Każda miara jest licząca, czyli rachunek prawdopodobieństwa w ujęciu analizy niestandardowej

Marek CAPIŃSKI, Kraków

Analiza niestandardowa została stworzona przez Abrahama Robinsona w latach 60-tych pozwalając matematycznie ściśle zdefiniować używane przez Leibniza pojęcia nieskończenie małych czy nieskończenie dużych („liczb idealnych"). Pozwala ona bardziej intuicyjnie sformułować znane pojęcia i twierdzenia jak również uzyskać nowe wyniki w wielu gałęziach matematyki.

Zacznijmy od przedstawienia jedynie tych podstawowych pojęć analizy niestandardowej, które są niezbędne do spełnienia zapowiedzi postawionej w tytule. Punktem wyjścia jest konstrukcja pewnego rozszerzenia zbioru liczb rzeczywistych. Aby zobaczyć, że ta konstrukcja jest całkiem naturalna przypomnijmy, że liczby rzeczywiste możemy uzyskać rozszerzając zbiór liczb wymiernych w następujący sposób. Rozważamy zbiór ciągów liczb wymiernych i wprowadzamy w nim relację równoważności identyfikującą te ciągi, których różnica jest ciągiem zbieżnym do zera: $\{a_n\} \equiv \{b_n\}$, gdy $a_n - b_n \to 0$, zaniedbujemy przy tym szybkość zbieżności. Zbiór liczb rzeczywistych to zbiór klas równoważności: $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}/_{\equiv}$. Jasne jest, że przyjęcie relacji, która rozróżniałaby ciągi zbieżne w różnym tempie, prowadziłoby do bogatszego zbioru ilorazowego. To spostrzeżenie jest podstawą następującej konstrukcji, w której dla prostoty tylko wychodzimy od zbioru wszystkich ciągów liczb rzeczywistych.

W zbiorze $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ próbujemy wprowadzić relację równoważności sklejającą ciągi zbieżne w tym samym tempie. Naturalna wydaje się następująca definicja

$$\{a_n\} \equiv \{b_n\}, \text{ gdy } a_n \neq b_n \text{ tylko co najwyżej dla skończonej liczby indeksów.}$$

Niestety, zauważmy, że przyjęcie powyższej definicji prowadzi do zbioru o niepożądanych własnościach. Po wyposażeniu zbioru ilorazowego w działania dodawania i mnożenia otrzymujemy strukturę z dzielnikami zera: $[\{1,0,1,0,\ldots\}] \cdot [\{0,1,0,1,\ldots\}] = [\{0,0,0,0,\ldots\}]$, a żaden z ciągów $[\{1,0,1,0,\ldots\}]$, $[\{0,1,0,1,\ldots\}]$ nie jest równoważny ciągowi zer. Naprawimy to rozluźniając nieco wymagania powyższej definicji. Zamiast zakładać, że $\{n : a_n = b_n\} \in \mathcal{A}$, gdzie przez $\mathcal{A}$ oznaczamy rodzinę podzbiorów zbioru liczb naturalnych będących uzupełnieniem zbioru skończonego, załóżmy, że $\{n : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem w $\mathbf{N}$ będącym rozszerzeniem rodziny $\mathcal{A}$: $\mathcal{U} \supset \mathcal{A}$. Przypomnijmy, że ultrafiltr to maksymalny filtr, a filtrem nazywamy rodzinę podzbiorów ustalonego zbior, w naszym przypadku $\mathbf{N}$, która nie zawiera zbioru pustego i jest domknięta ze względu na branie skończonych przecięć oraz nadzbiorów. Istnienie ultrafiltrów jest prostym wnioskiem z lematu Kuratowskiego–Zorna. Zakładamy więc, że dany jest ultrafiltr $\mathcal{U}$ zawierający wszystkie uzupełnienia zbiorów skończonych. Naszą definicję możemy zrobić nieco bardziej poglądową definiując skończenie addytywną miarę φ określoną na wszystkich podzbiorach zbioru $\mathbf{N}$ o wartościach 0 i 1:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } A \in \mathcal{U}, \\ 0, & \text{gdy } A \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$

Wymagane własności funkcji φ wynikają z definicji ultrafiltru. Dla dowolnego $A \subset \mathbf{N}$ bądź A, bądź jego uzupełnienie należy do $\mathcal{U}$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy sprzeczność z maksymalnością $\mathcal{U}$, zatem φ jest określona dla każdego $A \subset \mathbf{N}$. Jeśli A i B są rozłączne, to tylko jeden z nich może należeć do $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ jest domknięty ze względu na przecięcia, a zbiór pusty nie należy do filtru), co gwarantuje skończoną addytywność. Odnotujmy, że φ przyjmuje wartość 1 dla zbiorów, których uzupełnienie jest skończone.

Dla dowolnego zbioru I filtrem nazywamy rodzinę $\mathcal{F}$ jego podzbiorów $\mathcal{F} \subset P(I)$, taką, że
1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
2) jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$,
3) jeśli $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$, to $B \in \mathcal{F}$.

$\varphi : P(\mathbf{N}) \to \{0,1\}$
1) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, gdy $A \cap B = \emptyset$,
2) $\varphi(A) = 0$, gdy A jest skończony.

Możemy przyjąć ostateczną definicję.

Definicja 1. $\{a_n\} \equiv \{b_n\}$, gdy $a_n = b_n$ dla φ-prawie wszystkich n;

lub równoważnie

Definicja 1'. $\{a_n\} \equiv \{b_n\}$, gdy $\{n : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$.

Na ogół zwroty: prawie wszystkie, prawie stały, prawie wszędzie odnoszą się do miary Lebesgue'a. Używane w tekście zwroty φ-prawie wszystkie, φ-prawie stały, φ-prawie wszędzie są ich odpowiednikiem dla miary φ, czyli oznaczają, że własność ma miejsce poza, ewentualnie, pewnym zbiorem mającym miarę φ równą 0.

Definiujemy zbiór, który będzie podstawą dalszych rozważań:

$$^*\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}/_{\equiv}.$$

Zbiór liczb rzeczywistych możemy w naturalny sposób zanurzyć w $^*\mathbf{R}$: liczbie $a \in \mathbf{R}$ przyporządkowujemy klasę równoważności ciągu stałego $\{a, a, a, \ldots\}$. Będziemy dla prostoty indetyfikować zbiór $\mathbf{R}$ jego obrazem przez powyższe przyporządkowanie, czyli przyjmujemy, że $\mathbf{R} \subset {}^*\mathbf{R}$, a elementy zbioru $^*\mathbf{R}$ będziemy nazywać liczbami, używając niekiedy terminu „liczba standardowa" dla liczb z $\mathbf{R}$. Zbiór $^*\mathbf{R}$ jest istotnym rozszerzeniem zbioru $\mathbf{R}$, gdyż do $\mathbf{R}$ należą tylko do klasy ciągów stałych na pewnym zbiorze z $\mathcal{U}$ (φ-prawie stałych).

Zbiór $^*\mathbf{R}$ wyposażamy w działania dodawania i mnożenia w naturalny sposób.

Definicja 2. Dla $x, y \in {}^*\mathbf{R}$, $x = [a_n]$, $y = [b_n]$, kładziemy $x + y = [a_n + b_n]$, $x \cdot y = [a_n \cdot b_n]$. (Dla wygody piszemy $[a_n]$ zamiast $[\{a_n\}]$.)

Jest to typowe postępowanie, gdy wprowadzamy działanie w zbiorze ilorazowym. Nietrudno sprawdzić, że definicja nie zależy od wyboru reprezentantów i spełnione są postulaty ciała (zerem jest klasa ciągu zer, a jedynką klasa ciągu jedynek). Odnotujmy tylko, że uniknęliśmy wspomnianych powyżej problemów z dzielnikami zera. Albo zbiór liczb parzystych, albo zbiór liczb nieparzystych należy do $\mathcal{U}$, więc jeden z ciągów: $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ albo $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$ jest równoważny ciągowi samych zer.

Historyczne marzenie by pochodną obliczyć dzieląc nieskończenie małe przyrosty, a którego odbiciem jest symbol $\frac{df}{dx}$, można teraz zrealizować, ponieważ w zbiorze $^*\mathbf{R}$ możemy precyzyjnie zdefiniować oraz wskazać przykłady liczb nieskończenie małych. W tym celu rozszerzamy relację „$<$" z $\mathbf{R}$ na $^*\mathbf{R}$.

Definicja 3. $[a_n] < [b_n]$, gdy $a_n < b_n$ φ-prawie wszędzie.

Łatwo wykazać, że zbiór $^*\mathbf{R}$ jest liniowo uporządkowany przez relację $<$.

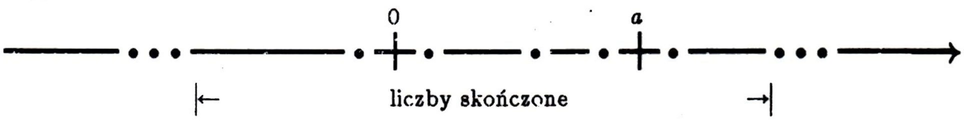
Definicja 4. Liczbę $x \in {}^*\mathbf{R}$ nazywamy nieskończenie małą (ozn. $x \approx 0$), gdy dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej $a \in \mathbf{R}$ mamy $|x| < a$. (Wartość bezwzględną $|x|$ dla $x \in {}^*\mathbf{R}$ definiujemy tak samo, jak w $\mathbf{R}$.) Liczbę $x \in {}^*\mathbf{R}$ nazywamy skończoną, gdy $|x| < a$ dla pewnego $a \in \mathbf{R}$; w przeciwnym przypadku – nieskończoną.

Przykładem liczb nieskończenie małych są klasy ciągów zbieżnych do zera. Na przykład $\left[\frac{1}{n}\right] < a$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}_+$, bo $\left\{n : \frac{1}{n} < a\right\}$ należy do $\mathcal{U}$ jako uzupełnienie zbioru skończonego. Podobnie mamy $[n] > a$ dla każdego $a \in \mathbf{R}$, więc $[n]$ jest przykładem liczby nieskończonej.

Fakt. Jeśli $x \in {}^*\mathbf{R}$ jest skończona, wtedy istnieje jedna liczba $a \in \mathbf{R}$ taka, że $x - a \approx 0$. Nazywamy ją częścią standardową liczby x i oznaczamy $a = st(x)$.

Dowód. Kładziemy $a = \sup\{b \in \mathbf{R} : b < x\}$. Łatwo sprawdzić, że $\delta = x - a \approx 0$. Gdyby istniała inna liczba a' o tej samej własności: $\delta' = x - a' \approx 0$ wtedy mielibyśmy $a - a' = \delta' - \delta \approx 0$, więc $a - a' = 0$, gdyż jedyną niekończenie małą w $\mathbf{R}$ jest 0.

Zbiór liczb $x \in {}^*\mathbf{R}$, które są nieskończenie bliskie liczbie $a \in \mathbf{R}$ nazywamy monadą liczby a: $mon(a) = \{x \in {}^*\mathbf{R} : x - a \approx 0\}$. Powyższy fakt mówi, że ten fragment zbioru $^*\mathbf{R}$, który składa się z liczb skończonych jest sumą mnogościową monad standardowych liczb rzeczywistych, jak również sumą algebraiczną $mon(0) + \mathbf{R}$. Zbiór $^*\mathbf{R}$ możemy sobie wyobrażać jako „dogęszczoną" i „przedłużoną" oś, w której liczby rzeczywiste są izolowane, a po dołączeniu monad stanowią pewien ograniczony fragment:



Ponieważ naszym celem jet niestandardowy opis miar probabilistycznych, więc porzucamy kuszący wątek przedstawienia pojęć analizy matematycznej na gruncie zbioru $^*\mathbf{R}$ i przechodzimy do pojęcia zbioru wewnętrznego, które będzie grało podstawowową rolę w dalszych rozważaniach. Zacznijmy od przykładu. Weźmy dla każdego $n \in \mathbf{N}$ przedział otwarty (a_n, b_n) i utwórzmy zbiór $A \subset {}^*\mathbf{R}$ składający się z tych $x = [x_n] \in {}^*\mathbf{R}$, dla których φ-prawie wszystkie $x_n \in (a_n, b_n)$. Zauważmy, że zbiór A zależy tylko od a_n i b_n dla n należących do pewnego zbioru z ultrafiltru $\mathcal{U}$. Jak łatwo zauważyć $A = \{x \in {}^*\mathbf{R} : a < x < b,\ a = [a_n],\ b = [b_n]\}$, czyli naturalne jest nazwać A przedziałem. Ta idea konstrukcji podzbiorów zbioru $^*\mathbf{R}$ jest podstawą definicji zbioru wewnętrznego.

Definicja 5. Zbiór $A \subset {}^*\mathbf{R}$ nazywamy wewnętrznym, gdy istnieje ciąg zbiorów $A_n \subset \mathbf{R}$ taki, że $x = [x_n] \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{n : x_n \in A_n\} \in \mathcal{U}$.

Łatwo widać, że otrzymamy ten sam zbiór A zamieniając w ciągu A_n skończoną (ogólniej – φ-miary zero) ilość elementów.

Nie każdy podzbiór zbioru ${}^*\mathbf{R}$ można otrzymać w ten sposób. Nietrudno wykazać, że monady, czy też zbiór $\mathbf{R}$, nie są zbiorami wewnętrznymi. Rozważmy dla przykładu $mon(0)$, czyli zbiór liczb nieskończenie małych, i przypuśćmy, że jest zbiorem wewnętrznym. Wyznaczające go zbiory A_n są niepuste i ograniczone od góry (np. przez 1), mające więc kresy górne $a_n = \sup A_n > 0$. Mamy to wprawdzie tylko dla φ-prawie wszystkich n, ale wybieramy a_n dowolnie dla pozostałych n i nie odgrywają one żadnej roli w dalszym rozumowaniu. Łatwo widać, że liczba $a = [a_n]$ jest kresem górnym zbioru $mon(0)$. Gdyby liczba a należała do $mon(0)$, to $2a$ też byłaby nieskończenie mała, co daje sprzeczność: $a < 2a \in mon(0)$. Gdyby zaś a nie należała do $mon(0)$, to jej część standardowa byłaby dodatnią liczbą rzeczywistą: $0 < st(a) \in \mathbf{R}$. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż monada liczby $\frac{1}{2}st(a)$ rozdziela $mon(0)$ od a, więc a nie może być kresem górnym zbioru $mon(0)$. Zauważmy, że nieznaczna modyfikacja powyższego dowodu daje nam następujący fakt: każdy niepusty i ograniczony od góry zbiór wewnętrzny posiada kres górny. Monady, tak jak i $\mathbf{R}$, kresów nie posiadają.

Dla nas ważne będą te zbiory wewnętrzne, dla których wyznaczające je zbiory A_n są skończone. Nazywamy je zbiorami hiperskończonymi. Dla zbiorów hiperskończonych możemy wprowadzić w naturalny sposób pojęcie mocy:

$$\operatorname{card} A = [\operatorname{card} A_n]$$

Zauważmy że liczba $\operatorname{card} A$ jest elementem zbioru, który zwykle oznacza się przez ${}^*\mathbf{N}$, a który składa się z tych $x = [x_n] \in {}^*\mathbf{R}$, dla których wszystkie (lub, co na jedno wychodzi, φ-prawie wszystkie) x_n są liczbami naturalnymi.

Następujący zbiór umożliwi nam realizację zapowiedzi tytułowej dla miary Lebesgue'a na przedziale $[0,1]$. Niech Ω oznacza zbiór wewnętrzny wyznaczony przez ciąg zbiorów $\Omega_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Zbiór ten jest hiperskończony i $\operatorname{card}\Omega = N + 1$, gdzie $N = [n]$. Pokażemy, że zbiór Ω można zapisać w postaci

$$\Omega = \left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\right\} = \left\{\frac{K}{N} : K \in {}^*\mathbf{N},\ K \leq N\right\}.$$

Najpierw zauważmy, że każda liczba postaci $\frac{K}{N}$ należy do Ω. Niech $K = [k_n]$, $k_n \in \mathbf{N}$. Zauważmy najpierw, że $\frac{K}{N} = \left[\frac{k_n}{n}\right]$ jako konsekwencja definicji działań w ${}^*\mathbf{R}$. Dla φ-prawie wszystkich n mamy $k_n \leq n$, więc ułamek $\frac{k_n}{n}$ należy do Ω_n dla φ-prawie wszystkich n, czyli $\frac{K}{N}$ należy do Ω. Na odwrót, jeśli $x = [x_n] \in \Omega$ to φ-prawie wszystkie x_n należą do Ω_n na podstawie definicji zbioru wewnętrznego, czyli są postaci $\frac{k_n}{n}$ dla pewnych $k_n \leq n$. Oznaczając $K = [k_n]$ mamy $K \leq N$, $K \in {}^*\mathbf{N}$ oraz $x = \frac{K}{N}$, co należało dowieść.

Zbiór Ω, który na gruncie niestandardowym możemy traktować jako skończony, jest w istocie nieprzeliczalny. Wynika to choćby z tego, że odwzorowanie

$$st : \Omega \to [0,1]$$

jest suriekcją.

Jeśli A jest wewnętrznym podzbiorêm zbioru Ω to łatwo zauważyć, że jest on hiperskończony (wyznaczające go A_n są podzbiorami Ω_n). Zatem na rodzinie wszystkich wewnętrznych podzbiorów Ω, którą oznaczamy przez $\mathcal{A}$, możemy doprowadzić unormowaną miarę liczącą za pomocą wzoru

$$\mu(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{\operatorname{card}^* A}{N+1}$$

Niestety $\mathcal{A}$ nie jest σ-algebrą (wynika to z poniżej udowodnionego faktu) i μ jest tylko skończenie aktywna. Rozszerzymy μ do miary przeliczalnie addytywnej korzystając z twierdzenia Caratheodory'ego. W tym celu udowodnijmy najpierw pewną ważną własność zbiorów wewnętrznych.

Twierdzenie Caratheodory'ego. Jeżeli μ jest miarą (przeliczalnie addytywną) na algebrze zbiorów $\mathcal{A}$, to można ją jednoznacznie przedłużyć do miary określonej na σ-algebrze generowanej przez $\mathcal{A}$.

Fakt. Niech $\{A^m\}$ będzie ciągiem zbiorów wewnętrznych. Jeśli dla każdego $m \in \mathbf{N}$ mamy $\bigcap_{i=1}^{m} A^i \neq \emptyset$, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} A^i \neq \emptyset$.

Dowód. Niech A^i będzie wyznaczony przez $\{A^i_n\}$. Dla φ-prawie wszystkich n mamy $A^1_n \neq \emptyset$. Możemy przyjąć, że wszystkie A^1_n są niepuste modyfikując je, jeśli to konieczne, na pewnym nieistotnym zbiorze wskaźników n. Dla każdego n kładziemy

$$\alpha_n = \max\left\{k \leq n : \bigcap_{i=1}^{k} A^i_n \neq \emptyset\right\},$$

(odnotujmy, że $1 \leq \alpha_n \leq n$) i wybieramy $x_n \in \bigcap_{i=1}^{\alpha_n} A^i_n$.

Wykażemy, że $x = [x_n] \in A^j$ dla każdego j, co dowodzi niepustości przecięcia. Ustalmy dowolne j i wykażemy, że $\{n : x_n \in A_n^j\} \in \mathcal{U}$. Ponieważ $\{n : x_n \in A_n^j\} \supseteq \{n : \alpha_n \geq j\}$, więc wystarczy dowieść, że $\{n : \alpha_n \geq j\} \in \mathcal{U}$. Zbiór $\bigcap_{i=1}^{j} A^i$ jest wewnętrzny i jest wyznaczony przez $\left\{\bigcap_{i=1}^{j} A_n^i\right\}$. Jest on niepusty, więc $Z_1 = \left\{n : \bigcap_{i=1}^{j} A_n^i \neq \emptyset\right\} \in \mathcal{U}$. Jest jasne, że $Z_2 = Z_1 \cap \{n : n \geq j\} \in \mathcal{U}$ oraz $Z_2 \subseteq \{n : \alpha_n \geq j\}$, a więc ostatni zbiór należy do $\mathcal{U}$, co należało wykazać.

Wniosek. Niech A^i, dla $i \in \mathbf{N}$, będą zbiorami wewnętrznymi. Jeżeli $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest wewnętrzny, to $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ dla pewnego k.

Dowód. Zbiory $B_m = A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ są wewnętrzne oraz $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \emptyset$. Wobec tego $\bigcap_{m=1}^{k} B_m = \emptyset$ dla pewnego k, czyli $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

P.A. Loeb, *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and application in probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 113-122.

Powyższy wniosek umożliwia nam skorzystanie z twierdzenia Caratheodory'ego. Przez $\mathcal{A}_L$ oznaczamy σ-algebrę będącą rozszerzeniem algebry $\mathcal{A}$, a przez μ_L rozszerzenie μ do miary przeliczalnie addytywnej (nazywamy ją miarą Loeba).

Przytoczmy teraz bez dowodu twierdzenie pokazujące związek miary Lebesgue'a m z miarą μ_L.

Twierdzenie. Jeżeli zbiór $B \subset [0,1]$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, to $st^{-1}(B) \cap \Omega$ należy do $\mathcal{A}_L$ oraz

$$m(B) = \mu_L\left(st^{-1}(B) \cap \Omega\right).$$

Prawdziwy jest również fakt mówiący, że dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A}_L$ istnieje zbiór wewnętrzny $A' \in \mathcal{A}$ taki, że $\mu_L\big((A \setminus A') \cup (A' \setminus A)\big) = 0$. Otrzymujemy więc równość

$$m(B) = \mu\Big(\big(st^{-1}(B) \cap \Omega\big)'\Big),$$

co daje oczekiwaną reprezentację miary Lebesgue'a przez unormowaną miarę liczącą. Prawdziwe jest też uogólnienie powyższego twierdzenia dające hiperskończoną reprezentację dowolnej probabilistycznej miary Radona na przestrzeni Hausdorffa.

Analiza niestandardowa daje też inne możliwości opisu miar. Można na przykład wykazać istnienie gęstości dla szerokiej klasy miar obejmującej, co najbardziej spektakularne, miary Diraca (punktowe). Gęstość miary Diraca skoncentrowanej w 0 może być dana na przykład następującym, znanym skądinąd, wzorem: $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp(-x^2/2\sigma^2)$, gdzie σ jest dowolną liczbą nieskończenie małą. Ale to już zupełnie inna historia...

Na koniec wybór kilku książek od klasycznej pracy Robinsona po najnowszy wybór artykułów pod redakcją Cutlanda, który zawiera zarówno przystępne wprowadzenie w analizę niestandardową, jak i ukazuje szeroki zakres jej zastosowań.

Literatura

A. Robinson, *Nonstandard Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1966.

K.D. Stroyan & W.A.J. Luxemburg, *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, Academic Press, New York 1976.

M. Davis, *Applied Nonstandard Analysis*, Wiley, New York 1977 (przetłumaczona na język rosyjski).

A.E. Hurd & P.A. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, New York 1985.

S. Albeverio, E. Fenstad, R. Høegh-Krohn & T. Lindstrøm, *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, Academic Press, New York 1986.

N. Cutland (ed.), *Nonstandard Analysis and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.