Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Nieskończoność*, styczeń 2007, i nagrodzonego Medalem Filca.

Dwa do nieskończoności

Dominik KWIETNIAK, Kraków

Tytułowe „dwa do nieskończoności” odnosi się do symbolu 2^∞, który bywa używany dla oznaczenia różnych, pozornie nie powiązanych ze sobą, obiektów matematycznych. W kolejnych ustępach tego artykułu postaramy się przybliżyć jedną z co najmniej trzech sytuacji, w których użycie symbolu 2^∞ wydaje się w naturalny sposób odzwierciedlać naturę opisywanych obiektów.

Przykład ten można zaliczyć do szeroko rozumianej teorii dyskretnych układów dynamicznych, więc do zrozumienia dalszej części niniejszego artykułu niezbędna będzie znajomość pewnych podstawowych terminów używanych w tej teorii. Materiał ten omówimy pokrótce w następnym paragrafie.

1. Dyskretne układy dynamiczne

Rozważać dalej będziemy układy dynamiczne zadane przez funkcje ciągłe f. W sytuacji ogólnej funkcje te przeprowadzają pewną przestrzeń metryczną zwartą X w siebie, ale nas będzie interesował przede wszystkim przypadek, gdy $X = [0,1]$. Załóżmy więc, że mamy daną funkcję ciągłą f określoną na odcinku domkniętym $[0,1]$, której wartości także należą do tego odcinka, czyli $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$. Interesuje nas zachowanie *orbity* dowolnie wybranego punktu $x_0 \in [0,1]$ w układzie generowanym przez f, czyli własności zbioru punktów postaci

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

Korzystając z naturalnego porządku, który można wprowadzić na każdej orbicie, możemy, gdy będzie to dla nas wygodne, dowolną orbitę utożsamiać z ciągiem o wyrazach

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0),$$

gdzie $n \geq 0$. Tutaj przez f^n rozumiemy funkcję f, złożoną ze sobą n razy:

$$f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{ razy}}\colon [0,1] \mapsto [0,1]$$

oraz umawiamy się, że $f^0(x) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

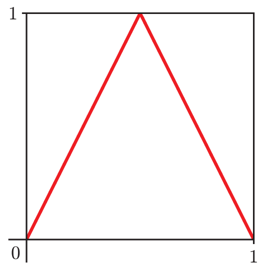
Szczególne znaczenie mają *punkty okresowe*, czyli punkty, których orbity są zbiorami skończonymi (gdy patrzymy na orbity jak na ciągi, będą to te punkty, których orbity są ciągami okresowymi). Zauważmy, że punkt x_0 jest punktem okresowym dla f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna $n \geq 1$ taka, że $f^n(x_0) = x_0$. Wyróżniamy punkty okresowe spełniające warunek $f(x) = x$ i nazywamy je *punktami stałymi* funkcji f. Jeżeli x_0 jest punktem okresowym, to liczbę elementów orbity punktu x_0, czyli najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $f^n(x_0) = x_0$ nazywamy *okresem podstawowym* punktu x_0. Orbitę punktu okresowego o okresie podstawowym n nazywamy też *cyklem o długości* n, lub krótko n*-cyklem*.

Dla przykładu przyjrzyjmy się bliżej *przekształceniu namiotowemu*, czyli funkcji $T\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ danej wzorem:

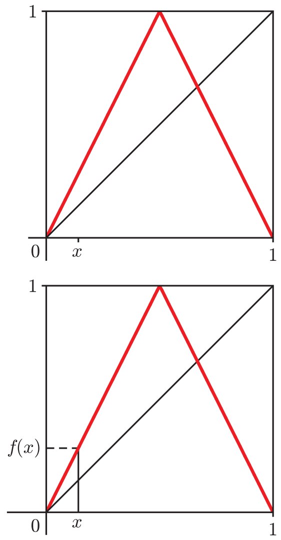
$$T(x) = 1 - |1-2x| = \begin{cases} 2x, & \text{gdy } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \text{gdy } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Prześledzimy zachowanie orbit kilku wybranych punktów w układzie zadanym przez T. Naszą analizę zaczynamy od sporządzenia wykresu przekształcenia namiotowego. Szkicujemy także pomocniczą prostą $y = x$. Na osi odciętych (X) wybieramy punkty x_0, którego orbitę chcemy zbadać. Wartość funkcji f w x_0 odczytamy łącząc punkt x_0 z leżącym bezpośrednio nad nim punktem wykresu f i odczytując jego drugą współrzędną (patrz rysunek 2).

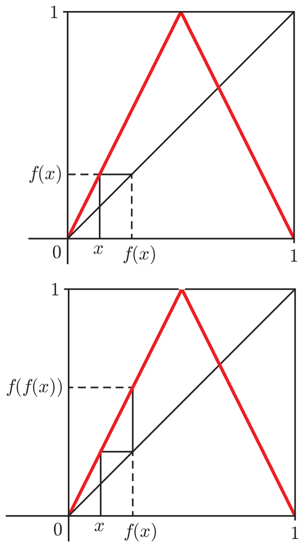
Na osi rzędnych mamy teraz punkt $f(x_0)$. Aby znaleźć wartość f w punkcie $f(x_0)$ prowadzimy prostą równoległą do osi odciętych łączącą nasz punkt z wykresu z punktem na prostej $y = x$. Ten ostatni punkt łączymy z wykresem funkcji f za pomocą prostej równoległej do osi rzędnych. Druga współrzędna nowego punktu na wykresie jest równa $f(f(x_0))$ (patrz rysunek 3). Powtarzając tę procedurę możemy zobrazować dowolnie długi fragment orbity.



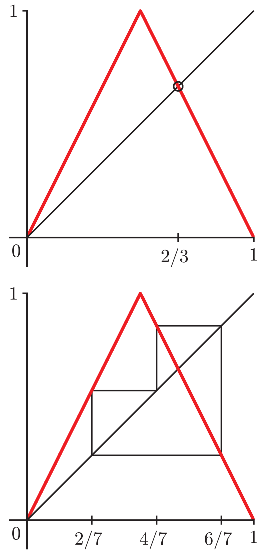
Rys. 1. Wykres przekształcenia namiotowego T.



Rys. 2. Odczytanie wartości w punkcie x.



Rys. 3. Odczytanie wartości drugiej iteracji



Rys. 4. Punkt stały (po lewej) i cykl długości 3 dla T (po prawej).

1. Jeżeli $x_0 = 2/3$, to $T(x_0) = 2/3$, a zatem orbita x_0 jest zbiorem jednoelementowym, a $x_0 = 2/3$ jest punktem stałym dla T (rysunek 4).
2. Jeżeli $x_0 = 2/7$, to
$$f(2/7) = 4/7, \quad f(4/7) = 6/7, \quad f(6/7) = 2/7,$$
czyli x_0 jest punktem okresowym o okresie podstawowym równym 3 a zbiór $\{2/7, 4/7, 6/7\}$ jest cyklem długości 3 (rysunek 4).
3. Jeżeli $x_0 = \pi - 3$, to orbita x_0 będzie zbiorem nieskończonym, a symulacje komputerowe sugerują, że jego orbita jest gęstym podzbiorem odcinka $[0, 1]$ (rysunek 5).

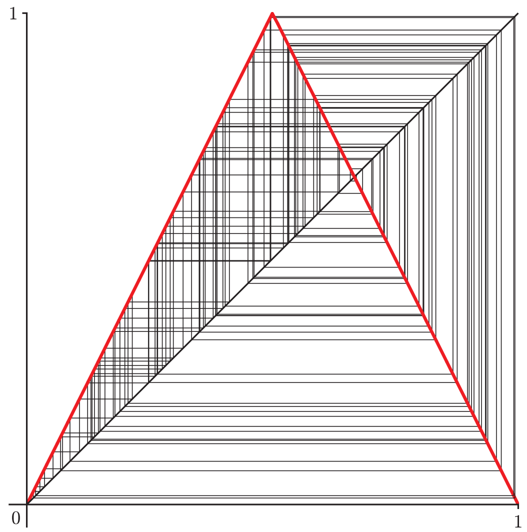
2. Twierdzenie Szarkowskiego

Opiszemy pewien porządek na zbiorze liczb naturalnych, nazywany od nazwiska odkrywcy porządkiem Szarkowskiego. Dla oznaczenia tego porządku użyjemy symbolu $\rhd$, czyli zapis $k \rhd l$ należy rozumieć: „k poprzedza (jest większe od) l w porządku Szarkowskiego”. Liczbą największą w naszym porządku niech będzie liczba 3, następną 5 i dalej uporządkujmy wszystkie liczby nieparzyste większe od 5 wypisując je w kolejności rosnącej:

$$\mathbf{3} \rhd \mathbf{5} \rhd \mathbf{7} \rhd \mathbf{9} \rhd \mathbf{11} \rhd \ldots$$

Następnie uszeregujmy liczby parzyste nie będące potęgami liczby 2, ustawiając najpierw w kolejności rosnącej wszystkie liczby, które w rozkładzie na czynniki pierwsze mają dokładnie jedną 2 i co najmniej jedną liczbę nieparzystą:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd \mathbf{3 \cdot 2} \rhd \mathbf{5 \cdot 2} \rhd \mathbf{7 \cdot 2} \rhd \ldots,$$



Rys. 5. Sto pierwszych wyrazów orbity punktu $x_0 = \pi - 3$.

dalej, ponownie w kolejności rosnącej, porządkujemy wszystkie liczby parzyste, których rozkład na czynniki pierwsze zawiera dokładnie dwie 2 i jakąś liczbę nieparzystą:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2 \rhd 5 \cdot 2 \rhd 7 \cdot 2 \rhd \ldots$$
$$\rhd \mathbf{3 \cdot 2^2} \rhd \mathbf{5 \cdot 2^2} \rhd \mathbf{7 \cdot 2^2} \rhd \ldots.$$

W analogiczny sposób porządkujemy pozostałe liczby naturalne, które mają w swoim rozkładzie jakiekolwiek czynniki nieparzyste. Na końcu ustawiamy wszystkie potęgi 2 w kolejności malejącej, a za liczbę najmniejszą w naszym porządku przyjmujemy liczbę 1:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2 \rhd 5 \cdot 2 \rhd 7 \cdot 2 \rhd \ldots \rhd \mathbf{2^3} \rhd \mathbf{2^2} \rhd \mathbf{2} \rhd \mathbf{1}.$$

Przy takiej konstrukcji porządku wygodnie nam będzie umówić się, że liczbę $1 = 2^0$ będziemy traktować jako potęgę 2. Otrzymany porządek w zbiorze liczb naturalnych możemy teraz zapisać tak:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2 \rhd 5 \cdot 2 \rhd \ldots$$
$$\rhd 3 \cdot 2^2 \rhd 5 \cdot 2^2 \rhd \ldots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Posługując się tym porządkiem możemy podać sławne twierdzenie, które w literaturze przedmiotu łączy się z nazwiskiem Szarkowskiego:

Słynne Twierdzenie Szarkowskiego. *Jeżeli przekształcenie ciągłe* $f\colon [0, 1] \mapsto [0, 1]$ *posiada cykl długości* k *a* l *jest liczbą mniejszą od* k *w porządku Szarkowskiego, to* f *posiada także cykl o długości* l.

Zgodnie z powyższym twierdzeniem, jeżeli f posiada punkt okresowy o okresie podstawowym 3, to każda liczba naturalna musi być okresem podstawowym dla pewnej orbity okresowej f. Z drugiej strony, jeżeli najdłuższy cykl dla f ma 8 elementów, to f posiada także orbity okresowe o okresie podstawowym 1, 2 i 4 oraz żadna inna liczba naturalna nie jest już długością cyklu dla f.

Pomimo, że tylko to twierdzenie łączy się zazwyczaj z nazwiskiem Szarkowskiego, to należy pamiętać, że powyższe sformułowanie jest jedynie częścią oryginalnego wyniku. W swojej pracy, która ukazała się w roku 1964 w czasopiśmie *Ukrainskij matematiczeskij żurnał*, Szarkowski udowodnił, że zachodzi także:

Twierdzenie Szarkowskiego (część 2). *Dla każdej liczby naturalnej l istnieje funkcja ciągła $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$, która posiada cykl o długości l i żadna liczba większa od l w porządku Szarkowskiego nie jest długością cyklu dla f.*

Rok później Szarkowski uzupełnił swoje wyniki, podając następujący przykład:

Twierdzenie Szarkowskiego (część 3). *Istnieje przekształcenie ciągłe $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ takie, że dla każdego n naturalnego istnieje cykl dla f o długości 2^n i żadna liczba naturalna nie będąca potęgą 2 nie jest okresem podstawowym orbity okresowej dla f.*

Rozbudujemy teraz odrobinę naszą notację o dodatkowe symbole i oznaczenia. Pozwoli to nam zwięźle wypowiedzieć trzy powyższe twierdzenia Szarkowskiego.

Przypominamy, że liczbę 1 uznajemy tu za potęgę dwójki!

Zauważmy najpierw, że w zaproponowanym przez Szarkowskiego porządku jedynymi niepustymi podzbiorami zbioru liczb naturalnych nie posiadającymi najmniejszego ograniczenia górnego (supremum) są nieskończone podzbiory zbioru wszystkich potęg 2, to jest zbioru:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\}.$$

Jakżeby inaczej!

Lukę tę możemy uzupełnić dokładając do zbioru liczb naturalnych specjalny element, który oznaczamy $\mathbf{2}^{\infty}$. Rozszerzamy teraz porządek Szarkowskiego na nasz powiększony zbiór $\mathbb{N} \cup \{2^{\infty}\}$, deklarując, że 2^{∞} jest większe od każdej liczby będącej potęgą 2 i mniejsze od wszystkich pozostałych liczb naturalnych. Nasz poprawiony porządek wygląda teraz tak:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 3\cdot 2 \rhd 5 \cdot 2 \rhd \ldots \rhd \mathbf{2}^{\infty} \rhd \ldots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Dla danego elementu $s \in \mathbb{N} \cup \{2^{\infty}\}$ definiujemy zbiór $\mathbf{Sz}(\boldsymbol{s})$, którego elementami są wszystkie liczby naturalne występujące po s w rozszerzonym porządku Szarkowskiego oraz s pod warunkiem, że s jest liczbą naturalną,

$$\mathrm{Sz}(s) = \{k \in \mathbb{N} : s \trianglerighteq k\}.$$

W myśl tej definicji mamy na przykład:

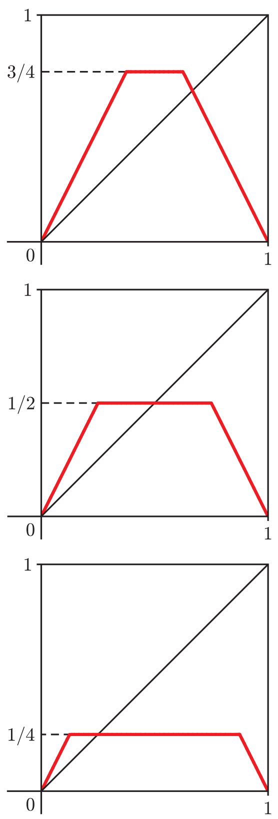
$$\begin{aligned} \mathrm{Sz}(3) &= \mathbb{N}, \\ \mathrm{Sz}(6) &= \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \\ \mathrm{Sz}(16) &= \{1, 2, 4, 8, 16\} \\ \mathrm{Sz}(2^{\infty}) &= \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}. \end{aligned}$$

Przez $\mathbf{Per}(\boldsymbol{f})$ będziemy oznaczali zbiór wszystkich liczb naturalnych, które są okresami podstawowymi dla orbit okresowych funkcji f. Dla przykładu: jeżeli T jest zdefiniowanym wyżej przekształceniem namiotowym, to $\mathrm{Per}(T) = \mathbb{N}$, a dla odwzorowania i danego dla $x \in [0,1]$ wzorem $i(x) = x$ mamy $\mathrm{Per}(i) = \{1\}$.

Możemy teraz podsumować cytowane wyżej rezultaty Szarkowskiego w jednej „zwartej" postaci.

Twierdzenie Szarkowskiego. *Jeżeli przekształcenie $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ jest ciągłe, to istnieje $s \in \mathbb{N} \cup \{2^{\infty}\}$ takie, że $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Sz}(s)$. Co więcej, dla każdego $s \in \mathbb{N} \cup \{2^{\infty}\}$ istnieje taka funkcja ciągłe $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$, że $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Sz}(s)$.*

Oryginalne rozumowanie Szarkowskiego odwoływało się do elementarnych własności funkcji ciągłych na odcinku, ale nie było wolne od technicznych zawiłości. Dziś znane są inne, krótsze dowody tego twierdzenia. Do ich zrozumienia nadal nie potrzeba zaawansowanej matematyki, ale wciąż nie nadają się one, zdaniem piszącego te słowa, do zaprezentowania w trakcie jednego 45 minutowego wykładu. Można jednak (i to uczynimy) przedstawić wyjątkowo pomysłowy (choć niekonstruktywny) dowód drugiej i trzeciej części twierdzenia Szarkowskiego. Dowód ten znaleźć można w książce *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, której autorami są Lluís Alsedà, Jaume Llibre i Michał Misiurewicz.



Rys. 6. Wykresy T_a, gdy $a = \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Dowód. Chcemy wykazać, że dla dowolnego $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ istnieje funkcja ciągła $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ taka, że $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Sz}(s)$. Wykażemy, że odpowiednie przykłady można znaleźć wśród rodziny „przekształceń trapezowych", czyli funkcji zdefiniowanych dla $x \in [0,1]$ wzorem

$$T_a(x) = \min\{T(x), a\},$$

gdzie T oznacza jak poprzednio przekształcenie namiotowe, zaś $a \in [0,1]$. Wykres każdej z funkcji T_a powstaje poprzez „ścięcie" na wysokości a wykresu przekształcenia namiotowego. Oczywiście mamy $T_1 \equiv T$ oraz $T_0 \equiv 0$.

Przypomnijmy, że przekształcenie namiotowe ma cykl o długości 3 (tworzą go liczby 2/7, 4/7 oraz 6/7), zatem na mocy pierwszej, „słynnej" części twierdzenia Szarkowskiego $\mathrm{Per}(T_1) = \mathbb{N}$. Dla funkcji stale równej zero mamy oczywiście $\mathrm{Sz}(T_0) = \{1\}$.

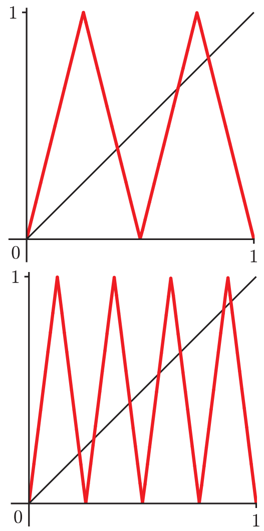
Zauważmy, że dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ funkcja T ma skończenie wiele cykli o długości s. Jak już powiedzieliśmy zawsze co najmniej jeden cykl długości s istnieje. Z drugiej strony elementy cyklu o długości s zawarte są w zbiorze rozwiązań równania $T^s(x) = x$, a to ostatnie równanie ma dokładnie 2^s rozwiązań, o czym łatwo się przekonać analizując wykres T^s (patrz rysunek 7).

Zatem mając daną liczbę naturalną s spośród wszystkich s-cykli dla T możemy zawsze wybrać ten, którego największy element leży najbliżej punktu 0. Najmniejszy spośród „prawych końców" cykli o długości s oznaczamy przez a_s, czyli

$$a_s = \min\{\max P : P \text{ jest } s \text{ cyklem dla } T\}.$$

Niech $g_s = T_{a_s}$ (patrz rysunek 8). Oznaczmy przez $\mathrm{Const}(g_s)$ największy przedział otwarty, na którym funkcja g_s jest stała. Zachodzą równości:

$$\mathrm{Const}(g_s) = \{x \in [0,1] : T(x) > a_s\} = \{x \in [0,1] : T(x) \neq g_s(x)\}.$$



Rys. 7. Wykresy T^2 i T^3.

Odnotujmy, że dla dowolnych $s, t \in \mathbb{N}$, $s \neq t$ zachodzi następująca implikacja:

$$t \in \mathrm{Per}(g_s) \implies a_t < a_s. \qquad (\bigstar)$$

Dla jej dowodu załóżmy, że Q jest pewnym t-cyklem dla g_s. Cykl P jest rozłączny z Q, bo mają różne okresy podstawowe. Gdyby jakieś elementy cyklu Q należałyby do $\mathrm{Const}(g_s)$, to ponieważ $g_s(\mathrm{Const}(g_s)) = \{a_s\}$ i a_s jest elementem cyklu P, przy następnej iteracji g_s wpadałyby w cykl P. Dlatego Q musi być podzbiorem $[0,1] \setminus \mathrm{Const}(g_s)$. W szczególności $T|_Q = g_s|_Q$, co oznacza, że Q jest t-cyklem dla T. Mamy więc:

$$a_t \leq \max Q < \max g_s = \max P = a_s,$$

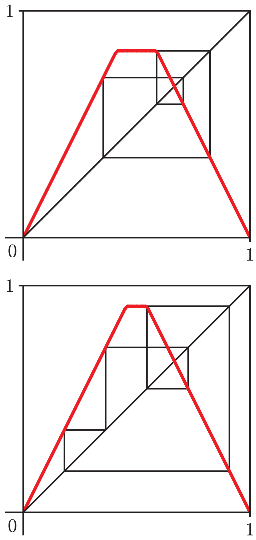
co kończy dowód naszej implikacji.

Z powyższej obserwacji oraz ze pierwszej, słynnej części twierdzenia Szarkowskiego wynika natychmiast, że

$$t \lhd s \implies a_t < a_s. \qquad (\bigstar\bigstar)$$

Twierdzimy, że dla każdego $s \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathrm{Per}(g_s) = \mathrm{Sz}(s)$. Aby to udowodnić ustalmy $s \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że g_s posiada co najmniej jeden cykl P długości s: jest nim ten s-cykl dla T, dla którego $a_s = \max P$ jest najmniejsze spośród wszystkich s-cykli dla T (tak zdefiniowaliśmy funkcję g_s, że $g_s|_P = T|_P$). Oznacza to, że $\mathrm{Sz}(s) \subset \mathrm{Per}(g_s)$.

Pozostaje nam wykazać, że $\mathrm{Per}(g_s) \subset \mathrm{Sz}(s)$. Załóżymy, że to zawieranie nie zachodzi, czyli, że istnieje liczba naturalna t taka, że $t \in \mathrm{Per}(g_s)$ oraz $t \rhd s$. Na mocy implikacji ($\bigstar$) pierwszy z tych warunków oznacza, że $a_t < a_s$. Natomiast na mocy drugiego z tych warunków i implikacji ($\bigstar\bigstar$) wnioskujemy, że $a_t > a_s$. Otrzymana w ten sposób sprzeczność kończy dowód równości $\mathrm{Per}(g_s) = \mathrm{Sz}(s)$ dla $s \in \mathbb{N}$.



Rys. 8. Wykresy g_4 i g_5.

Aby zakończyć cały dowód pozostaje jeszcze udowodnić istnienie funkcji g_∞ takiej, że

$$\mathrm{Per}(g_\infty) = \mathrm{Sz}(2^\infty) = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}.$$

Zauważmy, że wykazaliśmy dotychczas, że

$$a_2 < a_4 < a_8 < \ldots \leq 1.$$

Możemy zatem zdefiniować liczbę

$$a_{2^\infty} = \sup\{a_{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$$

oraz funkcję

$$g_\infty = T_{a_{2^\infty}}.$$

Chcemy pokazać, że $\mathrm{Per}(g_\infty) = \mathrm{Sz}(2^\infty)$. Zauważmy najpierw, że na mocy implikacji ($\bigstar$) i definicji porządku Szarkowskiego dla dowolnych liczb naturalnych n i m oraz każdej liczby nieparzystej $q > 1$ zachodzą nierówności:

$$a_{2^n} < a_{2^{n+1}} \leq \sup\{a_{2^n} : n \in \mathbb{N}\} = a_{2^\infty} \leq a_{3 \cdot 2^{m+1}} < a_{q \cdot 2^m}.$$

Oznacza to, że

$$a_{2^n} < a_{2^\infty} < a_{q \cdot 2^m}. \qquad (\bigstar\bigstar\bigstar)$$

dla dowolnej liczby nieparzystej $q > 1$ oraz wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n i m. Wynika stąd, że $\mathrm{Const}(g_\infty) \subset \mathrm{Const}(g_{2^n})$ dla każdego n, gdzie $\mathrm{Const}(g_\infty)$ jest największym przedziałem otwartym, na którym funkcja g_∞ jest stała. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ a Q_n jest cyklem długości 2^n dla g_{2^n}, to rozumując jak wyżej widzimy, że

$$g_{2^n}|_{Q_n} = T|_{Q_n} = g_\infty|_{Q_n},$$

zatem $\mathrm{Sz}(2^\infty) \subset \mathrm{Per}(g_\infty)$.

Gdyby zawieranie $\mathrm{Sz}(2^\infty) \supset \mathrm{Per}(g_\infty)$ nie zachodziło, to istniałby cykl dla g_∞ o długości t, gdzie $t = q \cdot 2^m$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej m oraz liczby nieparzystej q większej od 1. Oznaczmy ten cykl literą R. Wówczas

$$a_t \leq \max R \leq \max g_\infty = a_{2^\infty}.$$

Ale nierówność $a_{q \cdot 2^m} \leq a_{2^\infty}$ jest sprzeczna z nierównością ($\bigstar\bigstar\bigstar$), co oznacza, że taki cykl R istnieć nie może i kończy dowód. $\square$

Zobaczyliśmy fragment teorii matematycznej, dla opisania której użycie symbolu 2^∞ wydaje się być jak najbardziej na miejscu. Jak już wspomnieliśmy we wstępie nie jest to jedyna taka sytuacja. Opisanie pozostałych odkładamy na inną okazję, ale zachęcamy Czytelników do zapoznania się z nimi już teraz.