Geometria i kosmologia – historia wzajemnych związków (II)

Michał HELLER (Specola Vaticana), Zdzisław POGODA, Kraków

Bernhard Riemann i podstawy geometrii

Równolegle z geometriami nieeuklidesowymi prawo obywatelstwa w matematyce zyskały sobie geometrie wyżej wymiarowe. Dzięki pracom A. Cayleya, K. Jacobiego, H. Grassmanna, J. Plückera, L. Schläfliego i innych to, co wydawało się niemożliwe do opisania, stało się bardzo pożytecznym narzędziem w wielu dziedzinach matematyki. Szczególną rolę odegrał tu Bernhard Riemann. W swoim wykładzie habilitacyjnym wygłoszonym także z okazji objęcia katedry w Uniwersytecie w Getyndze w 1854 roku (10 czerwca) pod tytułem „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grundeliegen" (O hipotezach leżących u podstaw geometrii) przedstawił szereg niezwykłych i dalekowzrocznych idei, w oparciu o które powstała później geometria riemannowska, teoria rozmaitości, wykrystalizowała się topologia.

Riemann znacznie rozwinął nowatorskie koncepcje Gaussa; nie ograniczył się do powierzchni, lecz pojęcia wprowadzone przez swojego mistrza uogólnił na twory wielowymiarowe. Riemannowi zawdzięczamy ideę *n* wymiarowej rozmaitości (*n*-Streck) jako rozwinięcie pojęcia powierzchni. Tworząc geometrię rozmaitości Riemann wprowadził pojęcie metryki (nazwanej później metryką Riemanna) – uogólnienie pierwszej formy kwadratowej (elementu liniowego). Zauważył też, że jest to wielkość o podstawowym znaczeniu mogąca służyć za fundament całego gmachu geometrii; metryka opisuje całkowicie geometrię wewnętrzną rozmaitości.

Riemann postawił sobie także pytanie, co jest odpowiednikiem krzywizny Gaussa w przypadku przestrzeni wyżejwymiarowych? Jak możemy rozstrzygnąć, mając daną metrykę, czy geometria, którą ona wyznacza, jest lub nie jest typu euklidesowego? Naturalnie krzywizna Gaussa już tu nie wystarczała. Trzeba było wprowadzić obiekt bardziej skomplikowany; o zakrzywieniu tworu wyżej wymiarowego należało zebrać więcej informacji. Takim obiektem stał się tensor krzywizny Riemanna. Oczywiście nazwa „tensor Riemanna" została wprowadzona znacznie później, jednakże sam Riemann zbadał własności tego tworu i zauważył, że za jego pomocą, można całkowicie opisać zakrzywienie przestrzeni (rozmaitości). Wynika stąd między innymi, że postać lokalnej geometrii naszej przestrzeni (jeśli tylko jest ona rozmaitością) możemy odkryć dokonując pomiarów w samej przestrzeni, bez odwoływania się do jej „otoczenia" – był to wynik wielkiej wagi dla współczesnej kosmologii.

Dzięki swym konstrukcjom Riemann pokazał także, że może istnieć cała rodzina geometrii różnych od euklidesowej i to takich, których własności mogą się zmieniać od punktu do punktu.

W zakończeniu wykładu Riemann zastanawiał się nad tym, która z wielu geometrii może służyć do opisu świata fizycznego zarówno w jego największej, jak i najmniejszej skali. Warto przytoczyć fragment, który nawet w epoce kosmologii relatywistycznej brzmi bardzo nowocześnie:

„Jeżeli założymy – pisał Riemann – że ciała istnieją niezależnie od położenia, to miara krzywizny jest wszędzie stała i, jak wynika z pomiarów astronomicznych, nie może ona być różna od zera, bądź też – gdyby było inaczej – obszar dostępny naszym teleskopom musiałby być zaniedbywalnie mały w porównaniu z powierzchnią strefy o danej krzywiźnie. Jeżeli jednak taka niezależność ciał od położenia nie ma miejsca, to nie można na podstawie stosunków miarowych w obszarach skończonych (*im Grossen*) wnioskować o stosunkach miarowych w nieskończenie małym; miara krzywizny w każdym punkcie może wówczas mieć dowolną wartość w trzech kierunkach, jeżeli tylko krzywizna każdej mierzalnej części przestrzeni nie jest zauważalnie różna od zera. Jeszcze bardziej skomplikowane stosunki mogłyby mieć miejsce, gdyby nie zachodziła założona możliwość przedstawienia elementu linii przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia."

Porównaj zamieszczony w numerze przekład J. Dembka.

Koncepcje Riemanna zostały uściślone i rozwinięte w pracach Christoffela. W 1892 roku M. Ricci wprowadził pojęcie tensora i wspólnie z E. Levi-Civitą rozwinął rachunek tensorowy. Geometria Riemanna uzyskała ścisły kształt i została wzbogacona o nowe eleganckie narzędzia.

Trudno przecenić dzieło Riemanna. Jego wykład inauguracyjny do dziś jest źródłem nowych idei i koncepcji. Oddajmy głos Corneliusowi Lanczosowi:

C. Lanczos, *Albert Einstein i porządek Wszechświata*, PWN Warszawa 1967.

„Zdumiewająca jest dalekowzroczność i trafność przewidywań, którą wykazał Riemann uzasadniając swe na pozór bezużyteczne badania. Twierdził, że w przyszłości może się zdarzyć, iż fizycy będą zmuszeni do wyjścia poza system pojęć newtonowskich. Praca, którą podjął, ma za zadanie utorować drogę temu szerszemu podejściu, aby, gdy owe czasy nadejdą, nauka nie była skrępowana tradycyjnymi uprzedzeniami. Trudno byłoby wyrazić ściślej historyczne znaczenie jego pracy, które zrealizowało się w dziele Einsteina. (...)

Dzieło Riemanna, ważki rezultat przenikliwej myśli matematycznej, tak dalece nie harmonizowało z klimatem intelektualnym owych czasów, że za życia autora w ogóle nie było publikowane i stało się znane w świecie dopiero po jego śmierci. (...) Geometria tego rodzaju nie przemówiła do wyobraźni współczesnych Riemanna, głównie dlatego, że nie mogli oni dotrzec potrzeby odrzucenia prostszego, euklidesowego ujęcia geometrii na rzecz geometrii, która wydawała się im bardziej zawiła i mniej operatywna."

Kłopoty z klasycznym Wszechświatem

Matematyka XIX wieku dostarczała silnych narzędzi przydatnych do opisu przestrzeni fizycznej. Dostarczyła też całej serii alternatywnych modeli geometrii. Wypada tu przynajmniej wspomnieć o programie Kleina i związaniu geometrii z odpowiednią grupą przekształceń. W owym czasie osiągnięcia te przekraczały zapotrzebowania fizyków. Wydawało się, że opis rzeczywistości fizycznej nie będzie nigdy wymagał tak potężnych środków jak zakrzywione przestrzenie Riemanna i rachunek tensorowy.

Jak już wspomnieliśmy, do początków XX wieku triumf święciła mechanika newtonowska rozwinięta przez L. Eulera, J.L. Lagrange'a, W.R. Hamiltona i innych. Newtonowski obraz Wszechświata był bardzo prosty i intuicyjnie przekonywający. Przestrzeń, rozciągająca się nieskończenie we wszystkich kierunkach i niczym nieograniczone trwanie, zwane czasem, stanowią jakby scenę, na której rozgrywają się wszystkie fizyczne procesy. Scena ta jest z rzadka wypełniona materialnymi ciałami oddziaływającymi na siebie za pośrednictwem pola grawitacyjnego. Scena spełnia funkcję „pojemnika", w którym wszystko się dzieje. Procesy „dzieją się" w pojemniku, ale sam pojemnik jest bierny – ani nie bierze udziału w procesach, ani na ich przebieg nie wpływa.

Jednakże od samego początku jeden obiekt nie chciał poddać się wszechwładnym prawom newtonowskiej dynamiki. Tym zbuntowanym obiektem był Wszechświat jako całość. Dynamika klasyczna konsekwentnie stosowana do Wszechświata rozważanego całościowo prowadziła do co najmniej kłopotliwych wyników.

Jeśli Wszechświat jest nieskończony i mniej więcej równomiernie wypełniony materią, to w dowolnym punkcie przestrzeni potencjał grawitacyjny powinien być wielkością nieokreśloną. Na ten fakt, ewidentnie sprzeczny z obserwacjami, zwrócił uwagę Seeliger w 1896 roku. Obok grawitacyjnego paradoksu Seeligera słynny jest jeszcze inny, wcześniejszy – tak zwany fotometryczny paradoks Olbersa z 1823 roku. Nieskończoność Wszechświata gwarantuje, że jasność wszystkich gwiazd, mniej więcej równomiernie wypełniających przestrzeń, nakładając się na siebie, powinna sprawiać świecenie całego nieba jednostajnym blaskiem. Mimo to wieczorne niebo jest ciemne i zachwyca nas światłem z rzadka rozsianych gwiazd.

Można powiedzieć, że w XIX stuleciu pojawiły się już pewne zagadnienia o wyraźnie kosmologicznym charakterze, które po raz pierwszy zaangażowały do tej dziedziny zarówno naukową teorię, jak i badania empiryczne. Dało się zauważyć pierwsze symptomy unaukowiania się kosmologii. Paradoksy fotometryczny i grawitacyjny stanowiły próbę – na razie zakończoną niepowodzeniem – konfrontacji pewnych uznanych teorii z najprostszymi danymi obserwacyjnymi. Próby te stworzyły klimat, w którym mogły się narodzić przyszłe teorie kosmologiczne.

Sytuacja w nauce na początku XX wieku była niezwykle ciekawa. Z jednej strony geometria, dysponująca bogactwem modeli przestała być nauką badającą pewien „zewnętrzny przedmiot" – „rzeczywistą przestrzeń". Z nauki empirycznej stała się nauką formalną. Jako dział matematyki zajmuje ona się wyprowadzaniem wniosków z przyjętych aksjomatów, które wcale nie muszą być konieczne ani oczywiste. Z drugiej strony fizyka, której fundamentem była newtonowska mechanika, wciąż posługiwała się tylko „najlepiej sprawdzonym" modelem geometrii euklidesowej. Lecz właśnie fizycy powinni dać odpowiedź, która z proponowanych geometrii najlepiej pasuje do opisu Wszechświata jako całości, a wiadomo już było, że geometria euklidesowa prowadzi do trudno wytłumaczalnych paradoksów.

Są to rozróżnienia metodologiczne dla nas dziś dość oczywiste, ale na przełomie stuleci świadomość kompetencji gometrii, jako nauki formalnej, i fizyki, jako nauki eksperymentalnej, w dziedzinie badań przestrzeni dopiero się kształtowała. Należy tu odnotować wielkie zasługi Henri Poincarégo. On jako jeden z pierwszych nie tylko zrozumiał, ale i zdecydowanie propagował czysto formalny charakter geometrii. Pomogły mu w tym jego przekonania konwencjonalistyczne: nauka jest zbiorem umów między uczonymi; umowy, stanowiące geometrię i wyrażone w jej aksjomatach nie odnoszą się do świata fizycznego. Ale z drugiej strony konwencjonalizm przeszkodził Poincarému w zrozumieniu właściwego stosunku geometrii do fizyki: jeżeli geometrie są zbiorem umów, to dlaczego do opisu świata nie stosować najprostszej geometrii, to znaczy geometrii Euklidesa? Kurczowe trzymanie się tej myśli przez Poincarégo sprawiło, że to nie on, ale Albert Einstein stał się twórcą szczególnej teorii względności. Poincaré dysponował już całą potrzebną strukturą matematyczną (grupa Poincarégo), ale nie zdobył się na odwagę niekonwencjonalnej (i niekonwencjonalistycznej) jej interpretacji.

Z końcem XIX wieku wydawało się, że na dobre trzeba będzie pogodzić się z faktem, iż zagadnienie struktury Wszechświata jako całości musi pozostać w obszarze domysłów i spekulacji, a kosmologia nigdy nie wejdzie do rodziny nauk empirycznych. Takie przekonanie podtrzymywane było przez fakt, że przedmiot badań kosmologicznych jest unikalny – Wszechświat jest przecież dany tylko w jednym egzemplarzu.

Rewolucja Alberta Einsteina

Wtedy na firmamencie nauki rozbłysła gwiazda pierwszej wielkości – Albert Einstein. W 1905 roku ukazuje się praca pod niewiele mówiącym tytułem „O elektrodynamice ciał w ruchu". Był to przełom w myśleniu fizycznym, mechanika klasyczna stała się teorią historyczną, dobrze opisującą zjawiska fizyczne przy małych prędkościach. Szczególna teoria względności (bo ona to otrzymała życie w pracy Einsteina) jest fizyczną teorią czasu i przestrzeni. We wcześniejszych teoriach czas i przestrzeń występowały jako pojęcia w zasadzie od siebie niezależne. Szczególna teoria względności ukazała ich wzajemne związki i zwróciła uwagę na konieczność unifikacji tych pojęć. Formalnego zabiegu unifikacji dokonał Hermann Minkowski, wprowadzając do fizyki pojęcie czasoprzestrzeni. Pojęcie to umożliwiło zrealizowanie kartezjańskiego programu geometryzacji mechaniki. Minkowski wskazał geometrię, która była adekwatnym modelem dla mechaniki relatywistycznej. Nie było już tak wielkim zaskoczeniem, że najlepsza do tego celu okazała się jedna z geometrii nieeuklidesowych (tzw. geometria pseudoeuklidesowa).

Dzięki pracom Minkowskiego po raz pierwszy pojęcie przestrzeni o więcej niż trzech wymiarach zyskało sobie na dobre prawo obywatelstwa w fizyce. Wspomnieliśmy, że matematycy już wcześniej znali i posługiwali się przestrzeniami wyżej wymiarowymi; stały się one wygodnym narzędziem w pracy nie tylko matematyków lecz także i fizyków. Były to jednak przede wszystkim zabiegi czysto formalne ułatwiające na przykład opis zachowania się mechanicznego układu punktów materialnych (przestrzenie konfiguracyjne). Natomiast czasoprzestrzeń Minkowskiego nie stanowiła tylko formalnej konstrukcji -- linii świata nie należy traktować jako dogodnej metody przedstawiania ruchu w postaci sugestywnego rysunku, lecz jako coś, co rzeczywiście należy do fizycznego świata. Czas stał się dodatkowym wymiarem geometrycznym!

W tym okresie matematycy usilnie poszukiwali precyzyjnego określenia pojęcia wymiaru. Mimo iż posługiwano się nim już prawie sto lat (a pewne idee pojawiły się nawet w XVII wieku), wciąż było to głównie pojęcie intuicyjne; nie istniała porządna definicja, nie istniała teoria. Wcześniej czy później musiało się to stać powodem kłopotów. Skonstruowanie przez G. Peano w 1890 roku krzywej wypełniającej kwadrat oraz wcześniejsze prace Cantora o równoliczności zbiorów ukazały szczególnie dobitnie braki intuicyjnego pojmowania wymiaru. Wprowadzenie do fizyki przez Minkowskiego czterowymiarowej czasoprzestrzeni zasygnalizowało fakt, że wymiar jest również ważnym pojęciem opisującym przestrzeń fizyczną.

Szczególna teoria względności jest teorią w inercjalnych układach odniesienia. Ponadto czasoprzestrzeń szczególnej teorii względności jest pusta; element czasoprzestrzeni – zdarzenie ma charakter czysto potencjalny, informuje tylko o miejscu i czasie – względem odpowiedniego układu odniesienia – w którym coś się może zdarzyć. Powstaje problem uogólnienia szczególnej teorii względności do dowolnych układów odniesienia i wypełnienia czasoprzestrzeni materią. Zagadnienie to podejmuje ogólna teoria względności, stworzona przez Einsteina w ostatecznej wersji w 1915 roku. Ogólna teoria względności, czyli fizyczna teoria czasu, przestrzeni (w dowolnych układach odniesienia) i grawitacji, powstała dzięki natchnionemu geniuszowi Einsteina, a także dzięki temu, że prawie pół wieku wcześniej matematycy przygotowali odpowiedni, subtelny aparat.

Ogólna teoria względności jest teorią wysoce zmatematyzowaną (co było także jednym z powodów nieufności do niej). Dlatego też utarła się opinia, że Einstein był wybitnym matematykiem swobodnie posługującym się najbardziej abstrakcyjnymi matematycznymi teoriami. Nie jest to prawdą, Einstein był przede wszystkim fizykiem i, jak twierdzi wielu wybitnych specjalistów i historyków nauki, nie był najlepszym matematykiem, ale dzięki temu, mógł, nie krępowany zbytnim formalizmem, stworzyć tak brzmienne w skutki teorie fizyczne.

Powszechnie wiadomo, że z najnowszymi ideami geometrii różniczkowej, z pracami Ricciego, Riemanna i Levi-Civity zapoznał Ensteina jego przyjaciel, matematyk Marcel Grossman. W czasie, gdy Einstein pracował nad ogólną teorią względności, zetknął się on z jednym z największych matematycznych umysłów wszystkich czasów – Dawidem Hilbertem. Oto jak Hilbert określał Einsteina:

„Każdy chłopak na ulicach Getyngi więcej rozumie z geometrii czterowymiarowej niż Einstein, a jednak to właśnie Einstein wykonał tę pracę a nie matematycy."

I jeszcze jedna opinia o Einsteinie, tym razem ucznia Hilberta – Hermanna:

J. Mehra, *Einstein, Hilbert and the theory of gravitation* w: *The Physicist's conception of Nature*, D. Reidel Publ. Co. Dordrecht-Holland/Boston USA, 1973.

„Jest on złym rachmistrzem. Powiedział mi, że pracuje raczej pojęciowo. Nie sądzi, że to, co my robimy w Getyndze, jest dobre. On sam nigdy nie myślał tak formalistycznie. Jego wyobraźnia jest ściśle związana z rzeczywistością. Jest on bardzo ostrożny i całkowicie jest fizykiem. Nie robi pośpiesznych uogólnień jak my w Getyndze."

Jądrem ogólnej teorii względności są równania pola (równania Einsteina) wiążące rozkład mas, energii i pędów z geometrią czasoprzestrzeni. Wynika z nich, że pole grawitacyjne można interpretować jako zakrzywienie czasoprzestrzeni. Niosą one też informację, w jaki sposób rozkład materii określa geometrię (zakrzywienie) czasoprzestrzeni i odwrotnie, jak geometria determinuje ruchy mas. Teoria grawitacji została całkowicie zgeometryzowana. Dotychczas próbowano nadać geometrii euklidesowej sens fizyczny. Einstein dokonał czegoś zupełnie odwrotnego, zastępując przy tym tylko geometrię Euklidesa znacznie bardziej ogólną geometrią (Riemanna).

Z matematycznego punktu widzenia należy odnotować dwa trwałe sukcesy teorii względności. Pierwszym było wzbudzenie zainteresowania rozmaitościami z określonymi na nich pseudoriemanowskimi strukturami. Z początku badania tego rodzaju struktur były prawie wyłącznie domeną fizyków, dopiero w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych zaczęły powstawać czysto matematyczne prace im poświęcone. Drugie osiągnięcie zostało z czasem uznane za naturalne, ale wydaje się, że matematycy jeszcze go nie zauważyli. Zwykle w matematyce bada się równania różniczkowe określone na z góry zadanej przestrzeni, natomiast równania pola grawitacyjnego Einsteina są pierwszym znanym przypadkiem równań, które określają przestrzeń (jej strukturę pseudometryczną), na jakiej funkcjonują. Czy nie jest to zapowiedź nowego (trudnego!) rozdziału teorii równań różniczkowych?

Geometryczne wszechświaty ogólnej teorii względności

Jednym z zastosowań ogólnej teorii względności stała się kosmologia relatywistyczna, czyli próba rekonstrukcji struktury – ewolucji Wszechświata w możliwie największej skali w oparciu o aparat pojęciowy ogólnej teorii względności.

W roku 1915 skończyła się prehistoria kosmologii, mogła się zacząć jej historia pisana. Po raz pierwszy można było sensownie postawić pytanie: w jaki sposób masy we Wszechświecie determinują jego geometrię? Pierwsza praca dotycząca kosmologii, już jako dziedziny fizyki, pochodzi od Einsteina. W 1917 roku ukazuje się jego niewielki artykuł zatytułowany: „Kosmologiczne rozważania nad ogólną teorią względności".

Kosmologische Betrachtungen zur algemeinen Relativitätstheorie Suzungsher, Preus. Acad. Wiss. 1. 142-152, (1917).

Por. M. Heller, *Jak Einstein stworzył ogólną teorię względności?*. Postępy Fizyki 39, nr 1, 1988, 3-21. A także M. Heller, J. Życiński, *Wszechświat i Filozofia*, Polskie Towarzystwo Teologiczne Kraków 1986, M. Heller, *Ewolucja kosmosu i kosmologii*, PWN Warszawa 1985.

Praca ta miała dwa korzenie: jeden wyrastał z przeprowadzonej przez Macha krytyki mechaniki newtonowskiej, drugi z racjonalistycznej filozofii Spinozy. Wiadomo, że Einstein studiował Macha i czytywał Spinozę i że obydwaj ci myśliciele wywarli na nim silne wrażenie. Od Spinozy Einstein przejął myśl, że Wszechświat powinien być systemem logicznie zamkniętym; od Macha pewien szczególny przypadek tej idei: bezwładność danego ciała nie jest „wewnętrzną" własnością tego ciała, lecz wynikiem oddziaływań między tym ciałem, a wszystkimi innymi masami wypełniającymi Wszechświat. Tę myśl Einstein nazwał *zasadą Macha* i ona to właśnie stała się głównym motywem pracy nad stworzeniem ogólnej teorii względności, której następstwem były „Kosmologiczne rozważania..."

Należy tu zaznaczyć, że w tym czasie nie była jeszcze do końca wyjaśniona sprawa rozmieszczenia gwiazd we Wszechświecie. Brak było przekonujących danych potwierdzających „wyspową" budowę Wszechświata – natura tzw. mgławic spiralnych była niejasna; czy są to skupiska gazu, czy też układy gwiazd poza naszą Galaktyką. Choć niektórzy myśliciele – jak np. Kant – uważali, że mgławice tworzą systemy gwiezdne podobne do naszej Galaktyki, wielu astronomów uważało tę hipotezę za filozoficzną spekulację. Dopiero w 1923 roku znakomity astronom E. Hubble odkryciem cefeidy w Wielkiej Mgławicy Andromedy (co pozwoliło wyznaczyć odległość do tej mgławicy) rozwiał wszelkie wątpliwości. Był to początek nowej ery w kosmologii obserwacyjnej.

Einstein w swojej pierwszej pracy kosmologicznej milcząco zaakceptował tradycyjny obraz świata wypełnionego jednostajnie gwiazdami i pozbawionego systematycznych ruchów na wielką skalę.

Dokonał też nieznacznej modyfikacji ogólnej teorii względności. Modyfikacja ta, z punktu widzenia matematycznego zupełnie naturalna (dopisanie do równań pola tzw. członu kosmologicznego), gwarantowała istnienie jedynego tzw. statycznego rozwiązania równań pola. W ten sposób Einstein otrzymał pierwszy teoretycznie spójny model Wszechświata.

Geometryczna konstrukcja, obrazująca czasoprzestrzeń statycznego świata Einsteina, jest stosunkowo prosta: mamy czas kosmiczny w postaci prostej; na tę prostą „nawlekamy" przestrzenie chwilowe, tak by każdej chwili czasu kosmicznego odpowiadała jedna i tylko jedna przestrzeń chwilowa (w danym układzie współrzędnych). Innymi słowy: na oś czasu nawlekamy hiperkule, których trójwymiarowe powierzchnie są przestrzeniami chwilowymi. W efekcie otrzymujemy hiperwalec, którego osią jest oś czasu, a przekroje prostopadłe do osi czasu hiperkulami, których trójwymiarowe powierzchnie stanowią przestrzenie chwilowe. Powierzchnia hiperwalca ma cztery wymiary i reprezentuje czasoprzestrzeń statycznego modelu Einsteina. Dlatego też model ten nazwano także modelem cylindrycznym.

Praca Einsteina nie rozwiązała wszystkich zagadek kosmologicznych. Wkrótce okazało się nawet, że jej podstawowe wyniki nie zgadzają się z nowo przeprowadzonymi obserwacjami astronomicznymi.

Ruchy na wielką skalę we Wszechświecie zaobserwowano w 1912 roku. Dokonał tego V.M Slipher, astronom pracujący w obserwatorium Lowella (Arizona). Badając linie spektralne mgławic spiralnych zauważył, że w niektórych widmach są one przesunięte ku czerwieni, co, na mocy efektu Dopplera, świadczyłoby o oddalaniu się tych kosmicznych obiektów.

Dużym zaskoczeniem dla opinii naukowej było rozwiązanie równań Einsteina przez Wilhelma de Sittera. Otrzymał on „konkurencyjny" model Wszechświata. Wszechświat de Sittera był pusty! Do tego jeszcze się rozszerzał! De Sitter również poszukiwał statycznego modelu (innego nie wyobrażał sobie) i sądził, że model taki znalazł, gdyż krzywizna wymodelowanego przezeń świata była stała. Dziś tego rodzaju model nazywamy stacjonarnym; statyczny jest natomiast wszechświat Einsteina.

Obecnie pomija się wszelkie „lokalne" niejednorodności oraz bada geometrię i ruch materii uśrednione po bardzo dużych obszarach. Materię we Wszechświecie traktuje się jak płyn (!), którego cząsteczkami są gromady galaktyk. Niepodważalnym faktem doświadczalnym jest również rozszerzanie się Wszechświata.

Statyczny model Einsteina i pusty model de Sittera są rozwiązaniami tego samego równania i to rozwiązaniami w pewnym sensie skrajnymi. Pomiędzy nimi znajduje się bardzo wiele modeli, które ani nie są statyczne jak świat Einsteina, ani nie są puste jak świat de Sittera. Wykazał to Aleksander Friedman. Rodziły się nowe publikacje i dalsze doniosłe odkrycia. Ich autorami byli A. Friedman, G. Lemaitre, E. Hubble, A. Eddington, H.P. Robertson, A.G. Walker i wielu, wielu innych.

Początki współczesnej kosmologii powstawały pod znakiem paradoksów. Nauka o Wszechświecie jeszcze nie zdołała się wyzwolić z paradoksów przedrelatywistycznych, a już pojawiły się nowe. Paradoksalny był przede wszystkim pusty, ale rozszerzający się świat de Sittera. Obserwacyjny efekt ucieczki galaktyk też prowadził do kłopotliwych wniosków.

Mimo istotnych trudności, w drugiej i trzeciej dekadzie naszego stulecia kosmologia zyskała dwie rzeczy: bazę obserwacyjną i teoretyczną nadbudowę, w której ważną rolę odegrały metody geometryczne. Postawiło to ją w rzędzie współczesnych nauk przyrodniczych. Również matematycy doskonalili i rozwijali nowe teorie. Geometria uległa nieprawdopodobnym przeobrażeniom. Herman Weyl podał abstrakcyjną definicję rozmaitości – tworu, bez którego trudno się teraz obejść we współczesnej fizyce. Levi-Civita wprowadził pojęcie pochodnej kowariantnej i koneksji. E. Cartan nadał nowoczesną postać geometrii różniczkowej i wytyczył kierunki badań oraz postawił problemy, których starczy do końca stulecia. Schouten doprowadził do perfekcji symbolikę rachunku tensorowego. Narodziło się niezwykle subtelne i abstrakcyjne pojęcie wiązki włóknistej. Potężne narzędzia stworzyła topologia. Wszystkie te konstrukcje miały być skwapliwie wykorzystane przez kosmologów już po drugiej wojnie światowej.

Zakończenie?

Na tym musimy dość brutalnie przerwać naszą opowieść o wzajemnych związkach pomiędzy kosmologią a geometrią. Wraz z dalszymi sukcesami nauki o Wszechświecie związki te jeszcze bardziej spotęgowały się. Ich dokładniejsze przebadanie wymagałoby odrębnego studium, być może nawet odrębnej monografii książkowej. Na zakończenie naszych rozważań poprzestańmy na kilku uwagach, które zapowiadają, że podjęcie trudu zbadania wzajemnych oddziaływań pomiędzy teorią względności a nowoczesną geometrią mogłoby odpłacić niezwykle interesującymi rezultatami.

Nie ulega wątpliwości, że wiele geometrycznych idei XX wieku narodziło się z relatywistycznych inspiracji, chociaż można obserwować proces stopniowej emancypacji pojęć matematycznych. Jeśli nawet Weyl nie stworzył pojęcia rozmaitości specjalnie dla potrzeb fizyki, to w każdym razie sam je wkrótce zastosował do zagadnień fizycznych, ale już prace Whitney'a nad tym pojęciem nie miały bezpośredniego związku z zastosowaniami, a niektóre z jego wyników zostały wykorzystane w fizyce relatywistycznej znacznie później.

Zachodzi także proces „inspiracji w przeciwną stronę": fizycy relatywiści pełnymi garściami czerpią z prac „czystych matematyków". O ile je znają – niestety za często zdarza się, że matematyczne narzędzia już istnieją, ale odpowiednie czasopisma nie znajdują się w bibliotekach wydziałów fizyki. Rzadko jednak wykorzystanie teorii matematycznej do fizyki relatywistycznej jest automatyczne; z reguły wymaga daleko idących przystosowań, a niekiedy opracowania nowej teorii matematycznej, wzorowanej na już istniejącej. Tak było w przypadku słynnych twierdzeń o istnieniu osobliwości w kosmologii i astrofizyce relatywistycznej. Osobliwość rozumie się tu jako geodezyjną niezupełność czasoprzestrzeni. Teoria geodezyjnej niezupełności dla rozmaitości z metryką riemannowską była dobrze opracowana przez geometrów różniczkowych (w tym wypadku geodezyjna niezupełność pokrywa się z metryczną niezupełnością rozmaitości), ale ani wyników, ani nawet większości metod nie można przenieść na przypadek czasoprzestrzeni. Czasoprzestrzenie wyposażone są w metryki pseudoriemannowskie (tzw. metryki Lorentza) i bogactwo możliwych sytuacji jest tu bez porównania większe. Penrose, Hawking, Geroch i inni musieli najpierw stworzyć teorię geodezyjnej niezupełności rozmaitości pseudoriemannowskich (lorentzowskich), a dopiero potem zastosować ją do czasoprzestrzeni.

Wspomnieliśmy już o nieznajomości (lub niewystarczającej znajomości) osiągnięć czystej matematyki przez fizyków-realistów. Nieznajomość „w drugą stronę" była jeszcze większa. Matematycy na ogół mało interesowali się metodami i wynikami uzyskiwanymi przez swoich kolegów fizyków, a nierzadko patrzyli na nie z odcieniem pobłażania, jakby w przekonaniu, że zastosowania są ujmą dla królowej nauki. Na szczęście w ostatnich latach sytuacja pod tym względem zaczęła się zmieniać. Fizycy teoretycy intensywnie pracują obecnie nad teoriami wielkiej unifikacji i superunifikacji, których celem jest znalezienie takiej struktury matematycznej, która zawierałaby w sobie całą znaną fizykę. Na potrzeby tych teorii wypracowano szereg bardzo pięknych i ogólnych metod (zwłaszcza tak zwana metoda cechowania). Okazało się, że metody te są także skuteczne w czystej matematyce. Za ich pomocą udało się uzyskać kilka zaskakujących wyników (egzotyczne struktury różniczkowe na $\mathbf{R}^4$), a perspektywy na przyszłość są jeszcze bardziej obiecujące. Ale to już osobny rozdział – rozdział, który historia dopiero pisze.

Wszystko wskazuje na to, że przyszłość należy do badań interdyscyplinarnych.