieszczonym w Encyklopedii Nauk Matematycznych (*Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften*) z 1907 roku ([2]). Tam też autorzy opisali klasyfikację rozmaitości jednowymiarowych.

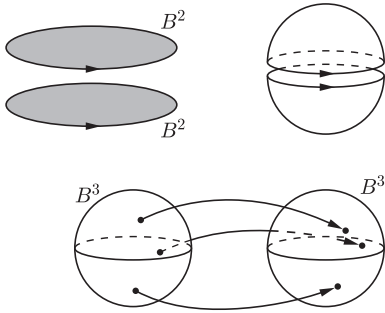
Sukces w przypadku powierzchni zachęcał matematyków do podjęcia prób klasyfikacji rozmaitości wyżej wymiarowych. Szybko jednak zauważono, że już dla obiektów trójwymiarowych tak łatwo nie uda się problemu rozwiązać. Techniki algebraiczne, które umożliwiły klasyfikację powierzchni, okazały się za słabe w wyższych wymiarach. Podstawowymi narzędziami służącymi do badania rozmaitości w tym czasie były grupy homologii i grupa podstawowa. To z ich pomocą klasyfikowano powierzchnie. Zasada, stosowana potem powszechnie w topologii algebraicznej, była naturalna. Jeśli obiekty topologiczne (rozmaitości) były homeomorficzne, to odpowiadające im twory algebraiczne były izomorficzne. Zatem gdy odpowiednie grupy nie były izomorficzne, to rozmaitości nie mogły być homeomorficzne. Właśnie w przypadku trójwymiarowym miały miejsce sytuacje niewygodne: twory niehomeomorficzne miały izomorficzne grupy im odpowiadające. Poincaré skonstruował przykład tzw. sfery homologicznej, rozmaitości trójwymiarowej niedającej się odróżnić za pomocą grup homologii od klasycznej sfery trójwymiarowej. Przy okazji zadał pytanie, czy podobne zjawisko mogłoby zajść dla grupy homotopii – jest to słynna hipoteza Poincarégo.

Przypomnijmy bardzo ogólnie i nieściśle, że grupa homotopii, a dokładniej grupa podstawowa „wyszukuje” typy pętli, które nie dają się ściągnąć do punktu. W sferze trójwymiarowej (podobnie jak i na dwuwymiarowej) każda pętla jest ściągalna, czyli grupa jest trywialna.

Matematycy przypuścili ostry atak na próby klasyfikacji rozmaitości wyżej wymiarowych. Okazało się jednak, że ich wysiłki muszą być skazane na

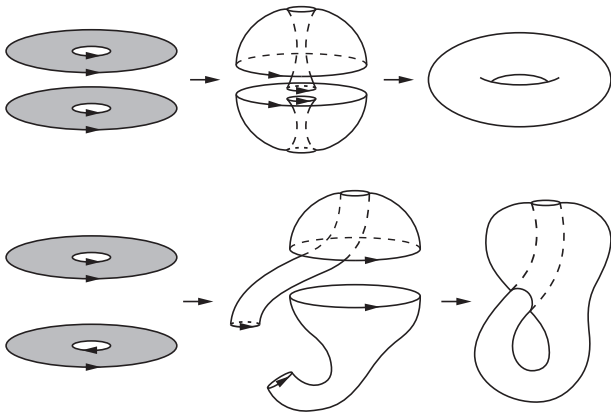
niepowodzenie. W 1958 roku A.A. Markow udowodnił, że dla rozmaitości cztero i wyżej wymiarowych problemu klasyfikacji nie da się rozwiązać. Dokładniej, pokazał mniej więcej coś takiego, że dla dowolnego algorytmu rozróżniającego z dokładnością do homeomorfizmu np. rozmaitości czterowymiarowe, zawsze można znaleźć takie rozmaitości, których nie da się rozróżnić za pomocą tego algorytmu. A zatem można co najwyżej próbować klasyfikować pewne specjalne podrodziny rozmaitości danego wymiaru oraz... rozmaitości trójwymiarowe, dla których twierdzenie Markowa nie obowiązuje.

Intensywne próby klasyfikacji 3-rozmaitości (bo tak trochę nieelegancko, ale za to krótko specjaliści nazywają rozmaitości trójwymiarowe) podejmowano na długo przed pojawieniem się twierdzenia Markowa, wykorzystując techniki analogiczne do tych, które przyniosły efekty dla powierzchni.



Rys. 1. Sklejanie dysków i kul

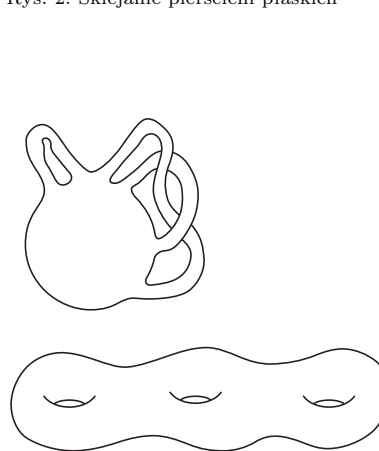
Nazwa „trójwymiarowe” może sugerować, że są to obiekty dostępne naszej intuicji, jednak specjaliści wiedzą, że tak nie jest. Zamkniętych, czyli zwartych i bez brzegu rozmaitości trójwymiarowych nie da się zanurzyć w przestrzeni trójwymiarowej, czyli nie można ich zobaczyć w pełnej okazałości. Zanurzalne są tylko rozmaitości otwarte, a więc wnętrza kuli (homeomorficzne z \mathbb{R}^3 – najprostszą 3-rozmaitością), torusa itp. Efekt ten zresztą zachodzi w przypadku dowolnego wymiaru. Natomiast sfera trójwymiarowa S^3 nie da się włożyć w trójwymiarową przestrzeń, bowiem sama jest taką nieco zmodyfikowaną przestrzenią (podobnie zresztą nie można sfery S^2 włożyć w płaszczyznę ani okręgu w prostą). Jej własności można jednak badać przez analogię do zwykłej dwuwymiarowej sfery S^2 . Na przykład sferę S^2 można otrzymać sklejając ze sobą brzegiem dwa koła (dyski) B^2 , a S^3 dostaniemy sklejając podobnie brzegiem dwie kule B^3 (rys. 1)



Rys. 2. Sklejanie pierścieni płaskich

Jeden ze sposobów tworzenia powierzchni zamkniętych polega na tym, że sklejamy ze sobą wzdłuż brzegu dwa koła z jednakową liczbą dziurek. Sklejając dwa koła z jedną dziurką, czyli dwa pierścienie, dostaniemy albo torus albo butelkę Kleina (czyli nieorientowalny torus), wszystko zależy od tego w jaki sposób skleimy brzegi (rys. 2).

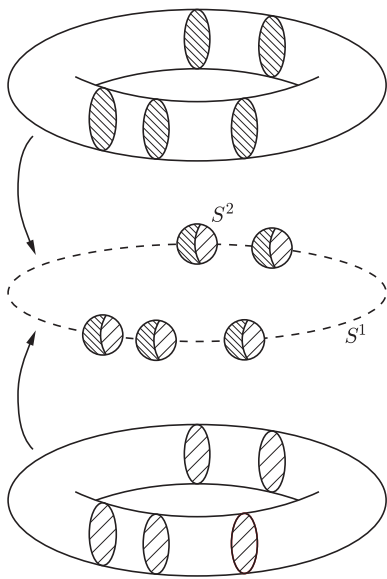
Tak między innymi postępował Möbius przy klasyfikacji powierzchni orientowalnych. Każdą orientowalną zamkniętą rozmaitość dwuwymiarową można też przedstawić jako sferę z doklejonymi rączkami (nazywanymi czasem uchami). Liczba rączek wyznacza rodzaj albo inaczej genus powierzchni – liczbę, która jednoznacznie tę powierzchnię określa (rys. 3).



Rys. 3. Przedstawienie powierzchni jako sfery z rączkami i sumy spójnej torusów

Inny sposób tworzenia powierzchni polega na wskazaniu podstawowych cegiełek, z których można by budować wszystkie zamknięte rozmaitości dwuwymiarowe. W tym przypadku nie jest to trudne: cegiełkami są sfera, torus oraz płaszczyzna rzutowa. Operacją pozwalającą konstruować nowe obiekty jest suma spójna powierzchni. Polega ona na tym, że z każdej powierzchni wycinamy zbiór homeomorficzny z kółkiem (dyskiem), a następnie sklejamy powstałe dziurawe twory wzdłuż brzegów dziurek. Sumę spójną dwóch powierzchni M_1 i M_2 oznaczamy $M_1 \# M_2$.

Twierdzenie klasyfikacyjne mówi, że każda powierzchnia zamknięta jest albo sferą, albo sumą spójną pewnej liczby torusów, albo wreszcie sumą spójną pewnej liczby płaszczyzn rzutowych. Na przykład suma spójna dwóch płaszczyzn rzutowych jest topologicznie równoważna butelce Kleina, a suma spójna torusa i płaszczyzny rzutowej jest homeomorficzna z sumą spójną trzech płaszczyzn rzutowych. Oba sposoby konstrukcji powierzchni są równoważne i dają pełny ich opis. Zupełnie naturalne wydają się próby otrzymania 3-rozmaitości metodami analogicznymi do tych dla powierzchni. Trójwymiarowe odpowiedniki dziurawych kół są to kule, do których doklejono pełne rączki (albo wspomniane ucha). Można też wyobrażać je sobie jako wielokrotne torusy tyle, że też pełne. Jak w przypadku dwuwymiarowym sklejamy teraz te wielokrotne



Rys. 4. Konstrukcja $S^2 \times S^1$

precle wzdłuż brzegu otrzymując zamknięte różności trójwymiarowe. Jeśli przez V_1 i V_2 oznaczymy dwa egzemplarze kuli z rączkami tego samego rodzaju, a przez h homeomorfizm sklejący ich brzegi, to trójkę (V_1, V_2, h) nazywamy rozkładem (albo diagramem) Heegarda od nazwiska duńskiego matematyka Paula Heegarda, który jako jeden z pierwszych interesował się problemami opisu 3-rozności i badał właśnie takie sklejenia. Nieco wcześniej Walter von Dyck również studiował sklejenia kul z rączkami.

Sklejając dwie kule otrzymaliśmy sferę S^3 . Co powstanie, gdy skleimy dwa pełne torusy? I tu zaczyna się kłopot, gdyż możliwości sklejenia jest już całe mnóstwo. Narysujmy na torusie południk i równoleżnik i skleimy go brzegiem z drugim egzemplarzem tak, żeby południk został skleiony z południkiem a równoleżnik z równoleżnikiem. Co otrzymamy? Pełny torus jest iloczynem kartezjańskim dysku i okręgu $B^2 \times S^1$. Tak więc, w każdym punkcie okręgu skleamy dwa dyski wzdłuż brzegu otrzymując sferę. Ostateczny wynik sklejenia ma zatem postać $S^2 \times S^1$ (rys. 4).

Jest to jakby trójwymiarowy odpowiednik torusa, choć torusem trójwymiarowym nazywany jest inny twór – iloczyn kartezjański trzech okręgów $S^1 \times S^1 \times S^1$ i nie da się go otrzymać ze sklejenia dwóch zwykłych torusów. A co się stanie, gdy skleimy dwa pełne torusy tak, by południk jednego skleił się z równoleżnikiem drugiego i odwrotnie? Tym razem dostaniemy sferę S^3 . Trudno sobie wyobrazić, jak można tak właśnie posklejać dwa torusy. Intuicyjnie możemy postąpić tak: najpierw na chwilę rozcinamy jeden z torusów wzdłuż równoleżnika dostając walec, następnie przewlekamy ten walec przez otwór w drugim torusie i z powrotem skleamy końce wywijając je na zewnątrz wokół tegoż torusa. Widać teraz, że równoleżnik dopasuje się do południka i odwrotnie. Zauważamy, że otrzymaliśmy sferę S^3 już na dwa sposoby: sklejąc kule lub torusy. Oznacza to, że nie ma gwarancji, iż sklejąc inne kule z rączkami znów nie dostaniemy sfery trójwymiarowej. Tak jest w istocie. Sferę możemy uzyskać sklejąc odpowiednio kule z dowolną liczbą rączek. To jest dość poważna wada tych konstrukcji. Są jednak pewne zalety. Na przykład każdą zamkniętą różność trójwymiarową można rozłożyć na dwie kule z rączkami. Uzasadnienie nie jest trudne, jeśli tylko założymy, że 3-rozności dopuszczają triangulację, czyli odpowiednio regularny podział na krzywoliniowe czworościany. W 1952 roku Moise udowodnił, że każda 3-rozność jest triangulowalna. Tak więc każda może być otrzymana przez sklejenie brzegiem dwóch kul z rączkami. Co więcej, uzasadnienie wcale nie jest trudne. Rozważmy zamkniętą 3-rozność wraz z pewną triangulacją. Krawędzie tej triangulacji tworzą pewną sieć albo szkielet. Jeśli pogrubimy krawędzie sieci zamieniając odcinki w posklejane walce, to dostaniemy twór homeomorficzny z kulą z rączkami. Wybierzmy teraz triangulację dualną tj. taką, której wierzchołki są na przykład środkami ciężkości czworościanów triangulacji wyjściowej. Nowa triangulacja ma tyle samo krawędzi co wyjściowa. Postępując z jej szkieletem podobnie jak poprzednio otrzymamy drugą kulę z taką samą liczbą rączek, co pierwsza. Naturalnie ich sklejenie daje wyjściową różność. Nietrudno też zauważyć, że ze względu na wielość triangulacji, samych rozkładów jednej różności też jest ogromnie dużo.

Jak już się przekonaliśmy 3-rozność może mieć wiele (a nawet nieskończenie wiele) rozkładów Heegarda. Wśród nich istnieje rozkład, w którym kula ma minimalną liczbę rączek, czyli najmniejszy rodzaj. Nazywamy go też rodzajem 3-rozności i dwa obiekty o różnych rodzajach nie mogą być homeomorficzne. Jeśli prawdziwa jest hipoteza Poincarégo, to jedyną 3-roznością zamkniętą rodzaju 0 jest sfera S^3 .

Inną zaletą rozkładów Heegarda jest możliwość redukcji analizy własności 3-rozności do badania krzywych na powierzchni kul z rączkami. Studiując sposoby sklejenia wzdłuż różnych krzywych można mieć nadzieję na odkrycie jakiegoś algorytmu postępowania, co przybliżyłoby nas do klasyfikacji. Tak się stało w przypadku sklejenia dwóch torusów, gdzie wszystko w zasadzie sprowadza się do przyklejania równoleżnika jednego torusa do krzywej

obiegającej p razy południkowo i q razy równoleżnikowo drugi torus. W ten sposób powstają, opisane po raz pierwszy przez Tietzego, przestrzenie soczewkowe $L(p, q)$, które udało się w pełni sklasyfikować – wszystkie one mają genus 1. Dla kuli z większą liczbą rączek sytuacja komplikuje się dramatycznie i już dla genusu 2 nie ma konkretnych rozstrzygnięć.

Ciekawie wygląda w przypadku trójwymiarowym rozkład na cegielki. Dla 3-rozmaitości sumę spójną definiujemy bardzo podobnie jak w sytuacji dwuwymiarowej: zamiast dysków wycinamy kule i rozmaitości skleamy wzdłuż sfer. Cegielkami są 3-rozmaitości nazwane pierwszymi. Rozmaitość jest pierwsza, gdy nie da się przedstawić jako suma spójna dwóch nietrywialnych rozmaitości tj. różnych od S^3 (bowiem $M \# S^3 = M$). Pierwszymi są S^3 , $S^2 \times S^1$, a także wszystkie przestrzenie soczewkowe $L(p, q)$. H. Kneser udowodnił twierdzenie, że każda 3-rozmaitość ma jednoznaczny rozkład na „czynniki pierwsze” ([6], [3], [4]). Wystarczy więc sklasyfikować rozmaitości pierwsze. I tu znów zaczynają się problemy.

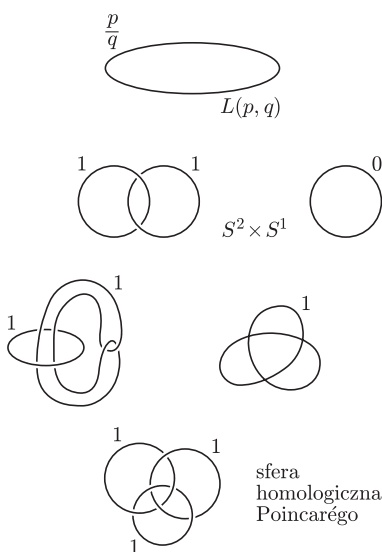
Kryterium klasyfikacyjne może być wyznaczone przez grupę podstawową, która w tym przypadku jest narzędziem zdecydowanie silniejszym niż grupy homologii. Gdy grupa podstawowa jest cykliczna i nieskończona, to mamy tylko jedną rozmaitość pierwszą $S^2 \times S^1$. Wydaje się, że niemal wszystko wiadomo o 3-rozmaitościach, które mają skończone grupy podstawowe. Wszystkie znane obiekty o tej własności są tzw. rozmaitościami sferycznymi będącymi przestrzeniami orbit działania skończonych podgrup $SO(4)$ na S^3 . Przypuszcza się, że są to wszystkie 3-rozmaitości z grupą podstawową skończoną, ale pełnego uzasadnienia brak mimo wielu częściowych rezultatów. Największy problem i zamieszanie panuje w przypadku grup nieskończonych i niecyklicznych, choć tu też sklasyfikowano wiele ważnych podrodzin. Jak widać, elementy pierwsze okazały się nie takie proste.

Można sobie zadać pytanie: dlaczego skleamy 3-rozmaitości wzdłuż sfer, przecież zamkniętych powierzchni jest nieskończenie wiele? To w przypadku dwuwymiarowym mieliśmy do dyspozycji tylko okręgi. W wyższym wymiarze jest większy wybór. Może wykorzystując zmienioną wersję sumy spójnej uda się znaleźć inne, dające się łatwiej sklasyfikować rozkłady. Rzeczywiście podjęto próby rozkładu 3-rozmaitości wzdłuż torusów i uzyskano bardzo ciekawe rezultaty – na przykład prace Jaco i Shalena oraz Johannsona ([5]). Wszystkie jednak pozostawiały jakieś rodziny, które nie poddawały się opisanym metodom.

Gdy mowa jest o torusach, to warto przypomnieć jeszcze jedną metodę konstruowania 3-rozmaitości. Jest to tak zwana chirurgia Dehna. Rozważmy w S^3 pewną liczbę rozłącznych pełnych torusów $L = (T_1, T_2, \dots, T_n)$. Mogą być one zapętlone, czyli mogą być interpretowane jako pogrubione węzły i sploty. Usuwamy wnętrza tych torusów. Na każdym z powstałych brzegów po pełnych torusach umieszczamy węzeł torusowy typu $r_i = \frac{a_i}{b_i}$, co oznacza, że krzywa zamknięta obiega torus a_i razy równoleżnikowo i b_i razy południkowo. Następnie wklejamy ponownie pełne torusy tak, by ich równoleżniki pokryły się z odpowiednimi węzłami. Taką operację nazywamy chirurgią Dehna o współczynnikach (r_1, r_2, \dots, r_n) . Dla jej prezentacji rysujemy schematycznie splot odpowiadający $L = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ i zaznaczamy odpowiednie współczynniki $r_i = \frac{a_i}{b_i}$ przy każdym z ogniw. Przy współczynnikach r_i dopisywany jest znak + albo –, co jest związane z orientacją węzła (rys. 5).

Chirurgia Dehna jest bardzo wygodnym sposobem konstrukcji nowych przykładów, a przy okazji zachodzi ciekawe twierdzenie Lickorisha–Wallace’a: *Każda zamknięta orientowalna 3-rozmaitość może być skonstruowana za pomocą chirurgii Dehna i to w taki sposób, że wszystkie współczynniki będą ± 1 a poszczególne ogniwka splotu będą niezapętlone.* Problem znów polega na tym, że jedna rozmaitość może być skonstruowana na nieskończenie wiele sposobów nawet przy takich uproszczeniach.

Pod koniec lat siedemdziesiątych XX wieku sensację wywołały pomysły Williama Thurstona, który postanowił wykorzystać struktury geometryczne



Rys. 5. Chirurgia Dehna – diagramy

na 3-rozmaitościach do ich klasyfikacji. Wielokrotnie w historii matematyki geometria i topologia przenikały się nawzajem, jak choćby w twierdzeniu Gaussa-Bonneta, lecz wydawało się raczej dziwne, by geometryczne obiekty mogły pomóc w „czysto” topologicznym problemie klasyfikacji rozmaitości. A jednak dla 3-rozmaitości propozycja Thurstona okazała się szczególnie obiecująca – jest to Hipoteza Geometryzacyjna:

Wnętrze każdej 3-rozmaitości zwartej może być rozłożone jednoznacznie za pomocą rozłącznych sfer i torusów zanurzonych w wyjściowej rozmaitości na części wyposażone w pewne kanoniczne struktury geometryczne.

Widać, że Hipoteza Geometryzacyjna jest jakby połączeniem rozkładu na sumy spójne z rozkładem za pomocą torusów uzupełnionym o „wątek geometryczny”. Thurston wyróżnił osiem takich wzorcowych struktur i rozstrzygnął pozytywnie hipotezę dla wielu ważnych rodzin rozmaitości. Z hipotezy tej wynika również, męcząca matematyków od prawie stu lat, hipoteza Poincarégo. Niestety Thurstonowi nie udało się w pełni rozprawić z HG, a inni także napotkali poważne trudności. Wydawało się, że ta oryginalna bardzo obiecująca droga, jak inne, zaczyna ginąć w gąszczu przypadków. I trochę niespodziewanie pod koniec 2002 roku rosyjski matematyk Grisha Perelman opublikował trzy preprinty twierząc, że jego metody pozwalają ostatecznie udowodnić HG. Dokładniej droga, którą poszedł Perelman, została wskazana przez Richarda Hamiltona jeszcze w 1982 roku, gdy Hipoteza Geometryzacyjna była bardzo młoda. Hamilton postanowił wykorzystać struktury riemannowskie i związane z nimi przepływy Ricciego do ataku na HG. Swoje pomysły konsekwentnie rozwijał w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych. Piętrzące się trudności techniczne niezwykle pomysłowo rozwiązał, ale i wyjątkowo oszczędnie opisał właśnie Perelman zostawiając innym dopracowanie szczegółów. Jedna z prac zawierająca według autorów zupełny dowód Hipotezy Geometryzacyjnej liczy sobie nieco ponad 300 stron [1]. Wygląda na to, że w końcu udało się pokonać przynajmniej częściowo problem klasyfikacji 3-rozmaitości. Częściowo, bo nie ma jeszcze listy podobnej do tej, jaką stworzono w przypadku dwuwymiarowym. Wszystko jest jeszcze bardzo świeże i matematycy muszą ochłonać oraz dokładnie zrozumieć wysoce techniczne szczegóły dowodów. Choć na początku wydawało się, że wystarczy „nieco” zmodyfikować klasyczne metody, to brano pod uwagę, że rozwiązanie wymagać będzie oryginalnych i zaskakujących pomysłów. Jak to jednak często bywa, rzeczywistość przerosła najśmielsze nawet oczekiwania. Przy okazji po raz kolejny podkreślona została jedność matematyki: pomysły i sposoby rozwiązania problemu z jednej dziedziny zostały znalezione w dziedzinach wydawałoby się dość odległych. Znow odkryto analogie pomiędzy analogiami.

Literatura

- [1] H.-D. Cao, X.-P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – Application of the Hamilton–Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math. 2006, 10, 185–492.
- [2] M. Dehn, P. Heegaard, *Analysis Situs*, Encyklopädie Math. Wiss. III AB, Teubner, Leipzig 1907, 153–220.
- [3] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, cz. II, PWN Warszawa 1986.
- [4] J. Hempel, *3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies, vol. 86, Princeton Univ. Press, 1976.
- [5] W. Jaco, P. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs of the AMS 220 Providence R.I. 1979.
- [6] H.Kneser, *Geschlossene Fläche in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten*, Jahresber. Deutch. Math.-Verein. 38 (1929), 248–260.
- [7] J. Milnor, *Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds*, Notices of the AMS, vol. 50, no.10, 1226–1233.
- [8] Z. Pogoda, *Teoria Morsa według Möbiusa*, Zeszyty OKM 31 (VII 2003).