Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Nieskończoność*, styczeń 2007.

Przestrzenie nieskończeniewymiarowe a naturalne intuicje

Marta SZUMAŃSKA, Warszawa

Zastanówmy się jak kształtuje się intuicja matematyczna. Początkowo, szczególnie w przypadku prostych relacji geometrycznych, czerpie wprost z otaczającego nas świata, następnie ze zdobywanej przez lata wiedzy. Gdy poznajemy kolejne matematyczne obiekty, chcemy znaleźć ich związki z tymi poznanymi wcześniej, by zorientować się, czy poznane dotychczas fakty będą przy poznawaniu nowego obiektu przydatne.

Zajmijmy się przypadkiem przestrzeni unormowanych i zastanówmy się, czy intuicje ukształtowane przez najbardziej znanego przedstawiciela tej klasy – $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową, mogą być przydatne w przypadku innych przestrzeni z normą.

W szerokiej klasie przypadków odpowiedź jest twierdząca. Dzięki równoważności dowolnych dwóch norm na $\mathbb{R}^n$ własności analityczne dowolnej przestrzeni unormowanej wymiaru n są takie same, jak w przypadku przestrzeni euklidesowej. Posiadając podstawową wiedzę dotyczącą $\mathbb{R}^n$ z naturalną normą można stwierdzić, że każda skończeniewymiarowa przestrzeń unormowana jest ośrodkowa, lokalnie zwarta i zupełna.

Jak łatwo się domyśleć, w przypadku nieskończeniewymiarowym sprawa się nieco komplikuje. Przedstawimy kilka przykładów obiektów w przestrzeniach unormowanych nieskończonego wymiaru, niezgodnych, przynajmniej na pierwszy rzut oka, z intuicjami pochodzącymi ze skończeniewymiarowego przypadku.

1. O pewnych własnościach kuli

Podstawową własnością analityczną kuli domkniętej w $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ jest jej zwartość. Łatwo wskazać przykład, świadczący o tym, że w przypadku nieskończonego wymiaru przestrzeni kula tej własności mieć nie musi, co więcej twierdzenie Riesza mówi, że mieć jej nie może.

Twierdzenie 1 (Riesz). *Kula w przestrzeni unormowanej X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim X < \infty$.

Przytoczymy dowód tylko mniej znanej części twierdzenia, tzn. pokażemy że zwartość kuli jednostkowej w przestrzeni X implikuje fakt, że X jest przestrzenią skończeniewymiarową. W dowodzie wykorzystywane będą działania Minkowskiego oraz ich własności.

Definicja 1 (Działania Minkowskiego). *Dla dowolnych zbiorów A i B będących podzbiorami przestrzeni liniowej definiujemy* dodawanie

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

oraz mnożenie przez skalar *dla* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Łatwo wykazać następującą własność działań Minkowskiego.

Fakt 1. *Dla wypukłego zbioru A i nieujemnych współczynników α, β zachodzi równość*

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A.$$

Przytoczymy dowód innej własności dodawania zbiorów przydatnej przy dowodzeniu twierdzenia Riesza.

Twierdzenie 2 (Prawo skracania). *Jeśli A, B, C są niepustymi podzbiorami przestrzeni liniowej, przy czym zbiór B jest wypukły i zwarty, a C ograniczony, to*

$$A + C \subseteq B + C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B.$$

Dowód. Niech a będzie dowolnie wybranym elementem zbioru A, zaś c_0 dowolnym elementem zbioru C. Z zawierania $A + C \subseteq B + C$ wynika istnienie $c_1 \in C$ oraz $b_1 \in B$ takich, że $a + c_0 = b_1 + c_1$. Podobnie znajdujemy $b_i \in B$, $c_i \in C$ takie, że

$$a + c_1 = b_2 + c_2, \quad a + c_2 = b_3 + c_3, \quad \ldots, \quad a + c_{n-1} = b_n + c_n.$$

Dodając stronami powyższe równości i przekształcając otrzymaną w ten sposób równość dostajemy

$$a = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} + \frac{c_n - c_0}{n}.$$

Wypukłość zbioru B gwarantuje przynależność $\tilde{b}_n := n^{-1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \in B$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, zaś ograniczoność zbioru C implikuje zbieżność do zera ciągu $\tilde{c}_n := n^{-1}(c_n - c_0)$. Dzięki zwartości B z ciągu $\tilde{b}_n$ można wybrać podciąg b_{n_k} zbieżny do pewnego $b \in B$. Mamy

$$a = \lim_{k \to \infty} (\tilde{b}_{n_k} + \tilde{c}_{n_k}) = b,$$

czyli $a \in B$. □

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia Riesza.

Dowód. Niech $B(0, 1)$ oznacza domkniętą kulę jednostkową w rozpatrywanej przestrzeni. Rozpatrzmy pokrycie kuli $B(0, 1)$ kulami otwartymi $\mathrm{int}B(x, 1/2)$, $x \in B(0, 1)$. Możemy z niego wybrać podpokrycie skończone. Istnieją więc $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B(0, 1)$ takie, że

$$B(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}B\left(x_i, \frac{1}{2}\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right) + B\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Ponieważ kula w każdej przestrzeni unormowanej jest wypukła, więc możemy zastosować Fakt 1, by uzyskać zawieranie

$$B(0, 1/2) + B(0, 1/2) \subseteq \mathrm{conv}\{x_1, x_2 \ldots, x_n\} + B(0, 1/2),$$

gdzie $\mathrm{conv}A$ oznacza najmniejszy zbiór wypukły zawierający A. Wykorzystując prawo skracania dostajemy

$$B(0, 1/2) \subseteq \mathrm{conv}\{x_1, x_2 \ldots, x_n\} \subseteq \mathrm{lin}\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots x_n - x_1\}.$$

By zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że podprzestrzeń liniowa przestrzeni unormowanej zawierająca kulę jest równa całej przestrzeni. □

Twierdzenie Riesza sugeruje, że intuicje analityczne ukształtowane w skończonym wymiarze, mogą przeszkadzać w badaniu nieskończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych. Aby sprawdzić, czy warto ufać geometrycznym przeczuciom pochodzącym z $\mathbb{R}^n$ przeanalizujemy problem istnienia punktów ekstremalnych.

Definicja 2. *Punkt $x \in K$ nazywamy* punktem ekstremalnym *zbioru wypukłego K, jeśli z równości $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, zachodzącej dla pewnych $a, b \in K$, wynika $a = b = x$.*

Na przykład, w przypadku kuli euklidesowej dowolnego wymiaru punktami ekstremalnymi są wszystkie punkty brzegu, a w przypadku wielościanu tylko jego wierzchołki. Dość naturalny jest następujący fakt dotyczący istnienia punktów ekstremalnych.

Fakt 2. *Każdy domknięty, wypukły i ograniczony zbiór $A \in \mathbb{R}^n$ ma punkt ekstremalny.*

Dowód. Bez straty ogólności można założyć, że $0 \in A$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na wymiar przestrzeni, w której zbiór jest zawarty.

Dla $n = 1$ zbiór A musi być domkniętym odcinkiem lub zbiorem jednopunktowym, ma więc punkt ekstremalny.

Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla wszystkich $n < k$. Ustalmy wektor v i niech H_v^r oznacza $(k-1)$-wymiarową podprzestrzeń $\mathbb{R}^k$, prostopadłą do wektora v, odległą od 0 o r. Istnieje r_0 takie, że $H_v^{r_0} \cap A \neq \emptyset$ i dla każdego $r > r_0$ zachodzi $H_v^r \cap A = \emptyset$. Zbiór $H_v^{r_0} \cap A$ jest domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorem $(k-1)$-wymiarowej podprzestrzeni $H_v^{r_0}$. Na mocy założenia indukcyjnego ma punkt ekstremalny. Punkt ten jest punktem ekstremalnym zbioru A. □

Skonstruujemy teraz przykład pokazujący, że w przestrzeni nieskończeniewymiarowej zbiór wypukły i domknięty nie musi mieć punktu ekstremalnego. Zacznijmy od przypomnienia definicji przestrzeni c_0

$$c_0 := \left\{\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\} \text{ z normą } \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Fakt 3. *Domknięta kula jednostkowa w c_0 nie ma punktu ekstremalnego.*

Dla dowolnego ciągu x należącego do domknięcia kuli jednostkowej definiujemy $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ i $b = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ w następujący sposób:

$$a_i = x_i + \frac{1-|x_i|}{i} \qquad b_i = x_i - \frac{1-|x_i|}{i}.$$

Wówczas $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i = 0$, a więc $a, b \in c_0$. Ponadto $\|a\|, \|b\| \leqslant 1$, $a_i \neq b_i$, gdy $|x_i| \neq 1$, oraz

$$x_i = \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}b_i, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

□

Przykład ten skłania do postawienia dwóch problemów. Po pierwsze wiemy już, że skończeniewymiarowa przestrzeń unormowana jest lokalnie zwarta. Można więc w sposób równoważny preformułować Fakt 2 zastępując założenie „domknięty i ograniczony” słowem „zwarty” i zastanowić się, czy w tak zmodyfikowanej wersji fakt ten pozostaje prawdziwy w przypadku nieskończeniewymiarowym. Twierdzenie Kreina–Milmana nie tylko pozytywnie rozstrzyga ten problem, ale pokazuje ponadto związki między zbiorem zwartym wypukłym a jego punktami ekstremalnymi. Zanim przytoczymy jego treść przypomnijmy, że powłoką wypukłą zbioru A nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający A.

Twierdzenie 3 (Krein–Milman). *W dowolnej przestrzeni unormowanej zbiór zwarty i wypukły jest domknięciem powłoki wypukłej zbioru swoich punktów ekstremalnych.*

Drugi problem, któremu warto poświęcić chwilę uwagi, dotyczy istnienia punktów ekstremalnych kul jednostkowych w przestrzeniach nieskończonego wymiaru. Jak już odnotowaliśmy, kula w przestrzeni nieskończeniewymiarowej nie jest zwarta, więc powyższa wersja twierdzenia Kreina–Milmana nie przyda się przy ustalaniu, czy brak punktów ekstremalnych kuli jednostkowej charakteryzuje przestrzenie unormowane nieskończonego wymiaru. Rozstrzygnięcie problemu jest negatywne, łatwo dostrzec, że w dowolnej przestrzeni unitarnej, także nieskończeniewymiarowej, kula ma punkty ekstremalne.

Przestrzeń unormowaną nazywamy ściśle wypukłą gdy dla dowolnych dwóch niezerowych wektorów x, y prawdziwa jest implikacja

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = cy.$$

Łatwo sprawdzić, że w przestrzeni ściśle wypukłej każdy punkt brzegowy kuli jest jej punktem ekstremalnym.

Każda przestrzeń unitarna jest ściśle wypukłą przestrzenią unormowaną.

Ogólniejsza wersja Twierdzenia 3 pozwala na wskazanie klasy przestrzeni, w której kula jest domkniętą powłoką wypukłą zbioru swoich punktów ekstremalnych. Aby ją sformułować przypomnimy jak wprowadza się słabą* topologię na przestrzeni sprzężonej do przestrzeni unormowanej.

Niech X^* oznacza przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych ciągłych na X, na X^* określamy normę

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |x^*(x)| \quad \text{dla} \quad x^* \in X^*.$$

Każdy element $x \in X$ definiuje pewien funkcjonał liniowy ciągły na X^* zadany w następujący sposób $x(x^*) := x^*(x)$.

Definicja 3. Słabą* topologią *na X^* nazywamy najsłabszą topologię, przy której wszystkie funkcjonały na X^* zadane przez elementy przestrzeni X są ciągłe.*

Przestrzeń liniowo-topologiczną nazywamy lokalnie wypukłą, gdy posiada bazę otoczeń zera złożoną ze zbiorów wypukłych.

Fakt 4. *Przestrzeń X^* wyposażona w słabą* topologię jest lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną.*

Przytoczymy teraz dwa silne i ważne twierdzenia analizy funkcjonalnej. Twierdzenia te wraz z dowodami można znaleźć w [3] str. 180, 187 lub [4] str. 87, 81.

Twierdzenie 4 (Krein–Milman (wersja ogólna)). *W lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo-topologicznej zbiór zwarty i wypukły jest domknięciem powłoki wypukłej zbioru swoich punktów ekstremalnych.*

Twierdzenie 5 (Banach–Alaoglu). *Zbiór* $\{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \leqslant 1\}$ *jest zwarty w słabej* topologii.*

Przestrzenie l_p dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ są przestrzeniami sprzężonymi do pewnych przestrzeni unormowanych, podobnie L_p dla $1 < p \leqslant \infty$.

Wykorzystajmy zebrane powyżej fakty. Jeśli przestrzeń unormowana Y jest przestrzenią sprzężoną do pewnej przestrzeni unormowanej, to możemy wprowadzić na niej słabą* topologię. Kula jednostkowa w tej przestrzeni to zbiór

$$\{y \in Y = X^* \mid \|y\| = \|x^*\| \leqslant 1\},$$

a więc na mocy Twierdzenia Banacha–Alaoglu i Faktu 4 jest zbiorem zwartym w lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo-topologicznej. Stosując twierdzenie Kreina–Milmana w wersji ogólnej stwierdzamy, że kula jednostkowa w Y jest domkniętą powłoką wypukłą zbioru swoich punktów ekstremalnych. Przy okazji powyższego rozumowania wykazaliśmy następującą własność przestrzeni c_0.

Fakt 5. *Przestrzeń* c_0 *nie jest przestrzenią sprzężoną do żadnej przestrzeni unormowanej.*

2. Istnienie punktu Czebyszewa

Definicja 4. *Niech* $(X, \|\ \|)$ *będzie przestrzenią Banacha.* Punktem Czebyszewa *niepustego ograniczonego zbioru* $M \subset X$ *nazywamy punkt* x_0 *taki, że*

$$R(M, x_0) = \inf_{x \in X} R(M, x), \quad \text{gdzie} \quad R(M, x) = \sup_{y \in M} \|x - y\|.$$

Punkt Czebyszewa trójkąta rozwartokątnego w przestrzeni euklidesowej NIE JEST środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Punkt Czebyszewa zbioru M oznaczać będziemy przez $C(M)$; niech ponadto $R(M) = \inf_{x \in X} R(M, x)$.
W przypadku, gdy M jest domkniętym podzbiorem przestrzeni skończeniewymiarowej, $R(M)$ jest promieniem najmniejszej kuli, w której można zawrzeć M, a punkt Czebyszewa jest środkiem tej kuli. Ponieważ kula w przestrzeni unormowanej jest zbiorem wypukłym, prawdziwy jest następujący fakt.

Fakt 6. *Punkt Czebyszewa ograniczonego zbioru* M *pokrywa sie z punktem Czebyszewa powłoki wypukłej* M*.*

Zajmijmy się punktem Czebyszewa trójkąta. W przestrzeni euklidesowej łatwo go wskazać, w dowolnej przestrzeni skończonego wymiaru może być trochę trudniej, ale jego istnienie nie budzi większych wątpliwości. Istotnie, można je łatwo wykazać.

Fakt 7. *W skończeniewymiarowej przestrzeni unormowanej każdy trójkąt* T *ma punkt Czebyszewa.*

$T + rB$ jest zbiorem punktów odległych od T o nie więcej niż r.

Dowód. Ponieważ trójkąt jest zbiorem ograniczonym, więc istnieje $r > 0$, takie że $T \subseteq B(0, r)$, gdzie $B(0, 1)$ oznacza domkniętą kulę jednostkową w rozpatrywanej przestrzeni. Zbiór $T + B(0, r)$ jest zbiorem ograniczonym, więc $\overline{T + B(0, r)}$ jest zbiorem zwartym. Oczywiście $C(T) \in \overline{T + B(0, r)}$, gdyż w przeciwnym przypadku $R(T, 0) < R(T, C(T))$, co pozostaje w sprzeczności z definicją punktu Czebyszewa. Niech t_1, t_2, t_3 oznaczają wierzchołki trójkąta, zdefiniujmy funkcję $r(x, T) = \max\{\|x - t_1\|, \|x - t_2\|, \|x - t_3\|\}$. Funkcja $r(x, T)$ jest ciągła, więc przyjmuje swoje minimum na zbiorze zwartym $\overline{T + rB}$ w punkcie x_0, który jest poszukiwanym punktem Czebyszewa. □

Mimo iż trójkąt jest zawsze zawarty w dwuwymiarowej podprzestrzeni afinicznej, można wskazać przestrzeń nieskończonego wymiaru oraz zbiór trzypunktowy, który nie ma środka Czebyszewa. Ten fakt może budzić sprzeciw intuicji ukształtowanej w przestrzeni euklidesowej. Zdawać by się mogło, że rozpatrywany tu problem jest zagadnieniem skończenie wymiarowym, że można się ograniczyć do pracy z trójwymiarową podprzestrzenią liniową zawierającą trójkąt. A jednak nie. Istotnym jest, w jakim obszarze poszukujemy owego środka najmniejszej kuli zawierającej zbiór. Zauważmy, że już w $\mathbb{R}^3$ z normą $\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ można wskazać trójkąt, którego punkt Czebyszewa nie należy do zawierającej go hiperpłaszczyzny afinicznej. Podobnie, nie możemy założyć, że środek Czebyszewa trójkąta jest zawarty w trójwymiarowej przestrzeni liniowej wyznaczonej przez jego wierzchołki, ani w żadnej innej zadanej z góry przestrzeni skończonego wymiaru. Szukając punktu Czebyszewa trójkąta w dowolnej przestrzeni, możemy jedynie zawęzić obszar poszukiwań do pewnej kuli, ale – jako że ta w przypadku nieskończonego wymiaru nie jest zwarta – funkcja ciągła $R(x,T)$ nie musi przyjmować na niej swojego minimum. Aby wykazać, że opisana sytuacja faktycznie może mieć miejsce, przedstawimy dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6 (Koniagin). *Istnieje przestrzeń unormowana X, a w niej zbiór trzypunktowy, który nie ma punktu Czebyszewa.*

Aby sformułować występujacy w dowodzie twierdzenia Koniagina fakt przypomnimy, że podzbiór K przestrzeni liniowej X nazywamy ograniczonym, gdy nie zawiera żadnej półprostej, a pochłaniającym, gdy $\forall x \in X\ \exists t > 0\ x \in tK$.

Fakt 8. *Niech K będzie wypukłym, symetrycznym względem zera, pochłaniającym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni liniowej X. Wówczas formuła*

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 \mid x \in tK\}$$

zadaje normę na przestrzeni X. Ponadto domknięcie zbioru K w normie $\|\cdot\|_K$ jest domkniętą kulą jednostkową w $(X, \|\cdot\|_K)$.

Konstrukcja opisanej w twierdzeniu Koniagina przestrzeni X opiera się na zdefiniowaniu odpowiedniej normy na przestrzeni l_1, czyli w

$$l_1 \colon = \left\{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\} \text{ z normą } \|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|.$$

Dowód Twierdzenia Koniagina. Niech $Y \colon = \{x \in l_1 \mid x_1 = 0\}$. Funkcjonał $g = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(1 - 1/i)$ jest funkcjonałem ciągłym na Y o normie równej 1, nieosiągającym wartości 1 na kuli jednostkowej. Zdefiniujmy następujące zbiory

$$\begin{aligned} C_1 &= \{y + te_1 \mid y \in Y\ \|y\|_1 \leqslant 3 - 2{,}5|t|\}, \\ C_2 &= \{y + te_1 \mid y \in Y\ |g(y)| \leqslant 1,\ |t| \leqslant 1\}, \\ B &= C_1 \cap C_2. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że zbiory C_1 i C_2 są ograniczone, wypukłe i symetryczne względem 0 oraz że zawierają pewną kulę, a więc posiadają własność pochłaniania. Zbiór B również ma opisane wyżej własności, stąd formuła (8) zadaje na l_1 normę $\|\cdot\|_B$, w której B jest kulą jednostkową.

Niech $\bar{y} \in Y$ będzie elementem przestrzeni Y spełniającym warunki

$$\|\bar{y}\|_1 \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{oraz} \quad g(\bar{y}) = 1.$$

Niech e_i oznacza ciąg, którego i-ty wyraz jest równy 1, a pozostałe wyrazy są równe 0. Wykażemy, że zbiór $M = \{e_1, -e_1, 3\bar{y}/2\}$ nie ma punktu Czebyszewa.

Ponieważ g jest funkcjonałem o normie 1, to dla każdego $\varepsilon > 0$ można wskazać element $y_\varepsilon \in Y$ taki, że

$$\|y_\varepsilon\| = \frac{1}{2} \text{ i } g(y_\varepsilon) > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Oczywiście $y_\varepsilon \pm e_1 \in B$. Zauważmy, że $(y_\varepsilon - 3\bar{y}/2)$ jest elementem podprzestrzeni Y spełniającym warunki

$$\left\| y_\varepsilon - \frac{3}{2}\bar{y} \right\|_1 \leqslant \|y_\varepsilon\|_1 + \frac{3}{2}\|\bar{y}\|_1 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} < 3,$$

$$1 \leqslant g\left(\frac{3}{2}\bar{y} - y_\varepsilon\right) < 1 + \varepsilon,$$

skąd otrzymujemy zawieranie $(y_\varepsilon - 3\bar{y}/2) \in (1+\varepsilon)B$. Mamy

$$R(M, y_\varepsilon) = \max\{\|m - y_\varepsilon\|_B \mid m \in M|\} \leqslant 1 + \varepsilon,$$

a więc $R(M) \leqslant 1$.

Przypuśćmy teraz, że istnieje punkt x_c będący środkiem Czebyszewa zbioru M rozpatrywanego jako podzbiór przestrzeni unormowanej $X = (l_1, \|\cdot\|_B)$. Punkt ten musiałby spełniać następujące warunki

$$\|x \ \pm e_1\|_B \leqslant 1 \qquad \text{oraz} \quad \left\|x_c - \frac{3}{2}\bar{y}\right\|_B \leqslant 1. \tag{1}$$

Punkt x_c możemy przedstawić jako $x_c = y_c + t\ e_1$, dla pewnego $y_c \in Y$ i $t \in \mathbb{R}$. Ponieważ $x_c - e_1 = y_c + (t-1)e_1 \in B \subseteq C_2$, to $t \ \geqslant 0$, podobnie z zawierania $x_c + e_1 = y_c + (t+1)e_1$ wnioskujemy, że $t \ \leqslant 0$, a więc $x_c = y_c \in Y$.

Zauważmy ponownie, że warunki (1) pociągają zawieranie $y_c + e_1 \in B \subseteq C_1$, co gwarantuje oszacowanie $\|y_c\| \leqslant 1/2$, zatem $g(x_c) = g(y_c) < 1/2$. Przypomnijmy, że $\bar{y}$ został wybrany w taki sposób, by $g(\bar{y}) = 1$. Otrzymujemy

$$g\left(\frac{3}{2}\bar{y} - x_c\right) = 3/2 - g(y_c) > 1,$$

co oznacza, że $3\bar{y}/2 - y_c \notin C_2$. Wykazaliśmy zatem, że nie istnieje punkt spełniający warunki (1), a więc zbiór $M \subset X$ nie ma środka Czebyszewa. □

Podane tu twierdzenie jest słabszą wersją twierdzenia wykazanego przez Koniagina [2].

Twierdzenie 7 (Koniagin – wersja ogólna). *W każdej nierefleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ można wprowadzić równoważną normę $\|\cdot\|_\approx$ w taki sposób, by istniał trzypunktowy zbiór nieposiadający punktu Czebyszewa.*

Dowód ogólniejszej wersji przebiega niemal identycznie jak dowód zamieszczony powyżej, jednak w ogólnym przypadku zamiast wskazywać konkretny funkcjonał nieosiągający swojego ekstremum na kuli jednostkowej, wykorzystuje się pochodzącą od Jamesa [1] charakteryzację przestrzeni refleksywnych.

Twierdzenie 8 (James). *Przestrzeń jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy funkcjonał osiąga swoją normę na kuli jednostkowej.*

Literatura

[1] R.C. James *Characterizations of reflexivity*, Stud. math. **23** (1964), no 3, 205–218

[2] S.V. Konyagin *A remark on renormings of nonreflexive spaces and the existence of Cebyshev center*, Moscow Univ. Math. Bull. **43** (1998), no. 2, 55–56.

[3] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[4] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa 1998.