Czy kandydat na nauczyciela matematyki rozumie matematykę – próba testu

Danuta CIESIELSKA, Krzysztof CIESIELSKI, Jerzy OMBACH, Kraków

Czy i jak nauczyciel matematyki rozumie matematykę? Pytanie wydaje się nieco dziwne, ale kryje się za nim głębsza treść. Co roku opuszcza mury wyższych uczelni kilkaset osób, które (potencjalnie) mają zasilić grono pedagogów uczących w szkołach. Nagrodą za kilkuletnią naukę jest dyplom wyższej uczelni; niektórzy dostają dyplomy z wyróżnieniem, inni kończą studia z wynikiem zaledwie dostatecznym. Wszyscy natomiast otrzymują zaszczytne tytuły magistrów matematyki.

Nauczyciel matematyki, a zarazem absolwent studiów wyższych powinien być matematykiem; mówiąc językiem potocznym – wypadałoby, by wiedział o co w tej nauce chodzi.

Student w ciągu pięciu lat uczęszcza na wykłady, ćwiczenia, seminaria, zdaje egzaminy z trudnych lub łatwiejszych przedmiotów. Kończy swoją edukację egzaminem magisterskim. Teoretycznie wiedza jego jest bardzo bogata. Ile ów potencjalny nauczyciel, matematyk, z przedstawionych mu treści zrozumiał i zapamiętał? Oczywiście, wiele z przyswojonych wiadomości szybko ulatuje z głowy. Powinny jednak pozostać: odpowiednia intuicja i rozumienie ważnych pojęć i zagadnień matematyki wyższej, często nie wchodzących zbyt daleko w zaawansowane teorie, ale jednak w pewnym sensie podstawowych. I nie jest to żądanie specjalnie wygórowane dla matematyka, absolwenta wyższej uczelni. Ponadto program studiów nauczycielskich tylko nieznacznie wykracza poza matematykę XIX wieku, nie mówiąc już o wynikach powojennych (czyli 45(!) ostatnich lat). A wiedza matematyczna właśnie nauczycieli matematyki jest bardzo istotnym czynnikiem matematycznego uświadomienia społeczeństwa.

Te właśnie pytania i problemy były dla autorów artykułu motywacją do przeprowadzenia pewnego testu dla studentów V roku sekcji pedagogicznej (zwanej nauczycielską lub – dziwnie – ogólną) na Uniwersytecie Jagiellońskim. Bezpośrednią przyczyną zaś były opinie osób, które zasiadały w komisjach egzaminów magisterskich przez ostatnie kilka lat. Na takim egzaminie student oprócz zreferowania swojej pracy powinien odpowiedzieć na pytania Komisji – często elementarne, nawiązujące do materiału studiów, a związane właśnie z próbą sprawdzenia, czy kandydat na magistra rozumie to, czego go uczono przez lat pięć. I odpowiedzi na te pytania wyglądały różnie. Bywały osoby zdające egzaminy magisterskie w sposób przepiękny, wykazujące głębokie zrozumienie i świetne opanowanie materiału studiów, a także znajomość związków matematyki wyższej z programem szkolnym. Ale byli też, niestety, tacy, którzy mieli kłopoty z odpowiedziami na nawet bardzo proste pytania. Jaką rolę grało tu zdenerwowanie egzaminem, poważnym przecież i w dodatku ostatnim na studiach, a jaką istotne niezrozumienie odpowiednich zagadnień – trudno powiedzieć, zwłaszcza, że niewątpliwie zależało to od indywidualnych przypadków. Nie mniej jednak zjawisko było niepokojące.

Z takich powodów zrodził się pomysł testu dla studentów V roku sekcji pedagogicznej. Idea była klarowna. Kilkanaście pytań, niezbyt trudnych (tak, by około 2–3 minuty starczyły na odpowiedź) – właśnie tego typu, z jakimi student mógłby się ewentualnie spotkać na egzaminie magisterskim. Pytania powinny obejmować zakres materiału z podstawowych przedmiotów kierunkowych wykładanych na studiach i powinny sprawdzać zrozumienie odpowiednich zagadnień, a nie ewentualne nauczenie się czegoś „na pamięć". Dobrze byłoby też, by niektóre z nich były związane z matematyką „szkolną". Oczywiście, idealnego zestawu spełniającego takie wymagania ułożyć się nie da – czasem naprawdę trudno na podstawie konkretnych pytań sprawdzić, czy ktoś należycie zrozumiał materiał.

Warto tu zacytować jednego z najlepszych nauczycieli w Krakowie, który powiedział kiedyś: „matematyka ma to do siebie, że nigdy nie wiadomo, jak głęboko ktoś nie wie, o co chodzi". Niewątpliwie test powinien zawierać pytania nawiązujące do analizy matematycznej (i to w szczególności zarówno do różniczkowania, jak i teorii miary), rachunku prawdopodobieństwa, geometrii i algebry. Nie mógł także pominąć równań różniczkowych, topologii i tematyki związanej z teorią funkcji analitycznych. Poza tym postanowiliśmy dać trzy pytania nieco innego gatunku, które jednak skomentujemy po zaprezentowaniu wszystkich pytań.

Test zdecydowaliśmy zrobić w połowie roku akademickiego. Istotne było sprawdzenie wiedzy studentów nieco wcześniej, niż „pięć minut" przed egzaminem magisterskim. Chodziło o to, by dowiedzieć się, jak potrafią oni odpowiedzieć na zadane pytania niezależnie od powtórki materiału, którą robią przed magisterium. Wyniki chcieliśmy porównać ze średnią ocen z egzaminów z przedmiotów matematycznych (seminariów nie braliśmy pod uwagę).

Na podane niżej 20 pytań studenci mieli odpowiedzieć w ciągu godziny.

1. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równanie:

$$z^3 = 8$$

2. Które z następujących zbiorów (podać wszystkie) mogą być rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi: punkt, prosta, dwie proste równoległe, okrąg, płaszczyzna?

3. Podać przykład homeomorfizmu różniczkowalnego, który nie jest dyfeomorfizmem.

4. Jaką powierzchnię przedstawia równanie:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4x = 0?$$

5. Wykazać, że każda rodzina otwartych przedziałów parami rozłącznych na prostej jest co najwyżej przeliczalna.

6. Dana jest $f : A \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Aby mówić o różniczkowalności funkcji f w punkcie x należy założyć:
(a) $x \in \operatorname{Int} A$, (b) $x \in \operatorname{Cl} A$, (c) x jest punktem skupienia A, (d) x należy do odcinka otwartego zawartego w A, (e) żaden z powyższych warunków?

7. Czy w grupie a) abelowej, b) nieabelowej istnieje zawsze dokładnie jeden element neutralny? Wykazać lub podać kontrprzykład.

8. Które z następujących zbiorów (podać wszystkie) mogą być przekrojami sześcianu: trójkąt równoboczny, trójkąt prostokątny, pięciokąt, sześciokąt.

9. Podać przykład nietrywialnej σ-algebry zawartej w $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ i różnej od $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$.

10. Podać przykład funkcji f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ ciągłej, różniczkowalnej wszędzie poza 0 i nieróżniczkowalnej w 0.

11. Czy przecięcie oraz suma zbiorów spójnych muszą być spójne? Sformułować twierdzenie lub podać kontrprzykład.

12. Dla którego spośród zestawów (a), (b), (c) (podać wszystkie możliwości) istnieje funkcja spełniająca wszystkie warunki z danego zestawu i będąca dystrybuantą?
(a) f klasy C^1, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$,
(b) $f \geq 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) > 0$, $f(0) = \frac{1}{3}$,
(c) f silnie rosnąca, $f(0) = \frac{1}{2}$, $x < 0 \Rightarrow f(x) \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $x > 0 \Rightarrow f(x) \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

13. Scharakteryzować funkcje analityczne $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, stałe na okręgu jednostkowym.

14. Podać przykład funkcji (wraz z jej dziedziną!) całkowalnej w sensie Lebesgue'a i niecałkowalnej w sensie Riemanna.

15. Z jakim zbiorem jest homeomorficzna jednowymiarowa przestrzeń rzutowa?

16. Dlaczego rozwiązanie równania różniczkowego $x'(t) = x^2 + \sin tx$ jest funkcją ciągłą?

17. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in (-1, 1) \\ 0 & x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

18. Podać jeden rezultat matematyki osiągnięty po II wojnie światowej (w przypadku rezultatu mniej znanego, podać źródło, jeśli to możliwe).

19. Do nazwisk: Banach, Sierpiński, Ważewski dopisać imiona oraz miasta – ośrodki matematyczne, z którymi ci matematycy byli najmocniej związani (do każdego jedno miasto).

20. Wymienić wszystkich profesorów zatrudnionych (obecnie) w Instytucie Matematyki UJ.

Ostatnie trzy pytania, jak wyraźnie widać miały nieco inny charakter. Jak wspomnieliśmy wyżej, absolwent studiów uniwersyteckich otrzymuje dyplom magistra matematyki. Jego wiedza nie powinna się zatem ograniczać jedynie do historycznych rezultatów. Czy student V roku wie cokolwiek o matematyce współczesnej? Jeśli tak, powinnien umieć odpowiedzieć na pytanie 18. Żądanie napisania czegoś na temat wyników matematycznych ostatnich 45 lat nie jest chyba zbyt wygórowane. Można też niewątpliwie wymagać od matematyka niezerowej wiedzy o Banachu, Sierpińskim czy Ważewskim. Profesor Ważewski był ponadto przez wiele lat centralną postacią Instytutu Matematyki UJ, a w jednej z sześciu sal wykładowych Instytutu znajduje się, wśród portretów kilkunastu wybitnych krakowskich matematyków, także i jego zdjęcie. Pytanie ostatnie jest zupełnie nietypowe. Ma ono jednak swój głęboki podtekst. Co o pracy uniwersytetu i jego postaciach wie student, który spędził tutaj pięć lat? Wkrótce opuści on mury uczelni i będzie szerzył wiedzę matematyczną poza nią. Czy (i jak?) zna pracowników Instytutu? Co wie o ich pracy naukowej czy innej matematycznej działalności? W szczególności powinien wiedzieć, jacy profesorowie pracują na uniwersytecie (nie mówiąc już o kojarzeniu nazwisk z twarzami). Próbą małej sondy na ten temat było właśnie pytanie ostatnie.

Kolejność pytań nie jest przypadkowa. Staraliśmy się rozpocząć od pytań trochę prostszych, nie zniechęcających, stopniowo przechodząc do bardziej zaawansowanego materiału. Poza tym w sposób istotny „przeplataliśmy" dziedziny matematyki; w tego typu sprawdzianie nie byłoby najwłaściwsze globalne „szufladkowanie" pytań do poszczególnych działów.

Zanim przejdziemy do wyników, poświęćmy trochę uwagi reakcji studentów na przeprowadzenie testu. Zdecydowaliśmy go przeprowadzić w ramach przedmiotu „podstawy teoretyczne matematyki szkolnej", który (nie licząc historii matematyki, seminariów i wykładów monograficznych) jest na I semestrze V roku jedynym matematycznym przedmiotem w programie sekcji pedagogicznej. Pomysł testu zyskał gorącą aprobatę wykładowcy tego przedmiotu, dra Edwarda Tutaja. Wspólnie zatem postanowiliśmy, że będzie on miał charakter mini-egzaminu pisemnego poprzedzającego egzamin właściwy, ustny. Zawiadomieni o tym studenci bardzo ostro zaprotestowali. Zaproponowaliśmy wobec tego, że wyniki testu mogą wpłynąć na ocenę jedynie (ewentualnie) na korzyść egzaminowanego. I to jednak nie zyskało aprobaty młodzieży. Studenci byli wręcz obrażeni samą koncepcją. Twierdzili, że ludzi dorosłych (którymi oni niewątpliwie są) sprawdzać nie należy, że kończą studia i od dawna nie mieli żadnego egzaminu pisemnego. Nie widzieli sensu sprawdzania ich „świadomości matematycznej" (jako, że np. (cytat) – „świadczy o mnie moja średnia ocen"). Nie wiadomo, czy aż tak skrajna była opinia wszystkich, a nawet większości – pewne jest jednak, że rok globalnie był testowi przeciwny.

Ponieważ nie było dla nas istotne sprawdzenie, kto co wie personalnie, więc pod wpływem naprawdę ostrych „kontr" studentów zmieniliśmy pierwotny plan. Test chcieliśmy zrobić w ramach egzaminu dlatego, by studenci podeszli do niego maksymalnie poważnie i starali się odpowiadać możliwie najlepiej. W efekcie jednak stanęło na tym, że odpowiedzi będą anonimowe. Jeśli natomiast ktoś zechce później poznać swoje wyniki, może się podpisać godłem (dwie litery, dwie cyfry). Poza tym udział w teście był warunkiem dopuszczenia do egzaminu. Studenci nie zostali poinformowani, jakiego typu pytania będą w teście. Ponadto poprosiliśmy ich o nieprzygotowywanie się w żaden sposób do tego sprawdzianu, gdyż chodziło o to, by sprawdzić wiedzę naprawdę, bez dodatkowej ostrej powtórki. Test doszedł do skutku tydzień przed sesją. Atmosfera na sali nie była najlepsza, widać było, że studenci są eksperymentowi wyraźnie niechętni. Każdy otrzymał kartkę z zestawem pytań. Już podczas odpowiadania łatwo było zauważyć zmianę nastawienia piszących. Wyraźnie było widać, że pytania ich zainteresowały. Po zebraniu prac natychmiast rozpoczęły się żarliwe rozmowy na temat poszczególnych zadań.

Bardzo ciekawa była dyskusja z grupą studentów, przeprowadzona parę dni później (wyniki jeszcze nie były znane). Okazało się, że wiele osób przyszło na test z zamiarem jego bojkotu, czyli oddania pustych kartek. Niemniej jednak nikt tego nie zrobił; co więcej, z prac wyraźnie wynikało, że wszyscy potraktowali test poważnie i odpowiadali w miarę możliwości rzetelnie. Studenci uznali pytania za ciekawe, zaś cały zestaw za dość dobrze sprawdzający ogólną wiedzę, której można oczekiwać od absolwenta matematyki. Stwierdzili, że sprawdzenie ich wiadomości w ten sposób było interesującym doświadczeniem. Ich nastawienie do testu (który nb. nie wypadł najlepiej) diametralnie się zmieniło po jego przeprowadzeniu. Wcześniej spodziewali się pytań innego typu, bardziej abstrakcyjnych i mocniej związanych z pamięciowym opanowaniem materiału (jak np. „co to jest różniczka Frécheta?").

Na kanwie testu i pytań padały inne uwagi. Studenci uważali, że celowe byłoby przeprowadzenie badań tego typu co roku, a także, że nie należy ograniczać się do sekcji pedagogicznej (co zresztą całkowicie zgadzało się z opinią organizatorów testu). Bardzo spodobała się studentom koncepcja umieszczania (wzorem uniwersytetów zachodnich) w Instytucie tablicy ze zdjęciami wszystkich pracowników (najlepiej z zaznaczeniem przynależności do poszczególnych zakładów). Łatwo się domyślić, że było to efektem rozmowy na temat pytania 18.

Przejdźmy do wyników testu. Dokładne ich omówienie nie miałoby sensu. Gdyby sprawdzian był przeprowadzony na kilku wyższych uczelniach lub na jednej uczelni, ale systematycznie przez parę lat, można by spróbować dokonać pewnych uogólnień albo porównań. Tu jednak uzyskane informacje mają charakter wyrywkowy, w wielu miejscach mogą być przypadkowe. Wiele zależy przecież od sprawdzanych ludzi, a także od sposobu wyłożenia im danego materiału na studiach. Pewnymi obserwacjami chyba jednak warto się podzielić.

Test był przeprowadzony na roku, który ma w instytucie opinię jednego ze słabszych w ciągu ostatnich lat. Widać to nb. także ze średnich ocen; jedynie 7 spośród 35 ankietowanych osób ma z przedmiotów matematycznych średnią z egzaminów powyżej 4. Globalnie, rzecz jasna, średnie są wyższe, gdyż podwyższają je oceny z przedmiotów niematematycznych, a także z seminariów (najniższe z reguły bywają noty uzyskane w pierwszych latach). Także i wyniki sprawdzianu nie były rewelacyjne, ale nie to jest w tej chwili najbardziej istotne. Skoncentrujmy się na poszczególnych pytaniach.

Jedynie na pięć pytań odpowiedziała poprawnie ponad połowa ankietowanych. Zdecydowanie najlepiej wypadło pytanie 4, później 2, „trzecią lokatę" zajęło pytanie 1. Tu ciekawostka - zaledwie jedna (!) osoba rozwiązała to zadanie najbardziej, wydawałoby się, nasuwającą metodą, czyli rysunkiem okręgu i znalezieniem pierwiastków na tej podstawie. Większość rozkładała wyrażenie $z^3 - 8$ na czynniki, część wypisywała z pamięci wzór ogólny. Aż pięć osób dokonało podstawienia „$z = x + iy$" (nb. tylko jedna z nich uzyskała w efekcie poprawny wynik). Dwa pozostałe pytania „ścisłej czołówki" to 10 i 8.

Tylko dwa zagadnienia zostały poprawnie rozwiązane przez wszystkich (co oczywiście nie znaczy, że wszyscy odpowiedzieli w pełni poprawnie na dane pytania). Mianowicie każda ankietowana osoba wiedziała, że punkt może być rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych oraz, że trójkąt równoboczny może być przekrojem sześcianu. We wszystkich pozostałych przypadkach zawsze znalazł się ktoś, kto nie umiał podać poprawnej odpowiedzi.

Zdecydowanie najsłabiej wypadły trzy pytania. Najgorzej - pytanie 12, w którym jedynie jedna osoba zauważyła, iż w żadnym spośród przypadków (a), (b), (c) odpowiedniej funkcji znaleźć się nie da. Niewiele lepiej odpowiadano na pytanie 3 (co dla organizatorów testu było sporym zaskoczeniem) oraz 15.

Parę innych ciekawych obserwacji. Wymieńmy najczęściej spotykane błędy. Były takie trzy: odpowiedzi (b) i (c) w pytaniu 12 oraz stwierdzenie, że przecięcie zbiorów spójnych musi być zbiorem spójnym. Ponadto ponad jedna czwarta studentów stwierdziła, że jednowymiarowa przestrzeń rzutowa to płaszczyzna. Zdecydowanie najwięcej braków odpowiedzi (nic nie zostało napisane) było na pytanie 3 (aż 30!). Ponad połowa studentów nic nie odpowiedziała na pytania 14 i 15. Godne uwagi jest też, że zaledwie trzy osoby przy rozwiązaniu zadania 17 zauważyły, iż całkowana funkcja jest nieparzysta, zatem szukana liczba to zero. Większość po prostu wykonała rachunek (nb. czasem licząc $\int f(x)dx$ zamiast $\int xf(x)dx$.

Nikt też nie podał jako przykładu σ-algebry (pytanie 9) rodziny zbiorów mierzalnych przy mierze Lebesgue'a. Kilka osób stwierdziło, że w przypadku grupy nieabelowej istnieć może więcej niż jeden element neutralny (parę razy z uwagą, że wyróżniamy elementy neutralne lewostronny i prawostronny).

Warto wspomnieć, że (w potestowych dyskusjach) studenci za najbardziej podchwytliwe i „złośliwe" uznali pytanie 16, o rozwiązaniu równania różniczkowego. Do tej samej kategorii (choć nie tej samej rangi) zaliczyli pytanie o element neutralny. Pytań 12 i 17 nie dołączyli do tej grupy.

Pora poświęcić parę słów ostatnim trzem pytaniom. Pytanie 20 było jedynym, na które nikt nie udzielił pełnej odpowiedzi, tzn. nie wymienił wszystkich sześciu (obecnie jest ich ośmiu) profesorów matematyki UJ. Każdy jednak coś napisał, nikt tu nie zostawił pustego miejsca, a kilku osobom zabrakło do podania kompletu zaledwie jednej osoby.

W pytaniu „historycznym" okazało się, że najbardziej znanym studentom matematykiem jest Stefan Banach. Co ciekawe, imiona Banacha i Sierpińskiego były częściej poprawne niż ośrodki matematyczne, które ci uczeni reprezentowali, zaś w przypadku Ważewskiego było odwrotnie (i to w sposób widoczny).

Pora przejść do pytania 18. Jego wynik był jednym z najsłabszych w całym teście. Jest to zjawisko smutne i nieco zaskakujące (ze względu na fakt, że ankietowani kończyli w tym okresie pisanie prac magisterskich). Wyraźnie zresztą było widać, że niektóre odpowiedzi nawiązywały do tematów tychże prac (nie zawsze trafnie – jak np. odpowiedź „rozstrzygnięcie zasady Leibniza przez Robinsona w analizie niestandardowej", którą można określić starym powiedzeniem „słyszał dzwony, ale nie wie w którym kościele"). Dodajmy jeszcze, że numer 4/1985 *Delty* był w całości poświęcony powojennym rezultatom ... (w paru przypadkach można przypuszczać, że odpowiadający znali artykuły stamtąd). Na pytanie 18 odpowiedziała tylko jedna trzecia piszących, z czego połowa poprawnie. Nikt nie podał precyzyjnie pełnego wyniku matematycznego, ale zaliczyliśmy takie jak wymienienie teorii katastrof czy fraktali. Najładniej chyba sformułowaną odpowiedzią było zdanie „rozwiązanie problemu hipotezy continuum", z którego wyraźnie wynika, że autor pracy wiedział, o czym pisze (stwierdzenie „rozstrzygnięcie hipotezy continuum" byłoby, rzecz jasna, błędne!). Jedna osoba podała twierdzenie Sarda z pełnym (poprawnym) sformułowaniem – był to „strzał", nieco pechowy, gdyż ten rezultat pochodzi z 1942 roku. To zostało ocenione na pół punktu.

Jak wspomnieliśmy, globalnych wyników podawać nie będziemy. Warto jednak zaznaczyć, że zdecydowanie na czoło wysunęła się jedna osoba. Za każde zadanie można było otrzymać jeden punkt (w niektórych przypadkach z możliwościami połówek), najlepsza osoba wyprzedziła następną o 5 punktów! W tym przypadku zresztą było to zgodne ze średnią ocen (4,95 – nikt inny nie miał średniej powyżej 4,5). Dalej jednak średnie już tak idealnie nie współgrały z wynikami testu. W czołówce są zarówno studenci ze średnimi powyżej 4, jak i ze słabymi wynikami w nauce. Ponadto parę osób z nie najgorszymi ocenami z egzaminów znalazło się na szarym końcu.

Zanim przejdziemy do konkluzji końcowych, opiszemy pokrótce coś jeszcze.
Po przeprowadzeniu testu wpadliśmy na pomysł zrobienia analogicznego eksperymentu na roku III. Tu oczywiście niektóre pytania były postawione za wcześnie, w szczególności pytanie 15 (wykład geometrii dopiero się rozpoczął). Ponadto w chwili pisania testu studenci mieli jeszcze przed sobą egzamin z rachunku prawdopodobieństwa i analizy III, w ramach której wykładane są funkcje analityczne i równania różniczkowe (ale za to mieli w tym czasie zajęcia z tych przedmiotów, więc powinni być „na bieżąco" z materiałem...). Tu sprawdzian nie mógł mieć takiego znaczenia jak na roku V, piszący go byli dopiero w połowie studiów. Byliśmy jednak po prostu ciekawi, jak on wypadnie w przypadku kandydatów na nauczycieli studiujących o dwa lata niżej.

W przypadku tych studentów zorganizowaliśmy test w formie niespodzianki; po prostu w terminie, w którym wszyscy mieli zajęcia, zgromadzono trzy grupy razem i poproszono o odpowiedzi na pytania. Żadnych problemów czy dyskusji w tym przypadku nie było, studenci dostali kartki i zaczęli pisać. Tak, jak i na V roku, sprawdzian był anonimowy – na obu rocznikach podpisała się godłem mniej więcej jedna trzecia.

Na III roku wyniki były nieco lepsze niż na V. Wśród studentów młodszego rocznika nie było natomiast nikogo, kto istotnie wybiłby się spośród reszty; za to ci, którzy napisali najlepiej, uzyskali lepsze rezultaty niż czołówka roku V (nie licząc wyniku wspomnianej najlepszej osoby, do której nikt się nie zbliżył). Warto też zaznaczyć, że na roku III na każde pytanie padła przynajmniej jedna w pełni poprawna odpowiedź.

Interesujące, że na III roku najlepiej wypadło pytanie o σ-algebrę, czyli to, które dwa lata wyżej sprawiło bardzo dużo kłopotów. Poza tym ponad połowa poprawnych odpowiedzi padła na jeszcze sześć innych pytań: 4, 10, 7, 14, 6 i 5. Najsłabiej natomiast wypadły pytania 18, 13 i (czego można się było spodziewać) 15. Istotna różnica na korzyść V roku pojawiła się (wymieniając w kolejności od największej) w pytaniach 8, 17 i 1, zaś na korzyść III w 9, 14, 7, 16, 3 i 20. Jak więc stąd w szczególności (pytanie 20) wynika, matematycy UJ są lepiej znani na roku III (nadmieńmy, że 5 studentów wymieniło komplet). Znacznie więcej też osób na roku młodszym rozwiązało równanie $z^3 = 8$ metodą rysunku okręgu (choć, jak wspomnieliśmy, globalnie efekty tego zadania były tu gorsze). Natomiast – co jest mocno zaskakujące – bardzo słabo wypadło na III roku zadanie z wartością oczekiwaną, które rozwiązało zaledwie kilka osób! Jest to dziwne dlatego, że studenci właśnie kończyli kurs rachunku prawdopodobieństwa i za miesiąc mieli zdawać egzamin pisemny. Poza tym nikt przy rozwiązywaniu nie skorzystał z nieparzystości funkcji, wszyscy którzy zadanie robili, liczyli całkę (i to nie zawsze taką, jaką trzeba). Inną zastanawiającą ciekawostką jest, że na III roku więcej osób niż na V wiedziało, iż jednowymiarowa przestrzeń rzutowa to okrąg (choć jeszcze nigdzie w kursie się to nie pojawiło). Błędne odpowiedzi w tym pytaniu z reguły były (w przeciwieństwie do prób starszych kolegów) tworami intuicyjnie jednowymiarowymi (najczęściej wymieniana była prosta). Globalnie podsumowując oba sprawdziany można zaryzykować stwierdzenie, że na III roku nieco lepiej wypadło „wyczucie matematyki wyższej", zaś na V „intuicje zjawisk elementarnych" – z czego oczywiście nie należy wyciągać żadnych daleko idących wniosków.

Warto jeszcze wspomnieć o wynikach pytania 18 na roku III. Zgodnie z oczekiwaniami, wypadło ono słabiej, niż dwa lata wyżej. Jedynie 5 osób (na 32) napisało cokolwiek, z czego 3 źle. Jedna z poprawnych odpowiedzi była za to najlepszą, jaka padła w ogóle na to pytanie, mianowicie został podany konkretny wynik (o skończonej liczbie rozwiązań w liczbach całkowitych równania Fermata).

Jak już wspomnieliśmy, nie należy na podstawie jednego sprawdzianu wyciągać poważniejszych konkluzji dydaktycznych. Eksperyment zamierzamy kontynuować w następnych latach. Może to doprowadzić do ciekawych wniosków. Np. porównanie wyników odpowiedzi na pytania z danej dziedziny i osób, które prowadziły zajęcia z danego przedmiotu podczas studiów na poszczególnych latach, może pomóc podczas przydziału zajęć dydaktycznych. Ponadto z pewnych obserwacji można istotnie skorzystać, jeśli dane zjawiska będą się powtarzać. Nie mówiąc już o tym, że porównanie rezultatów na przestrzeni kilku lat, a także połączenie ich z ocenami, będzie samo w sobie bardzo interesujące ...

Może się, oczywiście, okazać, że wiedza i intuicja matematyczna przyszłego nauczyciela jest daleka nie tylko od ideału, ale i od minimalnych choćby oczekiwań. Można wtedy będzie ze smutkiem narzekać na studentów, ich niechęć do pracy czy też – chwilami – skromne możliwości matematyczne. Jest to jednak tylko jedna strona medalu. Można przecież pokusić się o głębszą refleksję, w inną nieco stronę. Czy my dobrze uczymy studentów, jeśli nie potrafią oni odpowiedzieć na proste przecież pytania? A może na siłę staramy się im wtłoczyć do głów ogromny zasób różnych faktów matematycznych, nie pokazując o co chodzi na najprostszych modelach i w odpowiedni sposób? Czy chęć, by student wiedział bardzo dużo, nie spowoduje, że nie będzie on wiedział dokładnie nic? O uogólnienia jest trudno, zwłaszcza, że na każdym roczniku studenckim znajdują się przecież tacy, których najlepsi nawet wykładowcy i asystenci przy idealnym programie studiów niewiele nauczą... Znajdą się też (miejmy nadzieję, często!) tacy, którzy będą sobą wiele matematycznie reprezentować, mimo tego, że program czy wykładowca daleki może być od ideału.

W każdym razie sprawdziany o podobnym charakterze mamy zamiar przeprowadzać w ciągu najbliższych kilku lat. Interesuje nas w tej chwili w szczególności, jak za dwa lata będą na tego typu pytania odpowiadać studenci obecnego roku III. Później można będzie spróbować dokonać szerszego podsumowania. Wydaje nam się również, że warto byłoby przeprowadzić takie testy na paru innych uczelniach. Może któryś z Czytelników tego artykułu zechce się tego podjąć „na własnym podwórku"...