O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii

Bernhard RIEMANN

Z trzynastego tomu Rozpraw Królewskiego Towarzystwa Nauk w Getyndze

Plan badań

Powszechnie wiadomo, że geometria w punkcie wyjścia swych badań przyjmuje jako dane zarówno pojęcie przestrzeni, jak i pewne pojęcia pierwsze, podstawowe dla konstrukcji w przestrzeni. Podaje ona dla tych pojęć definicje wyłącznie nominalne, podczas gdy ich istotne własności są ujęte w formie aksjomatów. Wzajemny stosunek tych założeń pozostaje w ciemności; nie bada się, czy związek jest konieczny, jak głęboko on sięga, ani – *a priori* – czy jest on możliwy.

Niejasności te nie zostały usunięte ani przez matematyków, poczynając od Euklidesa a na Legendre – by wymienić najsłynniejszego z ostatnio działających badaczy geometrii – skończywszy, ani przez tych filozofów, którzy tymi problemami się zajmowali. Uzasadnieniem takiego stanu rzeczy mógłby być zapewne fakt nie opracowania ogólnego pojęcia wielokrotnie rozciągłej wielkości, które to pojęcie obejmuje również wielkości przestrzenne. Postawiłem sobie przeto zadanie skonstruowania pojęcia wielokrotnie rozciągłej wielkości, przyjmując w punkcie wyjścia ogólne pojęcie wielkości. Stąd wyniknie stwierdzenie, że w wielokrotnie rozciągłej wielkości możliwe są różne stosunki miarowe, oraz że przestrzeń jest tylko szczególnym przypadkiem trzykrotnie rozciągłej wielkości. Z tego stwierdzenia wynika jednak wniosek, że twierdzeń geometrii nie można wyprowadzić z ogólnego pojęcia wielkości, lecz że te własności, które odróżniają ją od innych znanych, trzykrotnie rozciągłych wielkości, mogą być zaczerpnięte tylko z doświadczenia. Pojawia się zatem zadanie odszukania najprostszych faktów, na podstawie których można określić stosunki miarowe przestrzeni – zadanie, które z natury rzeczy nie jest jednoznaczne, ponieważ można podać wiele systemów najprostszych faktów, na podstawie których możnaby to uczynić; najważniejszym z nich, ze względu na obecny cel, jest system, który został przyjęty za podstawę przez Euklidesa. Te fakty, jak wszystkie fakty, nie są konieczne; są one hipotezami, którym przysługuje jedynie pewność empiryczna. Można badać ich prawdopodobieństwo, które wprawdzie w granicach obserwacji jest bardzo duże i następnie wydawać sąd o dopuszczalności ich rozszerzenia poza granice obserwacji, zarówno w stronę niemierzalnie wielkiego, jak i w stronę niemierzalnie małego.

I. Pojęcie *n*-krotnie rozciągłej wielkości

Przystępując do pierwszego z zapowiedzianych zadań, to znaczy do konstrukcji pojęcia wielokrotnie rozciągłej wielkości, wierzę, że mogę mieć prawo do pobłażliwej oceny, ponieważ nie jestem wprawny w pracy typu filozoficznego, której trudność skupia się raczej w sferze pojęć, niż w ich konstrukcji. Poza tym nie dysponowałem żadnymi wcześniejszymi pracami, które by dotyczyły tematu, poza kilkoma bardzo krótkimi wzmiankami, które Pan Tajny Radca Gauss uczynił w swej drugiej rozprawie o reszcie dwukwadratowej, zamieszczonej w *Göttingenschen gelehrten Anzeigen*, oraz w swej pracy jubileuszowej, a także poza niektórymi filozoficznymi badaniami Herbarta.

Chodzi o prace *Methode der kleinsten Quadrate* (1821, 1823) i *Disquisitiones circa superficies curvas* (1827).

1

Utworzenie pojęcia wielkości jest możliwe tylko wtedy, gdy istnieje ogólne pojęcie dopuszczające różne sposoby oznaczenia. Te sposoby oznaczenia, w zależności od tego, czy pomiędzy nimi istnieje ciągłe przejście od jednego do drugiego, czy nie, tworzą ciągłą lub dyskretną rozmaitość. W pierwszym przypadku poszczególne sposoby oznaczenia nazywają się punktami, w drugim – elementami danej rozmaitości. Pojęcia, w których sposoby oznaczenia tworzą dyskretną rozmaitość, spotyka się tak często, że dla dowolnych przedmiotów – przynajmniej w bardziej rozwiniętych językach – można znaleźć pojęcie, w którym byłyby one zawarte (i dlatego matematycy w trakcie rozwijania nauki o wielkościach dyskretnych mogliby zakładać jednorodność danych rzeczy). Przeciwnie, sposobność do tworzenia pojęć, których sposoby oznaczenia tworzyłyby ciągłą rozmaitość, w życiu codziennym zdarza się tak rzadko, że miejsca przedmiotów zmysłowych i barwy są chyba jedynymi prostymi pojęciami, których sposoby oznaczenia tworzą wielokrotnie rozciągłą rozmaitość. Dopiero na terenie matematyki wyższej częściej napotyka się okazję do utworzenia takich pojęć.

Tłumaczył Jacek DEMBEK, Kraków

Oddzielne części rozmaitości, wyróżnione za pomocą jakiejś cechy lub granicy, nazywają się wielkościami. Pod względem ilościowym można je porównywać przez liczenie – w przypadku rozmaitości dyskretnych, lub przez pomiar – w przypadku rozmaitości ciągłych. Mierzenie polega na przykładaniu do siebie mierzonych wielkości i wymaga ono istnienia jakiegoś środka lub sposobu umożliwiającego przeniesienie jednej wielkości, przyjętej za jednostkę, do innej. Jeśli taki sposób nie istnieje, to dwie wielkości można ze sobą porównywać tylko wtedy, gdy jedna z nich jest częścią drugiej i w tym przypadku można jedynie stwierdzić, która z nich jest większa lub mniejsza, pytania zaś ilościowe muszą pozostać bez odpowiedzi. Badania, które można w tym przypadku przeprowadzić, tworzą jakąś ogólną część nauki o wielkościach, niezależną od określeń miary, gdzie nie przyjmuje się, że wielkości istnieją niezależnie od położenia i są wyrażalne za pomocą jednostki, lecz uważa się je raczej za obszary w jakiejś rozmaitości. Takie badania stały się koniecznymi w pewnych działach matematyki, na przykład w teorii wielowartościowych funkcji analitycznych. Niedostateczny rozwój tych badań stał się chyba główną przyczyną, dla której słynne twierdzenie Abela i osiągnięcia Lagrange'a, Pfaffa i Jacobiego tak długo pozostawały bezowocne na terenie ogólnej teorii równań różniczkowych. Dla naszego obecnego celu wystarcza, by z tej ogólnej części nauki o rozciągłych wielkościach, gdzie nie czyni się żadnych założeń, które nie zawierałyby się w samym pojęciu tychże wielkości, wydzielić dwa punkty, z których pierwszy dotyczy skonstruowania pojęcia wielokrotnie rozciągłej wielkości, drugi zaś sprowadzenia określeń położenia w danej rozmaitości do określeń ilościowych, co uwyraźni te cechy rozmaitości, które są istotne dla n-krotnej rozciągłości.

2

Załóżmy, że pewnemu pojęciu odpowiada zbiór sposobów oznaczeń tworzących rozmaitość ciągłą, przy czym od jednego sposobu oznaczenia do innego można przejść na jeden, określony sposób. Wówczas wszystkie sposoby oznaczenia, przez które przechodzi się, tworzą jednokrotnie rozciągłą rozmaitość, której istotną cechą jest to, że z każdego jej punktu można wyjść tylko w dwóch kierunkach; do przodu i do tyłu. Wyobraźmy sobie dalej, że taka rozmaitość przechodzi w inną, całkiem różną i to znów w jeden, określony sposób, to znaczy, że każdy jej punkt przechodzi w określony punkt tej drugiej. Wówczas wszystkie sposoby oznaczenia, przez które przechodzi się, tworzą dwukrotnie rozciągłą rozmaitość. W podobny sposób otrzymujemy trzykrotnie rozciągłą rozmaitość, gdy wyobrazimy sobie, że dwukrotnie rozciągła rozmaitość przechodzi w określony sposób w inną. Łatwo domyślić się, w jaki sposób można tę konstrukcję poprowadzić dalej. Jeśli, zamiast uważać dane pojęcie za dopuszczające różne oznaczenia, rozważalibyśmy jego przedmiot jako zmienny, to powyższa konstrukcja mogłaby zostać określana jako składanie zmienności o $n + 1$ wymiarach ze zmienności o n wymiarach ze zmiennością o jednym wymiarze.

3

Pokażę obecnie, w jaki sposób – na odwrót – można rozłożyć zmienność w danej dziedzinie na zmienność o wymiarze jeden i zmienność o mniejszym wymiarze. W tym celu wyobraźmy sobie pewien zmieniający się punkt na pewnej rozmaitości wymiaru jeden (przy czym punktowi temu przyporządkowujemy wynik pomiaru od pewnego początkowego punktu rozmaitości tak, że poszczególne wyniki pomiaru są ze sobą porównywalne), który przebiega w sposób ciągły wszystkie punkty tej rozmaitości. Innymi słowy, przyjmijmy, że na danej rozmaitości określona jest pewna ciągła funkcja miejsca, która nie jest stała wzdłuż pewnej części tej rozmaitości. Każdy zbiór punktów, w którym funkcja ma jakąś stałą wartość, tworzy wówczas rozmaitość o wymiarze mniejszym niż wymiar danej rozmaitości. Przy zmianie tych wartości odpowiadające im rozmaitości przechodzą w siebie sposób ciągły. Można zatem przyjąć, że z jednej z nich otrzymujemy wszystkie pozostałe i to w ten sposób, że każdy punkt jednej z nich przechodzi w określony punkt innej. Sytuacje wyjątkowe, mimo iż ich zbadanie jest ważne, można w tym momencie pozostawić bez omówienia. Określenie położenia w danej rozmaitości zostaje sprowadzone w opisany powyżej sposób do podania jakiegoś oznaczenia wielkościowego i określenia położenia w pewnej rozmaitości, której rozciągłość jest mniejsza od rozciągłości rozmaitości wyjściowej. Łatwo jest pokazać, że jeśli wyjściowa rozmaitość jest n-krotnie rozciągła, to rozmaitość otrzymywana w wyniku powyższej konstrukcji jest $(n-1)$-krotnie rozciągła. Poprzez n-krotne powtórzenie tego samego zabiegu określenie położenia w pewnej n-krotnie rozciągłej rozmaitości zostaje sprowadzone do określenia n oznaczeń wielkościowych, a zatem, określenie położenia w danej rozmaitości, jeśli jest to możliwe, sprowadza się do określenia skończonej liczby wartości liczbowych. Istnieją jednakże takie

Chodzi po prostu o liczbę.

rozmaitości, w których dla określania położenia potrzeba nieskończonego ciągu lub nawet ciągłej rozmaitości wartości liczbowych. Takie rozmaitości tworzą, na przykład, funkcje określone na danym zbiorze, możliwe kształty figur przestrzennych, itp.

II. Stosunki miarowe na rozmaitości n-wymiarowej, przy założeniu, że linie posiadają długości niezależne od położenia, tak, że każda linia jest mierzalna za pośrednictwem każdej

Po skonstruowaniu pojęcia n-krotnie rozciągłej rozmaitości i znalezieniu jej istotnej cechy stwierdzającej, że określenie położenia w niej daje się sprowadzić do określenia n oznaczeń wielkościowych, możemy przystąpić do rozwiązania drugiego z postawionych wcześniej zadań – do zbadania stosunków miarowych możliwych na takiej rozmaitości oraz warunków wystarczających do określenia tych stosunków. Stosunki te można badać jedynie za pomocą abstrakcyjnych pojęć wielkości i w związku z tym można je opisywać jedynie za pomocą formuł. Przy pewnych założeniach można je jednak sprowadzić do takich stosunków, które – rozpatrywane z osobna – dopuszczają pewne geometryczne przedstawienia i dzięki temu możliwym się staje przedstawienie rezultatów rachunków w sposób geometryczny. Choć nie da się uniknąć abstrakcyjnego badania za pomocą formuł, koniecznego do tego, by oprzeć się na pewnych podstawach, jednak rezultaty tego badania dadzą się przedstawić w geometrycznej szacie. Podstawy tych rozważań zawarte są w słynnej rozprawie Pana Tajnego Radcy Gaussa o powierzchniach zakrzywionych.

1

Określenie miary wymaga, by wielkości były niezależne od położenia. Niezależność ta może być pojmowana na różne sposoby. Pierwszym z założeń, które narzucają się, i które chcę tu przyjąć, jest założenie, że długość linii jest niezależna od położenia, a co za tym idzie, że każda linia może być mierzona za pomocą każdej. Jeśli określenie położenia zostało sprowadzone do oznaczeń wielkościowych, to znaczy, położenie punktu w danej n-krotnie rozciągłej rozmaitości wyraża się przez n zmiennych wielkości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to określenie linii sprowadza się do zadania wielkości x jako funkcji jednej zmiennej. Zadanie nasze przybiera wówczas postać: podać matematyczną formułę wyrażającą długość linii. Dla zrealizowania tego jest koniecznym, by wielkości x można było wyrazić za pomocą pewnych jednostek. Powyższe zadanie będę rozpatrywał przy pewnych ograniczeniach; ograniczam się najpierw do tych linii, w których związki między wielkościami dx (tzn. odpowiednimi przyrostami wielkości x) zmieniają się w sposób ciągły. Można wówczas przyjąć, że linie te da się rozłożyć na elementy, we wnętrzu których związki między wielkościami dx mogą być uważane za stałe i w tym przypadku zadanie sprowadza się do tego, by dla każdego punktu podać ogólne wyrażenie dla wychodzącego z niej elementu linii dx, które to wyrażenie będzie zawierało wielkości x i dx. Po drugie, zakładam że, jeśli pominąć wielkości drugiego rzędu, długość elementu linii pozostaje niezmienna, gdy wszystkie jego punkty doznają tej samej nieskończenie małej zmiany położenia, z którego to założenia wynika wniosek, że gdy wszystkie wielkości dx rosną w tym samym stosunku, to element linii zmienia się również w tym samym stosunku.

Przy powyższych założeniach element linii może być dowolną jednorodną funkcją stopnia pierwszego wielkości dx, która pozostaje niezmieniona, gdy wszystkie wielkości dx zmieniają swój znak, i w której wszystkie współczynniki są ciągłymi funkcjami wielkości x. By znaleźć najprostsze przypadki, szukam najpierw wyrażenia dla $(n-1)$-krotnie rozciągłych rozmaitości, które są wszędzie jednakowo oddalone od początkowego punktu elementu linii, to znaczy, szukam ciągłej funkcji miejsca, która rozróżnia te rozmaitości między sobą. Funkcja ta będzie malała lub rosła we wszystkich kierunkach od punktu początkowego; zakładam, że wzrasta ona we wszystkich kierunkach, a zatem w punkcie tym ma ona minimum. Wówczas, jeśli pierwsza i druga pochodna tej funkcji jest nieskończona, to różniczka pierwszego rzędu musi znikać, zaś różniczka drugiego rzędu nie może stać się ujemną, zakładam więc, że pozostaje ona zawsze dodatnia. To wyrażenie różniczkowe pozostaje stałe, jeśli ds pozostaje stałe i wzrasta w stosunku kwadratowym, jeśli wszystkie wielkości dx, a zatem również ds, zmieniają się w tym samym stosunku. Wynika stąd, że wyrażenie to jest równe ds^2 pomnożonemu przez pewną stałą, a zatem ds jest równe pierwiastkowi kwadratowemu z pewnej zawsze dodatniej jednorodnej funkcji całkowitej drugiego stopnia wielkości dx, której współczynniki są ciągłymi funkcjami wielkości x.

Dla przestrzeni, na przykład, jeśli położenie punktu wyraża się we współrzędnych prostokątnych, to $ds = \sqrt{\sum(dx)^2}$, a zatem przestrzeń należy do tego najprostszego przypadku. Następny najprostszy przypadek obejmowałby zapewne te rozmaitości, w których element linii daje się przedstawić jako pierwiastek czwartego stopnia z pewnego wyrażenia różniczkowego tegoż stopnia. Badanie tego ogólniejszego rodzaju nie wymagałoby co prawda żadnych istotnie nowych podstaw, lecz byłoby dość żmudne i rzucałoby stosunkowo mało nowego światła na naukę o przestrzeni, zwłaszcza, że rezultaty nie mogłyby być przedstawione geometrycznie.

Ograniczę się zatem do tych rozmaitości, w których element linii wyraża się przez pierwiastek kwadratowy z pewnego wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia. Wyrażenie takie można przekształcić w inne, podobne, podstawiając za n niezależnych zmiennych funkcje nowych n niezależnych zmiennych. Nie można jednak w ten sposób przekształcać każdego wyrażenia w każde. Wyrażenie to bowiem zawiera $n(n+1)/2$ współczynników, które są dowolnymi funkcjami niezależnych zmiennych; przy wprowadzeniu nowych zmiennych spełnionych będzie n relacji, a zatem tylko n współczynników przyjmie zadaną wartość. Pozostałe $n(n-1)/2$ współczyników jest więc określonych przez naturę opisywanej rozmaitości, a zatem dla określania stosunków miarowych potrzeba jeszcze $n(n-1)/2$ funkcji miejsca. Te rozmaitości, w których – jak ma to miejsce na płaszczyźnie i w przestrzeni – element linii daje się sprowadzić do postaci $\sum(dx)^2$, tworzą szczególny przypadek badanych tutaj rozmaitości. Zasługują one na odrębną nazwę i dlatego te rozmaitości, w których kwadrat elementu linii daje się sprowdzić do sumy kwadratów niezależnych różniczek, będę nazywać płaskimi. By obecnie móc przejrzeć istotne własności wszystkich rozmaitości przedstawialnych we wskazanej formie, konieczne jest usunięcie tych własności, które zależą tylko od sposobu przedstawienia, co można osiągnąć przez odpowiedni, dokonany według pewnej zasady, wybór zmiennych.

2

Wyobraźmy sobie w tym celu system najkrótszych linii wychodzących z dowolnie obranego punktu. Położenie dowolnego punktu może być określone przez kierunek najkrótszej linii, na której on leży i przez jego oddalenie (wzdłuż tej linii) od punktu początkowego. Można je zatem określić za pomocą stosunków wielkości dx^0, to znaczy wielkości dx w początku tej najkrótszej linii, i przez długość s tej linii. W miejsce wielkości dx^0 podstawmy teraz utworzone z nich wyrażenia liniowe $d\alpha$ takie, by wartość kwadratu elementu linii w punkcie początkowym była równa sumie kwadratów wyrażeń $d\alpha$. Zmiennymi niezależnymi są wówczas wielkość s i stosunki wielkościowe $d\alpha$. Wreszcie, w miejsce $d\alpha$ wstawiamy proporcjonalne do nich wielkości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takie, by suma kwadratów była równa s^2. Po wprowadzeniu tych wielkości, dla nieskończenie małych wartości x kwadrat elementu linii będzie równy $\sum(dx)^2$, przy czym człon następnego rzędu będzie jednorodnym wyrażeniem drugiego stopnia $n(n-1)/2$ wielkości $(x_1dx_2 - x_2dx_1), (x_1dx_3 - x_3dx_1), \ldots$, a więc będzie wielkością nieskończenie małą czwartego rzędu. Jeśli tę wielkość podzielimy przez kwadrat pola powierzchni nieskończenie małego trójkąta, w którego wierzchołkach zmienne przybierają wartości $(0, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$, to otrzymamy wielkość skończoną. Wielkość ta zachowuje tę samą wartość dopóki wielkości x i dx zawarte są w tych samych dwumiennych formach liniowych, albo dopóki obie najkrótsze linie, od wartości 0 do wartości x i od wartości 0 do wartości dx, pozostają w tym samym elemencie płaskim, i zależy tylko od położenia i kierunku tego elementu. Wielkość ta jest, oczywiście, równa zeru, jeśli przedstawiona rozmaitość jest płaska, to znaczy, jeśli kwadrat elementu linii daje się sprowadzić do $\sum(dx)^2$, może więc ona być uważana za miarę odchylenia rozmaitości do płaskości w tym punkcie i kierunku płaskim. Pomnożona przez $-3/4$ jest ona równa wielkości, którą Pan Tajny Radca Gauss nazwał miarą krzywizny powierzchni. Powyżej wykazano, że dla określenia stosunków miarowych pewnej n-krotnie rozciągłej i przedstawialnej w rozpatrywanej formie rozmaitości potrzeba podać $n(n-1)/2$ funkcji miejsca. Jeśli zatem dana będzie miara krzywizny w każdym punkcie w $n(n-1)/2$ kierunkach płaskich to na tej podstawie będzie można określić stosunki miarowe tej rozmaitości, o ile tylko pomiędzy tymi wartościami, nie zachodzą relacje identyczności, co w rzeczywistości, mówiąc ogólnie, nie ma miejsca. Stosunki miarowe tych rozmaitości, w których element linii wyraża się przez pierwiastek kwadratowy z pewnego wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, dają się zatem wyrazić w sposób całkowicie niezależny od wyboru zmiennych. W analogiczny sposób można dojść do tego stwierdzenia w przypadku rozmaitości, w których element linii wyraża się przez jakieś mniej proste wyrażenie, na przykład jako pierwiastek czwartego stopnia z wyrażenia różniczkowego czwartego stopnia.

Element linii, mówiąc ogólnie, nie dałby się wówczas sprowadzić do formy pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów wyrażeń różniczkowych, a zatem w wyrażeniu dla kwadratu elementu linii odchylenie od płaskości byłoby wielkością nieskończenie małą drugiego rzędu, podczas gdy w przypadku wcześniej rozpatrywanych rozmaitości było ono wielkością nieskończenie małą czwartego rzędu. Z powodu tej cechy ostatnio omawianych rozmaitości, można by je nazwać płaskimi w nieskończenie małym. Najważniejszą jednak, ze względu na przyjęty cel, cechą szczególną tych rozmaitości, która to cecha sprawia, że są one oddzielnie badane, jest chyba to, że stosunki miarowe dwukrotnie rozciągłej rozmaitości dają się przedstawić geometrycznie za pośrednictwem powierzchni, zaś stosunki wielokrotnie rozciągłych rozmaitości mogą być sprowadzone do stosunków zawartych w nich powierzchni. Ta ostatnia uwaga wymaga krótkiego omówienia.

3

W trakcie badania powierzchni miesza się ich wewnętrzne stosunki miarowe, które dotyczą jedynie długości dróg na powierzchni, ze stosunkami wyrażającymi położenie tych powierzchni względem punktów znajdujących się poza nimi. Od tych zewnętrznych stosunków można jednak abstrahować poprzez utożsamienie ze sobą wszystkich powierzchni powstających z danej w wyniku takich przekształceń, które nie zmieniają długości linii na tych powierzchniach, to znaczy w wyniku zginania bez rozciągania. W ten sposób, na przykład, utożsamia się z płaszczyzną dowolne powierzchnie cylindryczne i stożkowe, ponieważ można je otrzymać z płaszczyzny poprzez wyginanie jej, przy czym wewnętrzne stosunki miarowe nie zmieniają się i wszystkie twierdzenia o tych stosunkach, a więc cała planimetria, zachowują swą ważność. Przeciwnie, powierzchnie te okazują się być całkiem różne od sfery, której nie można bez rozciągania przekształcić w płaszczyznę. W myśl poprzednich badań, wewnętrzne stosunki miarowe dwukrotnie rozciągłej wielkości w każdym punkcie będą określone przez miarę krzywizny, jeśli tylko element linii da się wyrazić jako pierwiastek kwadratowy z pewnego wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, jak to ma miejsce w przypadku powierzchni. W przypadku powierzchni miara krzywizny posiada poglądowe przedstawienie: jest ona bowiem równa iloczynowi dwu krzywizn powierzchni w tym punkcie, lub inaczej : iloczyn tej wielkości i pola pewnego nieskończenie małego trójkąta utworzonego z najkrótszych linii jest równy połowie nadwyżki sumy jego kątów ponad dwa kąty proste w częściach promienia. Pierwsze określenie zakładałoby twierdzenie, że iloczyn obu promieni krzywizny nie zmienia się przy zginaniu powierzchni, drugie zaś, że nadwyżka sumy kątów nieskończenie małego trójkąta ponad dwa kąty proste jest proporcjonalna do pola tego trójkąta. Aby uzmysłowić znaczenie miary krzywizny n-krotnie rozciągłej rozmaitości w danym jej punkcie i zawierającym go kierunku płaskim, trzeba wyjść od faktu, że najkrótsza linia wychodząca z danego punktu jest w pełni określona przez swój kierunek początkowy. Jeśli zatem wszystkie kierunki początkowe, wychodzące z danego punktu i zawarte w danym elemencie powierzchni przedłużmy do najkrótszych linii, to otrzymamy pewną określoną powierzchnię, której miara krzywizny w tym punkcie jest równa mierze krzywizny danej n-krotnie rozciągłej rozmaitości w danym punkcie i danym kierunku płaskim.

Chodzi tu o miarę łukową.

4

Zanim zastosujemy naszą teorię do przestrzeni, należy jeszcze poczynić pewne obserwacje dotyczące rozmaitości płaskich w ogólności, a więc tych rozmaitości, w których kwadrat elementu linii daje się przedstawić jako suma kwadratów różniczek zupełnych.

Miara krzywizny płaskiej n-krotnie rozciągłej rozmaitości jest równa zero w każdym punkcie i w każdym kierunku płaskim tej rozmaitości. Wiemy z wcześniejszych rozważań, że do określania stosunków miarowych wystarczy wiedzieć, że w każdym punkcie, w $n(n-1)/2$ kierunkach, w których miary krzywizny są od siebie nawzajem niezależne, miara ta jest równa zero. Rozmaitości, w których miara krzywizny jest w ogóle równa zero, stanowią szczególny przypadek tych rozmaitości, których miara krzywizny jest wszędzie stała. Wspólny charakter tych rozmaitości, których miara krzywizny jest stała, wyraża się poprzez własność polegającą na tym, że w rozmaitościach tych figury mogą się poruszać bez rozciągania. Istotnie – figury nie mogłyby być w nich dowolnie obracane i przesuwane, gdyby miara krzywizny nie była taka sama w każdym punkcie i we wszystkich kierunkach. Z drugiej jednak strony, stosunki miarowe na rozmaitości są w pełni określone przez miarę krzywizny, dlatego stosunki miarowe wokół pewnego punktu we wszystkich kierunkach są takie same, jak wokół innego punktu, a zatem można przeprowadzić te same konstrukcje startując od jednego, czy drugiego punktu. Wobec tego w rozmaitościach o stałej mierze krzywizny figury mogą przyjmować dowolne położenie. Stosunki miarowe tych rozmaitości zależą jedynie od wartości miary krzywizny i – co do analitycznego przedstawienia – można zauważyć, że jeśli tę wartość oznaczymy przez α, to wyrażeniu na element linii można nadać postać:

$$\frac{1}{1+(\alpha/4)\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$

5

Dla geometrycznej ilustracji można rozważyć powierzchnię o stałej mierze krzywizny. Łatwo zauważyć, że powierzchnie, których miara krzywizny jest dodatnia, zawsze dadzą się owinąć wokół kuli, której promień jest równy odwrotności pierwiastka z miary krzywizny. Żeby przejrzeć całą mnogość tych powierzchni, nadajmy jednej z nich kształt kuli, pozostałym zaś postać powierzchni obrotowych, stycznych z tą kulą wzdłuż równika. Powierzchnie o mierze krzywizny większej, niż miara krzywizny tej kuli, będą z nią styczne od wewnątrz i będą przyjmowały kształt taki, jak zewnętrzna, odwrócona od osi część powierzchni torusa. Można by je nawinąć na pasy kuli o mniejszym promieniu, przy czym owinięcie to dokonałoby się więcej niż jeden raz. Powierzchnie o mniejszej, dodatniej mierze krzywizny, można otrzymać przez wycięcie z powierzchni sfery części zawartej między dwoma wielkimi półokręgami i połączenie jej wzdłuż linii cięcia. Powierzchnią o mierze krzywizny równej zero będzie powierzchnia cylindryczna, oparta na równiku. Powierzchnie o ujemnej mierze krzywizny będą styczne do tego cylindra od zewnątrz i będą uformowane tak jak wewnętrzna, zwrócona ku osi, część powierzchni torusa. Jeśli wszystkie te powierzchnie potraktujemy jako miejsce dla przemieszczanych w nich kawałków powierzchni, tak, jak przestrzeń jest takim miejscem dla ciał, to kawałki powierzchni we wszystkich tych powierzchniach mogą być przemieszczane bez rozciągania. Powierzchnie o dodatniej mierze krzywizny zawsze można tak uformować, by kawałki powierzchni mogły być dowolnie przemieszczane również bez wyginania – wystarczy mianowicie nawinąć te powierzchnie na pasy kul, czego nie można przeprowadzić w przypadku powierzchni o ujemnej mierze krzywizny. Poza tą niezależnością kawałka powierzchni od położenia, w przypadku powierzchni o mierze krzywizny równej zero ma miejsce również niezależność kierunku od położenia, co nie zachodzi w przypadku pozostałych powierzchni.

III. Zastosowanie do przestrzeni

1

Wychodząc z powyższych badań dotyczących stosunków miarowych n-krotnie rozciągłej wielkości, można obecnie podać warunki konieczne i wystarczające do określania stosunków miarowych przestrzeni, przy założeniu niezależności linii od położenia oraz możliwości przedstawienia elementu linii przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, a zatem przy założeniu płaskości w nieskończenie małym.

Warunki te, po pierwsze, dają się wyrazić w sposób następujący: miara krzywizny w danym punkcie w trzech kierunkach płaskich jest równa zero. Stosunki miarowe przestrzeni są więc określone, gdy suma kątów dowolnego trójkąta jest wszędzie równa dwu kątom prostym.

Zakładając jednak, po drugie, jak uczynił to Euklides, że nie tylko istnienie linii, ale także istnienie brył jest niezależne od położenia, otrzymamy wniosek, że miara krzywizny jest wszędzie stała i wtedy suma kątów dla wszystkich trójkątów jest określona, jeśli tylko jest ona określona dla jednego z nich.

Można by w końcu, po trzecie, zamiast przyjmować niezależność linii od położenia i kierunku, przyjąć niezależność ich długości i kierunku od położenia. Przy takim podejściu zmiany i różnice położenia są wielkościami złożonymi, wyrażalnymi w trzech niezależnych jednostkach.

2

W trakcie dotychczasowych badań oddzieliliśmy stosunki rozciągłościowe albo stosunki dziedzinowe od stosunków miarowych. Stwierdziliśmy, że przy tych samych stosunkach rozciągłości możliwe są różne stosunki miarowe. Zwróciliśmy się wówczas do systemu prostych oznaczeń miarowych, przez które stosunki miarowe przestrzeni są w pełni określone, i z których wszystkie twierdzenia geometrii wynikają jako konieczne wnioski. Pozostaje jeszcze do rozważenia problem, jak, w jakim stopniu i w jakim zakresie założenia te są potwierdzane przez doświadczenie. Pod tym względem zachodzi istotna różnica pomiędzy stosunkami rozciągłości a stosunkami miarowymi, ponieważ dla pierwszych z nich, dla których możliwe przypadki tworzą rozmaitość dyskretną, wyniki doświadczenia wprawdzie nigdy nie są pewne, ale również nie są niedokładne, podczas gdy dla drugich, gdzie możliwe przypadki tworzą rozmaitość ciągłą, wyniki doświadczenia pozostają zawsze niedokładne, choćby prawdopodobieństwo, że są one bliskie dokładności, było duże. Staje się to ważne przy rozszerzaniu tych oznaczeń empirycznych w stronę niemierzalnie wielkich i niemierzalnie małych, gdyż poza granicami obserwacji stosunki miarowe mogą stawać się coraz bardziej niedokładnymi, czego nie można powiedzieć o stosunkach rozciągłości.

Przy rozszerzaniu konstrukcji przestrzennych w stronę niemierzalnie wielkich trzeba rozróżnić własności nieograniczności i nieskończoności. Pierwsza odnosi się do stosunków rozciągłości, druga do stosunków miarowych. To, że przestrzeń jest nieograniczoną trzykrotnie rozciągłą rozmaitością, jest przyjmowanym w każdej koncepcji zewnętrznego świata, według którego to założenia obszar naszego postrzegania jest nieustannie uzupełniany i przeprowadza się w nim konstrukcje możliwych położeń poszukiwanych przedmiotów, które to zastosowania potwierdzają to założenie. Nieograniczności przestrzeni przysługuje zatem pewność empiryczna większa, niż jakiemukolwiek innemu codziennemu doświadczeniu. Stąd jednak w żaden sposób nie wynika nieskończoność; wręcz, gdyby została założona niezależność brył od położenia w przestrzeni, to znaczy, gdyby przestrzeni przypisywano pewną stałą miarę krzywizny, to przestrzeń byłaby skończona, byleby tylko jej miara krzywizny miała wartość dodatnią, choćby najmniejszą. Gdybyśmy leżące w jednym elemencie płaskim kierunki początkowe przedłużyli do najkrótszych linii, otrzymalibyśmy pewną nieograniczoną powierzchnię o stałej, dodatniej mierze krzywizny, więc powierzchnię, która w pewnej płaskiej trzykrotnie rozciągłej rozmaitości przyjęłaby postać powierzchni kulistej, a zatem byłaby ograniczona.

3

Dla wyjaśnienia przyrody pytania o niemierzalnie wielkie są pytaniami zbytecznymi. Inaczej jednak ma się rzecz z pytaniami o niemierzalnie małe. Od dokładności, z jaką potrafimy śledzić zjawiska w nieskończenia małym, istotnie zależy znajomość związków przyczynowych. Postępy w poznaniu przyrody, jakie dokonały się w ostatnich stuleciach, są uzależnione od dokładności konstrukcji, która stała się możliwa dzięki wynalezieniu analizy nieskończonościowej i odkryciu przez Archimedesa, Galileusza i Newtona prostych pojęć podstawowych, którymi posługuje się dzisiejsza fizyka. W tych jednak naukach przyrodniczych, w których do dziś brakuje prostych pojęć podstawowych do takich konstrukcji, w celu poznania związków przyczynowych bada się zjawiska do granicy małości, która to granica jest określona przez możliwości mikroskopu. Pytania o stosunki miarowe przestrzeni w niemierzalnie małych nie należą więc do zbytecznych.

Jeśli założymy, że ciała istnieją niezależnie od położenia, to miara krzywizny jest wszędzie stała i, jak wynika z pomiarów astronomicznych, nie może ona być różna od zera, bądź też – gdyby było inaczej – obszar dostępny naszym teleskopom musiałby być zaniedbywalnie mały w porównaniu z powierzchnią sfery o danej krzywiźnie. Jeżeli jednak taka niezależność ciał od położenia nie ma miejsca, to nie można na podstawie stosunków miarowych w obszarach skończonych wnioskować o stosunkach miarowych w nieskończenie małym; miara krzywizny w każdym punkcie może wówczas mieć dowolną wartość w trzech kierunkach, jeżeli tylko krzywizna każdej mierzalnej części przestrzeni nie jest zauważalnie różna od zera. Jeszcze bardziej skomplikowane stosunki mogłyby mieć miejsce, gdyby nie zachodziła założona możliwość przedstawienia elementu linii przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia. Pojęcia empiryczne, na których opierają się określenia stosunków miarowych w przestrzeni, tzn. pojęcie ciała stałego i promienia świetlnego, zdają się tracić swą ważność w nieskończenie małym. Można więc sobie wyobrazić, że stosunki miarowe przestrzeni w nieskończenie małym nie są zgodne z założeniami geometrii i musielibyśmy to uznać, gdyby zjawiska dały się przez to wytłumaczyć w prostszy sposób.

Pytanie o ważność założeń geometrii w nieskończenie małym wiąże się z pytaniem o wewnętrzną podstawę stosunków miarowych w przestrzeni. W trakcie rozpatrywania tego pytania, które chyba może być jeszcze zaliczone do nauki o przestrzeni, dochodzi do zastosowania uczynionej wyżej uwagi, że dla rozmaitości dyskretnej podstawa stosunków miarowych zawarta jest w pojęciu takiej rozmaitości, w przypadku jednak rozmaitości ciągłej musi ona być wzięta skądinąd. Wynika stąd, że albo leżąca u podstaw przestrzeni rzeczywistość musi tworzyć rozmaitość dyskretną, albo podstawy stosunków miarowych należy szukać na zewnątrz, w siłach wiążących, które na nią działają.

Roztrzygnięcia tego pytania można oczekiwać jedynie wtedy, gdy, wyszedłszy z dotychczasowego, potwierdzonego przez doświadczenie pojmowania zjawisk, któremu podstawy dał Newton, podda się je stopniowej modyfikacji, w sposób podyktowany faktami, których nie da się w oparciu o to pojmowanie wyjaśnić. Badania, które – podobnie, jak badania tu przeprowadzone – wychodzą z pojęć ogólnych, mogą służyć jedynie temu celowi, by praca ta nie napotykała przeszkody ze strony ograniczoności pojęć i by postęp w poznawaniu powiązań pomiędzy rzeczami nie był powstrzymywany przez przyjęte i zakorzenione przesądy.

Wprowadza nas to w dziedzinę innej nauki – fizyki, lecz na wstąpienie w ten obszar nie pozwala nam charakter dzisiejszego wystąpienia.