Leonard Euler, *Kompletne wprowadzenie do algebry* i jaka nauka z tego wynika

Michał SZUREK, Warszawa

Leonard Euler napisał tyle prac, że z okazji kolejnych rocznic jego urodzin i śmierci Akademie Nauk (Szwajcarii i Rosji) publikowały kolejne tomy *Opera omnia*. Jednym z przedsięwzięć upamiętniającym zaś rocznicę, którą obchodzimy teraz (300 lat od urodzin), jest nowy przekład (na angielski) fundamentalnego dzieła Eulera o algebrze, pisanego w latach 1765–66, wydanego przez petersburską Akademię Nauk w 1770 r. Oryginalny, niemiecki tytuł *Volständige Anleitung zur Algebra* można przetłumaczyć na polski tak właśnie, jak tytuł tego artykułu. Uważa się, że jest to druga, po *Elementach* Euklidesa, książka matematyczna o największej liczbie wydrukowanych egzemplarzy. Przekłady pojawiały się jak grzyby po deszczu (przed końcem XVIII wieku: na rosyjski 1768-9, holenderski 1773, francuski 1774, na łacinę 1790, na angielski 1797 i grecki 1800). Edycja wydawnictwa Reclam Verlag sprzedała się od 1883 do 1943 roku w liczbie około 108 tysięcy egzemplarzy.

I nic dziwnego. Metodę Eulera wykładu algebry zakwalifikowalibyśmy dzisiaj jako *Exemplarisches Lernen* (uczenie na przykładach), może jako „metodę projektów”: najpierw jest problem i do niego dobieramy sposób rozwiązania. Uczymy się, robiąc coś. To trudniejsza, ale trwalsza droga niż wykład i ćwiczenia, duża porcja teorii, porcja praktyki. Ładnie ujmuje to skomplikowanie brzmiąca maksyma:

Tego, czego powinniśmy się nauczyć, by coś robić, uczymy się, robiąc to właśnie.

Sam Euler traktował swoją książkę jako podręcznik do samodzielnego studiowania. I to się mu udało – zrozumie ją każdy. Oczywiście, pisana była, gdy nie zostały jeszcze odkryte grupy, pierścienie i ich ideały, ciała, przestrzenie liniowe, topologia i geometria algebraiczna, algebry uniwersalne, algebry Boole’a – słowem, kiedy algebra nie zawojowała jeszcze naszego świata matematycznego, a matematyka nie była wcale a*lgebraicznym mocarstwem* – nawiązuję tu do tematu pewnej Szkoły Matematyki Poglądowej.

W ośmiu tomach swego dzieła Euler podaje zadania i je rozwiązuje. Niektóre z nich zakwalifikowalibyśmy dziś jako matematykę rekreacyjną, inne są ciekawymi zadaniami tekstowymi, dobrymi i dla dzisiejszej szkoły. Wiele z tych zadań jest bardzo starych, bardzo wiele Euler przepisał z pierwszej niemieckiej książki o algebrze, której autorem był Rudolf (1553). Oto przykłady.

Trzech kupców nabyło na spółkę dom za 100 *talarów reńskich. Gdyby pierwszy z nich pożyczył od drugiego* $\frac{1}{2}$ *jego pieniędzy, to mógłby dom kupić samodzielnie. Gdyby drugi kupiec pożyczył od trzeciego* $\frac{1}{3}$ *jego pieniędzy, także mógłby kupić dom samodzielnie. To samo mógłby zrobić trzeci kupiec, pożyczywszy od pierwszego* $\frac{1}{4}$ *jego pieniędzy. Ile pieniędzy miał każdy z nich?*

Kupiłem sukno, płacąc po 7 *talarów za* 5 *łokci. Sprzedałem wszystko biorąc za* 7 *łokci po* 11 *talarów. Zarobiłem na tym równo* 100 *talarów. Ile było sukna?*

Pewien bogaty szlachcic podzielił w testamencie sztuki złota między swoje dzieci w następujący sposób. Dziecko o numerze i *otrzymało* $a \cdot i$ *sztabek, plus* $\frac{1}{n}$*-tą część pozostałej liczby sztuk złota. Okazało się, że wszystkie dzieci otrzymały po równo – tyle samo złota. Ile było dzieci i ile sztuk złota miał szlachcic?*
Uwaga: n nie jest liczbą dzieci, tylko pewną liczbą naturalną.

Zadanie to jest bardzo stare, rozwiązywał je już Cardano, a także wspomniany już Rudolf. Rozwiązań jest wiele. Czytelnik z 21. wieku będzie miał wiele uciechy, szukając kolejnych.

Ale nie tylko takie ciekawostki wypełniają *Wprowadzenie do Algebry* Leonarda Eulera. Euler był wspaniałym rachmistrzem. To on potrafił rozłożyć na czynniki piątą liczbę Fermata:

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700\,417,$$

a szacunek budzą takie przykłady, kiedy $an^2 + 1$ może być kwadratem, jak na przykład

$$13 \cdot 233640^2 + 1 = 709\,639\,444\,801 = 842301^2.$$

Wiele miejsca poświęca Euler równaniu

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

i jego rozwiązaniom wymiernym. W języku dzisiejszej geometrii algebraicznej powiedzieliśmy, że bada krzywe eliptyczne i punkty wymierne na nich – to klasyczne zagadnienie odegrało zasadniczą rolę w dowodzie Wilesa Wielkiego Twierdzenia Fermata. Nie da się omówić całej zawartości dzieła Eulera, zwłaszcza, że przy końcu koniecznie chcę napisać o „polskim akcencie”.

O właśnie, do słynnego już wtedy zagadnienia Fermata podchodzi Autor bardzo interesująco. Próbuje je rozwiązać metodami elementarnymi, przynajmniej dla wykładnika $n = 3$. Uzasadnia nawet, jak może, dlaczego rozwiązać się nie daje. Przy końcu książki pisze mniej więcej tak, proroczo: „widocznie do tego równania potrzebne są specjalne metody, które nie zostały jeszcze wynalezione. Dla równania

$$x^3 + y^3 = z^3$$

udało mi się znaleźć metodę”.

Metoda ta to (znana już Fermatowi) algebraiczna wersja „niekończonego zejścia”. Tak dowodzili niewymierności liczby $\sqrt{2}$ starożytni Grecy. Przypomnę: nietrudne rozważania pokazują, że hipotetyczna wspólna miara przekątnej kwadratu i jego boku musi być też wspólną miarą analogicznych odcinków w mniejszym kwadracie (p. np. Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*) – zatem po pewnej liczbie iteracji owa wspólna miara byłaby większa niż cały bok kwadratu.

Rachunki, które zastosował Euler do wykazania nierozwiązalności równania Fermata dla wykładnika 3, zrozumie każdy licealista, a jeszcze prostszy jest przypadek $n = 4$, ale z powodu ograniczoności miejsca nie przytoczę ich. Idea jest następująca: zakładamy, że rozwiązanie istnieje i wykazujemy, że wobec tego musi istnieć jeszcze jedno, w którym liczby są już mniejsze. I tak dalej, ... ale *jak* dalej? Nieskończony ciag malejących liczb naturalnych nie istnieje. Jeżeli konstruujemy taki ciag, to ... musi gdzieś tkwić fałsz. I wszystko jasne – jak oto śmieliśmy przypuścić, że równanie ma rozwiązanie? Euler tłumaczy to dość długo i zawile – widocznie metoda była „nowa” i nie całkiem przyswojona. Dziś powiedzielibyśmy, że wszystko jest w porządku, bo zbiór liczb naturalnych jest dobrze ufundowany.

Oto ten dowód Eulera twierdzenia Fermata dla wykładnika 3. Możemy założyć, że liczby całkowite spełniające równanie $x^3 + y^3 = z^3$ są względnie pierwsze, dodatnie i że $x > y$. Zatem co najwyżej jedna z nich może być parzysta; bo gdyby dwie były parzyste, to i trzecia też. Ale także jedna z nich musi być parzysta, bo nieparzystość dwóch z nich implikuje parzystość trzeciej. Załóżmy najpierw, że liczbą parzystą jest z. Wtedy x oraz y muszą być nieparzyste. Niech $2p = x + y$ oraz $2q = x - y$, a zatem $x = p + q$, $y = p - q$. Liczby p i q też są względnie pierwsze, a także różnej parzystości. Zachodzi łatwa do sprawdzenia równość

$$z^3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Inaczej mówiąc, wyrażenie $2p(p^2 + 3q^2)$ jest sześcianem pewnej liczby całkowitej. Dojdziemy do podobnego wniosku i dla parzystego x. Mianowicie podstawiamy teraz $2p = z - y$, $2q = z + y$, czyli $z = p + q$, $y = q - p$. Wtedy

$$x^3 = z^3 - y^3 = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Symetria równania względem zamiany x na y świadczy o tym, że przypadek obejmuje także i parzystość y.

Wracamy do dowodu twierdzenia Fermata dla wykładnika 3. Następnym krokiem w dowodzie jest wykazanie, że jeżeli liczby $2p$ i $p^2 + 3q^2$ nie są względnie pierwsze, to obie są podzielne przez 3. Niech bowiem d będzie ich wspólnym czynnikiem. Nie może to być 2, gdyż liczby te są różnej parzystości. Przypuśćmy, że $d > 3$. Istnieją zatem liczby P, Q takie, że $2p = dP$, $p^2 + 3q^2 = dQ$.
Z pierwszej z tych równości (i z tego, że $d \neq 2$) wynika, że P jest parzyste. Niech $P = 2H$, zatem $p = dH$, a więc $3q^2 = Qd - p^2 = d(Q - dH^2)$. Założyliśmy, że $d > 3$, zatem d jest dzielnikiem q. Ale d było też dzielnikiem p. To sprzeczne jest z tym, że p, q są względnie pierwsze. A zatem istotnie $d = 3$.

Dalszy dowód prowadzimy w dwóch przypadkach: najpierw gdy otrzymane wyżej liczby $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze i gdy jedynym ich dzielnikiem pierwszym jest 3. W pierwszym przypadku z otrzymanej równości $z^3 = 2p(p^2 + 3q^2)$ (czy też $x^3 = 2p(p^2 + 3q^2)$) wynika, że obydwa czynniki $2p$ oraz $p^2 + 3q^2$ są sześcianami. I tu dochodzimy do „jądra sedna” rozumowania. Trudno pojąć, jak można było wpaść na następujący

Lemat. *Jeżeli liczby a, b są względnie pierwsze, to każdy nieparzysty czynnik pierwszy liczby $a^2 + 3b^2$ jest też postaci $c^2 + 3d^2$.*

Dowód? E tam, sprawdźmy na przykładzie.

$$2007^2 + 3 \cdot 2008^2 = 16\,124\,241 = 3 \times 7 \times 739 \times 1039 = \\ = (0^2 + 3 \cdot 1^2)(2^2 + 3 \cdot 1^2)(8^2 + 3 \cdot 15^2)(26 + 3 \cdot 11^2).$$

Skrzystajmy z lematu. Wiemy, że $2p = u^3$, $p^2 + 3q^2 = v^3$. Ale jeżeli $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem, to jest sześcianem liczby tej samej postaci, tj. $a^2 + 3b^2$. Stąd, po łatwych rachunkach dostajemy:

$$v^3 = p^2 + 3q^2 = (a^2 + 3b^2)^3 = (a^3 - 9ab^2)^2 + 3(3a^2b - 3b^3)^2$$

i mamy $p = a^3 - 9ab^2$ i $q = 3ab^2 - 3b^2$; w szczególności

$$2p = 2a(a + 3b)(a - 3b).$$

Lewa strona tej równości jest sześcianem, czynniki po prawej są względnie pierwsze, zatem każdy z nich jest sześcianem. Połóżmy

$$2a = r^3, \quad a + 3b = s^3, \quad a - 3b = t^3.$$

To daje $r^3 = s^3 + t^3$. Ale liczby r, s, t są mniejsze niż x, y, z. Otrzymaliśmy rozwiązanie równania Fermata z mniejszymi liczbami. Z nowym rozwiązaniem postąpimy tak samo – przerobimy je na mniejsze. Możemy tak iść w nieskończoność, no ale z drugiej strony nie możemy. Sprzeczność, koniec dowodu, hurra.

Przedstawiony tu dowód jest dalece niekompletny. Nie ma dowodu lematu (a jest naprawdę błyskotliwy) i nie został rozpatrzony przypadek, gdy jedynym dzielnikiem pierwszym liczb $2p$ i $p^2 + 3q^2$ jest 3. Ale ... ja ten cały dowód po prostu przepisywałem ze strony internetowej (autorstwa Larry'ego Freemana z Freemont w Kalifornii), na którą każdy może sobie zajrzeć i jest tam lepiej wyłuszczone o co chodzi:

fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-last-theorem-proof-for-n3.html

Zmarły niedawno Ryszard Kapuściński nazwał paradoksem Schella (Jonathan Schell, współczesny eseista amerykański) zjawisko, że wzrost informacji powoduje zwiększanie się niewiedzy ludzi. Może i żyjemy w epoce informacji, ale ta informacja najwidoczniej przechowywana jest gdzie indziej niż w umysłach obywateli. Wygląda na to, że podczas gdy komputery są zapchane informacją, w umysłach straszy coraz większa pustka. Zamiast o tym, jak *pisać*, dyskutujemy, jak *redagować*, a zamiast o *wykładaniu* rozprawiamy o *prezentacji*. Wiemy jak pojemna jest pamięć, a nie wiemy, co ma być w tej pamięci. Jak widać, przy pisaniu tego artykułu sam wpadłem w tę pułapkę.

Uczę w WSTiO, *Wyższej Szkole Tego i Owego*. Szkoła jest zresztą na dobrym poziomie, walczy zatem o przetrwanie, bo konkurencja kusi zaniżaniem opłat ... i wymagań. Przyjęto zatem kilkunastu studentów z Nigerii. Mają oni znakomite świadectwa maturalne ze swojego kraju. Jeśli chodzi o matematykę, są porównywalni z naszymi średnio rozgarniętymi gimnazjalistami; na przykład po pewnym czasie da się im wytłumaczyć, co otrzymamy, jeżeli od liczby 3 odejmiemy iloczyn *minus* 2 i *minus* 3. Jeden ze studentów umiał nawet rozwiązać równanie kwadratowe!!! No i właśnie. *Yes, sir, of course,* odpowiedział Mgwayoplu Nukabe na moje pytanie, czy potrafi znaleźć w Internecie hasło „wektory własne". Istotnie, znalazł w pół minuty – i najwyraźniej uważał, że opanował już technikę szukania wektorów własnych macierzy.

Ale Internet ma także zalety, na przykład dostarcza rozrywki. Długo nie mogłem zrozumieć, że wciąż są ludzie, którzy próbują wykazać twierdzenie Fermata elementarnymi rachunkami. Jednym z nich jest Tom Ballard (http://www.fermatproof.com/ , który zdaje się na poważnie twierdzi, że zrobił durnia z Andrew Wilesa.

Odszedłem od Eulera i wrócę do niego w zupełnie innym, „polskim" kontekście. Zauważmy, że wielomian jednorodny f kilku zmiennych jest proporcjonalny do sumy swoich pochodnych cząstkowych mnożonych przez kolejne zmienne, na przykład dla $f = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ mamy

$$\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = x \cdot (2xyz + y^2z + yz^2) + y \cdot (x^2z + 2xyz + xz^2) + \\ + z \cdot (x^2y + xy^2 + 2xyz) = \\ = 4 \cdot (x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 4f.$$

Ta nietrudna zależność nosi nazwę tożsamości Eulera. Łatwo zauważyć, że współczynnikiem proporcjonalności jest stopień.

Przeskoczmy 250 lat. We współczesnej geometrii algebraicznej ciągiem Eulera nazywa się taki oto ciąg wiązek wektorowych na przestrzeni rzutowej wymiaru n, powstałej przez projektywizację przestrzeni wektorowej V:

$$0 \to O \to O(1) \oplus V \to T_{P^n} \to 0.$$

Odwzorowanie $O(1) \oplus V \to T_{P^n}$ jest generowane przez pola wektorowe, które możemy traktować jako różniczkowania $\frac{\partial}{\partial x_i}$, a jądro tego odwzorowania to wiązka trywialna O włożona w $O(1) \oplus V$; lokalnie włożenie to jest operatorem, który funkcję f odwzorowuje na $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, czyli (z dokładnością do proporcjonalności) f, na mocy właśnie relacji Eulera.

Czy wyjaśniłem, o co chodzi? Oczywiście, że … nie. I nie będę się starał. Od kilku lat dość dużo mojej uwagi zajmuje matematyka szkolna, matematyka dla nauczycieli i popularna. Dopiero teraz widzę dokładnie, jak daleko jest od tych obszarów do matematyki, którą tu nazwę akademicką. To niemalże dwie różne nauki. Nic dziwnego, że niezrozumienie jest wzajemne, a wielcy matematycy nadzwyczaj często nie rozumieją problemów związanych z nauczaniem, uważając, że zjedli wszystkie rozumy.

Sam Euler nie wiedziałby pewnie, dlaczego jego nazwiskiem nazwano ciąg wiązek wektorowych. Samo pojęcie wiązki wektorowej powstało w latach pięćdziesiątych XX wieku. Lecz to, że badamy ów ciąg, dobrze ilustruje proces tworzenia matematyki. Komuś coś się z czymś skojarzy, potem motywy zostają zapomniane, odrywamy się od korzeni, zostaje sama nazwa, problem, teoria. Do badania „konkretów" używamy narzędzi badawczych, które po pewnym czasie same stają się „konkretami", do których badania tworzymy nowe narzędzia … i tak wchodzimy bez końca.

Andrzej Grzegorczyk, znany filozof, logik i po części matematyk, powiedział, że matematyk ma dwie przyjemności: dowodzenie i konstruowanie. To jest jednak podejście matematyka, którego Zdzisław Pogoda nazwał „liniowym". Taki matematyk prze do przodu, po linii prostej, codziennie odkrywa jedno lub kilka twierdzeń i zasłużenie zbiera zaszczyty. Istotnie, właśnie za taką działalnosć matematyczną jesteśmy oceniani przez społeczność naukową i urzędników nauki. Ale lista przyjemności jest znacznie dłuższa. Należy do nich na przykład miłe uczucie, gdy coś obliczymy – i największa rozkosz: gdy coś zrozumiemy. Ale prace polegające na obliczeniach nie dostają dobrych opinii, jako nietwórcze. Może nie zawsze. Oto, co o Eulerze powiedział Dominique Jean Arago (1786–1813): *On (Euler) po prostu obliczył, jak człowiek oddycha, jak orzeł utrzymuje się w powietrzu.* Inni wyrażali się o nim z mniejszym entuzjazmem. Joseph Louis Lagrange (1736–1813) powiedział: *nasz przyjaciel Euler jest wybitnym matematykiem, ale kiepskim filozofem.*

No, właśnie? Co komu przyjdzie z tego, że *ja* coś zrozumiałem? Nie musisz nic rozumieć, musisz produkować. Tylko wtedy jesteś coś wart. Słusznie? Być może. No, z pewnością. Tylko … trochę smutno. Dawno temu Naczelny Delty napisał, że bawiąc się tak od dawna, stawiamy coraz bardziej mądrość poza obrębem nauki.

Mój były student, a potem kolega z pracy, Krzysztof Jaczewski (1955–1994), był właśnie takim, który dużo rozumiał. Na seminariach był jednym z ostatnich, który gubił się, gdy prelegent mówił za trudno. Natomiast brak mu było z pewnością umiejętności wykorzystania swoich umiejętności do pracy nad produkcją twierdzeń. W końcu jednak zrobił bardzo dobry doktorat. Wykazał, że (znów niczego nie będę tłumaczyć!), że istnienie uogólnionego ciągu Eulera charakteryzuje *rozmaitości toryczne.* Jeszcze dziesięć lat temu były one szalenie modne. A ten ogólniejszy ciąg nazywa się dziś w literaturze matematycznej ciągiem Eulera–Jaczewskiego. I taki to polski akcent związany z Leonardem Eulerem; może wybaczymy temu wybitnemu uczonemu, że jadł gościnny chleb na dworze carycy Katarzyny, sprawczyni rozbiorów Polski.