Co dydaktyka matematyki może zaoferować nauczycielom uczestniczącym w zajęciach studium podyplomowego?

Anna SIERPIŃSKA, Warszawa

Dlaczego nie potrafię zaproponować konkretnego programu zajęć z dydaktyki matematyki dla słuchaczy studium podyplomowego

Godząc się napisać co, moim zdaniem, powinno się znaleźć w programie zajęć z dydaktyki matematyki na studium podyplomowym dla nauczycieli, nie wiedziałam jeszcze, jak trudne jest to zadanie. Wystarczyło jednak tylko zacząć myśleć nad problemem, poczytać co nieco...

Wiedzieć, jaki powinien być ten program, znaczyłoby, choćby częściowo rozwiązać problem tzw. profesjonalnej wiedzy nauczyciela, lub, bardziej po polsku, podstaw zawodowego wykształcenia nauczyciela matematyki. Jest to problem trudny, do dziś nie rozwiązany, choć sporo ludzi nad nim się biedzi. Na kongresie ICME–6 (*International Congress of Mathematics Education*) w Budapeszcie dyskutowano o nim przynajmniej w czterech sekcjach. W szczególności stwierdzono: „Wiele uwagi poświęcono kwestii wiedzy, jaka jest niezbędna nauczycielowi. Istnieje napięcie między tymi, którzy twierdzą, że nauczycielowi potrzebna jest przede wszystkim wiedza matematyczna, a tymi, którzy podkreślają wagę wiedzy pedagogicznej. Ogólnie panuje zgoda co do tego, że dobry nauczyciel potrafi z powodzeniem łączyć wiedzę pedagogiczną i wiedzę matematyczną, ale pozostaje problemem otwartym jaka jest dokładnie natura tej wiedzy" (z raportu grupy TI – *The profession of teaching*). Były głosy poddające w wątpliwość możliwość ustalenia czegoś, co możnaby nazwać podstawową wiedzą profesjonalną nauczyciela, co nie budziłoby kontrowersji, i co możnaby przekazać przyszłym lub aktualnym nauczycielom w czasie studiów.

Różne można tu przytaczać argumenty. Na przykład: cokolwiek byśmy nie powiedzieli i nie głosili na wykładach, seminariach itp., to interpretacja tego wszystkiego będzie zależała od indywidualnych przekonań i poglądów nauczycieli na samą matematykę, jej nauczanie i rolę nauczyciela. Te przekonania i poglądy zależą od kultury, w jakiej się wyrosło, od doświadczeń, jakie się wyniosło ze szkoły, uniwersytetu, od wzorów zachowań, jakie się tam miało. Z drugiej strony, problematyka związana z nauczaniem matematyki jest niezmiernie szeroka i ogniskuje w sobie filozofię i socjologię, psychologię, matematykę, a ostatnio także informatykę i techniczne umiejętności programowania i korzystania z komputerów. Literatura jest rozproszona i, nie tylko u nas w kraju, trudno dostępna. Niełatwo jest wyobrazić sobie kogoś, kto, z równym zapałem i znajomością rzeczy, byłby w stanie realizować każdy punkt programu obejmującego choćby najbardziej podstawowe problemy z dziedziny nauczania matematyki. Trudno jest więc ustalać jakiś obowiązujący program. Ponadto, nawet przy założeniu, że potencjalni wykładowcy przeczytali te same książki i artykuły i mają, w przybliżeniu, tę samą wiedzę, nie można mieć pewności, że zinterpretują oni ten sam program tak samo. Raczej jest bardzo wysokie prawdopodobieństwo, że zrozumieją i zrealizują go zupełnie inaczej. Tak jak to przed chwilą mówiłam o nauczycielach, interpretacja programu będzie zależała od jawnej lub niejawnej filozofii matematyki, nauczania i koncepcji roli nauczyciela posiadanych czy wyznawanych przez wykładowcę.

Ponieważ jednak nie można powiedzieć, która filozofia i która koncepcja roli nauczyciela są lepsze, bardziej uniwersalne od innych (taka jest bowiem natura filozofii), to wybór wykładowcy i ułożenie programu stają się jeszcze trudniejsze.

Coś zamiast programu

Jeśli nie ma jednej dobrej filozofii, jeśli trudno mówić o jednej poprawnej interpretacji, to może właśnie prezentować nauczycielom wielość spojrzeń, rozmaitych rozwiązań, ujęć, podejść do nauczania tego samego materiału, prowokując ich do dyskusji, refleksji, zastanawiania się nad własnymi nawykami, trudnościami, błędami. Zamiast wykładów – wspólna praca w różnych formach. Zamiast wykładowcy – animator.

Zamiast realizowania programu – organizowanie pracy zespołu lub zespołów wokół pytań, które mogą pochodzić od samych nauczycieli. Jeśli pytanie nauczyciela jest bardzo szczegółowe, to sprawą animatora jest ujrzeć w nim zogniskowane szersze problemy matematyczne i dydaktyczne i eksploatować je w tych kierunkach, sugerując nowe pytania, zagadnienia do opracowania lub dyskusji.

Nauczyciele, którzy biorą udział w zajęciach studium podyplomowego, na ogół mają parę lat pracy w zawodzie, może ulegli już pewnej rutynie.

Celem zajęć z dydaktyki matematyki mogłoby być zachwianie tą rutyną, uświadomienie nauczycielom istnienia innych możliwych podejść, postaw i zachowań w klasie podczas lekcji matematyki. Nie da się tego osiągnąć za pomocą wykładów, przez opowiadanie. Nauczyciele muszą to sami przeżyć, jako – teraz – uczniowie, studenci; oni muszą mieć wzory postaw do naśladowania. Niech prowadzący zajęcia animator zademonstruje im postawę otwartą wobec ich wiedzy, niech negocjuje z nimi znaczenia pojęć i symboli matematycznych zamiast je ustanawiać z wysokości swojej katedry.

Kilka przykładów z własnego doświadczenia

W semestrze zimowym roku akademickiego 1988/89 miałam kilka zajęć z grupą słuchaczy Studium Podyplomowego w Siedlcach w ramach tak zwanego konwersatorium z dydaktyki matematyki.

I Chciałam dać na początek coś praktycznego. Wybrałam propozycję dydaktyczną dotyczącą nauczania początków analizy ([5]). Pierwszy błąd: tylko dwie osoby na sali uczyły w liceum. Zaczęłam od sążnistego wykładu zawierającego filozoficzne rozważania dotyczące natury wiedzy naukowej i matematycznej, jej związków z kulturą, przekonaniami, wierzeniami, koncepcjami czasu, przestrzeni tkwiącymi w danej kulturze; krótko mówiąc, zaczęłam od pojęcia przeszkody epistemologicznej (to takie moje hobby – patrz [3], [4]). Drugi błąd. Jedna pani z wypiekami na twarzy próbowała coś zanotować; inni, po kilku minutach zapadli w spokojną drzemkę.

Ożywili się dopiero gdy przeszłam do prezentacji zestawu 10 pytań będących osnową propozycji dydaktycznej. Genezą tych pytań były różne błędne rozumowania i spontaniczne koncepcje uczniów, które ujawniły się podczas moich badań nad myśleniem matematycznym licealistów. Dalszy ciąg zajęć był już wspólnym zastanawianiem się i dyskusją nad możliwymi źródłami i przyczynami uczniowskich błędów. Nauczyciele proponowali też różne sposoby i zabiegi dydaktyczne umożliwiające pokonanie lub uniknięcie tych błędów.

Błędy uczniowskie budzą więc zainteresowanie nauczycieli. Może to jest dobry temat? Odskocznia do eksploracji w rozmaitych kierunkach?

Po pierwsze, błąd każe zastanowić się nad znaczeniem matematycznych pojęć i symboli, z którymi jest związany – a więc prowadzi do lepszego rozumienia matematyki, której się uczy. Po drugie, jest okazją dla animatora do zademonstrowania „otwartej" postawy wobec wiedzy uczniów. Postawa ta nie polega na karceniu ucznia za popełniony błąd i sankcjonowaniu go, lecz na zainteresowaniu się, jakie to ukryte koncepcje ucznia prowadzą go do błędu i na negocjonowaniu nowego znaczenia.
Po trzecie, błąd pobudza do refleksji nad możliwościami matematycznej eksploatacji błędu.

Na przykład, uczeń upiera się przy twierdzeniu że 0,999... jest mniejsze od 1. Czy popełnia błąd w jakimś absolutnym sensie? Co to jest, dla niego, „0,999..."? Liczba? Ciąg? Jeśli „0,999..." oznacza ciąg, to co znaczyłoby „$0,999\ldots = 1$"? Czy ten znak równości znaczy to samo, co w napisie „$1 + 1 = 2$"? Co oznaczają te trzy kropeczki? Co to znaczy „nieskończenie wiele dziewiątek"? Bardzo dużo? Dowolnie dużo? Że zawsze można dopisać jeszcze jedną?

Jeśli uczeń proponuje napisać „$0,999\ldots \approx 1$" zamiast tego samego ze znakiem równości, to można zapytać, czy jakość tego przybliżenia jest taka sama, jak, na przykład, przybliżenia $0,888\ldots \approx 0,9$. Może lepsza? Na czym to polega? Może różnica między 1 a 0,999... jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej, czego nie można powiedzieć o 0,9 i 0,888...?

Inny przykład. Jeśli uczeń z uporem dodaje ułamki „po współrzędnych" i pisze, na przykład, że $2/3 + 4/5 = 6/8$, to nauczyciel powinien się zainteresować znaczeniem, jakie przypisuje on napisowi „$2/3$". Może kojarzy on to ze stosunkiem punktów w jakiejś grze? Jeśli w pierwszym secie wynik był dwa do trzech, a w drugim – cztery do pięciu, to ostatecznie wynik meczu może być sześć do ośmiu, jeśli takie są reguły obliczania punktów w tej grze. To nie jest błędne rozumienie zapisu „2/3", tylko, po prostu, inne. Rozumienie napisu „2/3" jako ułamka pewnej całości trzeba z uczniem wynegocjować i nie szkodzi, że się przecież pojęcie ułamka porządnie już kiedyś wprowadziło i wyjaśniło znaczenie takich zapisów. Tamte słowa mogły nie mieć dla ucznia oczekiwanego znaczenia. Można więc wrócić do pojęcia ułamka. Ale można też pójść w inną stronę i zapytać, jakie byłyby konsekwencje przyjęcia reguły „$a/b + c/d = (a+c)/(b+d)$" (por. [2]) .

II Problematyka błędów jest bardzo obszerna i ma wiele aspektów. Błędy popełniają także nauczyciele. Mogą to być błędy matematyczne, pedagogiczne, psychologiczne. Warto te błędy dyskutować, analizować. Warto też zastanowić się nad reakcją nauczyciela na własny błąd. Kamuflaż, czy raczej otwarte przyznanie się do błędu i wspólne z uczniami poprawianie go, szukanie jego przyczyn? Kamuflaż robiony jest często dla ratowania własnego autorytetu; ale gdy uczniowie wykryją go, autorytet nauczyciela pogrzebany jest na wieki. Druga możliwość pozwala jednocześnie zachować autorytet i daje uczniom pewien wzorzec, jest okazją do kształcenia u nich krytycznej postawy wobec własnych rozwiązań.

Dobre rezultaty w zakresie kształcenia u nauczycieli zarówno analitycznej postawy wobec własnych błędów, jak i lepszego rozumienia pewnego fragmentu matematyki, dostarczyły zajęcia osnute znowu wokół pewnego zestawu pytań, z tym że, tym razem, nauczyciele sami na nie odpowiadali.

Nauczyciele pracowali nad pytaniami w grupach, mogli dyskutować z kim chcieli; grupa miała przedstawić jedno, uzgodnione rozwiązanie. Nauczycielom bardzo podobała się ta forma pracy. Nie było tu napięcia związanego często z pracą samodzielną, którą trzeba oddać prowadzącemu zajęcia. Kiedy nauczyciele uznali, że zakończyli prace, zebrałam rozwiązania. Na następnych zajęciach przedstawiłam wyniki – nie ocenę lecz rozwiązania. Ocena, wybór dobrych rozwiązań, poszukiwanie błędów – należały do słuchaczy.

A oto pytania; były one podawane nauczycielom stopniowo, nie wszystkie naraz. Chodziło o to, by dać okazję do popełnienia błędu. Następne pytanie często kazało zrewidować odpowiedź na pytanie poprzednie.

„1. Czy następujący tekst:

> ‘Niech
>
> $$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = x,$$
>
> gdzie wyrażenie po lewej stronie jest rozumiane jako nieskończone. Podnieśmy obie strony tej równości do kwadratu. Skoro wyrażenie, o którym mowa, jest nieskończone, to mamy
>
> $$2 + x = x^2$$
>
> Stąd $x = -1$ lub $x = 2$. Ponieważ $x > 0$ to musi być $x = 2$’

przekonuje cię o prawdziwości równości

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 2?,$$

2. Czy tekst ten jest poprawnym dowodem tej równości?

3. Co to jest właściwie

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}?$$

4. Na jakiej podstawie można sądzić, że ciąg $\sqrt{2}, \ldots, \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ składników}}$ jest zbieżny?

5. Czy możesz podać definicję rekurencyjną tego ciągu? Ciąg ten można traktować jako powstały z iterowania jednej funkcji. Jakiej? Jak można to wykorzystać dla dowodu zbieżności ciągu?

6. Czy w dowodzie, że ciąg z zadania 4 jest rosnący i ograniczony 2 odgrywa jakąś specjalną rolę?

7. Zbadaj wyrażenie: $R[a] = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$ (nieskończona liczba składników). Dla jakich a określa ono pewną liczbę rzeczywistą? Znajdź R[a] dla $a = 1, 3, 4, 5, 6$. Dla jakich a, R[a] jest liczbą naturalną?

8. Zbadaj funkcję

$$\mathbf{R}[.] : \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$$
$$a \mapsto R[a]$$

w otoczeniu zera (por. [1])."

Nie będę tu omawiać odpowiedzi uczestników konwersatorium w całości. Powiem tylko, że na sześć zespołów, tylko w jednym uznano się za nieprzekonanych. Ale już cztery zespoły uznały dowód za niepoprawny (ale tylko w jednym dodano komentarz: „bo to są działania nieskończone"; w innych odpowiedzi nie uzasadniono). Na pytanie trzecie były trzy odpowiedzi typu: „Jest to liczba rzeczywista", dwie – „suma nieskończona", jedna – „pierwiastek łańcuchowy".

Zakończenie

Przed przystąpieniem do pisania tego artykułu chciałam usłyszeć „głos ludu"; zapytałam więc uczestników konwersatorium, czego oczekiwaliby od zajęć z dydaktyki matematyki na studium. Oto kilka odpowiedzi: „Ja nie umiem obliczać granicy funkcji w punkcie; ile razy obliczę, zawsze okazuje się, że powinno wyjść co innego"; „Ja mam kłopoty z konstrukcjami geometrycznymi"; „Coś o zastosowaniach w fizyce"; „O typowych błędach nauczycieli i jak ich unikać".

Jest to bogaty program. Byłoby co robić przez cały semestr. Szkoda, że zadałam to pytanie pod koniec zajęć zamiast wszystko od niego zacząć.

Literatura

[1] [1] R. Borasi, *Intuition and rigor in the evaluation of infinite expressions*, Focus on learning problems in mathematics, Summer and Fall edition, Volume 7: No 3 & 4, University of Rochester, USA, 1986.

[2] R. Borasi, *Alternative perspectives on the educational use of errors*, Compte rendu de la 39[e] Rencontre CIEAEM, Sherbrooke 1987, 1988.

[3] A. Sierpińska, *O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy – studium przypadku*, Dydaktyka Matematyki 4, 1985, s. 107–167.

[4] A. Sierpińska, *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki*, Dydaktyka Matematyki 8, 1988, s. 103–153.

[5] A. Sierpińska, *Propozycja pewnej sytuacji dydaktycznej w zakresie nauczania początków analizy*, Preprint IMPAN, 1988.