Zapis odczytu wygłoszonego na XXXVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Nieskończoność*, styczeń 2007.

Czy 11 jest największą liczbą na świecie?

Tomasz BARTNICKI, Zielona Góra

Wstęp

Drogi Czytelniku, zanim rozpoczniesz lekturę tego artykułu, chcielibyśmy, abyś odpowiedział na jedno bardzo proste pytanie. *Jaka jest największa liczba, którą znasz?* Jeśli takie pytanie wydało Ci się głupie i chcesz je zbyć milczeniem lub rzucić coś w rodzaju „nie ma przecież największej liczby", to spieszymy z wyjaśnieniami. To, że wśród liczb (np. naturalnych) nie możemy wskazać największej, wiedzą wszyscy. Przecież do każdej, nawet bardzo dużej, liczby zawsze możemy dodać 1, pomnożyć ją przez 2, podnieść do trzeciej potęgi lub dopisać silnię i otrzymać liczbę jeszcze większą. Nie o takie sztuczki nam jednak chodzi. Nie chodzi nam również o nieskończone liczby kardynalne bądź porządkowe. Pytanie postawione na początku dotyczy wyłącznie liczb, które rzeczywiście istnieją w otaczającym nas świecie, czyli bądź to wyrażają jakąś konkretną wielkość (np. fizyczną), bądź też zaistniały w matematyce jako element jakiegoś wzoru, równania, nierówności lub dowodu twierdzenia i są powszechnie rozpoznawane, często mają swoje nazwy, a niejednokrotnie nadajemy im nazwiska wybitnych matematyków.

Ponawiamy więc pytanie. *Jaka jest największa liczba, którą znasz?* Sięgnij zatem, Czytelniku, do najgłębszych zakamarków swojego umysłu i przywołaj całą swą wiedzę matematyczną. Przypomnij sobie wszystkie prace, artykuły, książki (lub czasopisma), które czytałeś bądź tylko przeglądałeś i odpowiedz szczerze na postawione pytanie. Czytając ten artykuł, będziesz mógł porównywać swój wynik z kilkoma znanymi dużymi liczbami, a na zakończenie z absolutnym rekordem w tej dyscyplinie, bowiem poznasz największą liczbę na świecie.

Miejsce trzecie

Jednym z najważniejszych problemów w teorii liczb było określenie, jak gęsto są rozmieszczone liczby pierwsze pośród wszystkich liczb naturalnych. W 1896 roku Jacques Hadamard i Charles de la Vallée Poussin udowodnili niezależnie twierdzenie o liczbach pierwszych, które mówi, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1,$$

gdzie $\pi(x)$ jest funkcją zliczającą liczby pierwsze niewiększe od x. Wiadomo ponadto, że dla $x \geqslant 17$ zachodzi nierówność $\pi(x) > \frac{x}{\ln(x)}$. Twierdzenie powyższe może być również zapisane w postaci

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1,$$

gdzie $\mathrm{Li}(x) = \int_2^\infty \frac{dt}{\ln t}$ nazywamy *przesuniętym logarytmem całkowym.* Badając początkowe wartości funkcji $\pi(x)$ i $\mathrm{Li}(x)$ można by sądzić, że $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ i co więcej, że różnica między obiema funkcjami rośnie nieograniczenie. Jednak w 1914 roku John Littlewood udowodnił zaskakujący fakt, że różnica $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$, wraz ze wzrostem x, zmienia swój znak nieskończenie wiele razy. Niestety, dowód nijak nie określał żadnej wartości x, dla której $\pi(x) \geqslant \mathrm{Li}(x)$, więc naturalnym stało się pytanie o najmniejszą wartość $x = s_0$, która spełnia tę nierówność. Ponieważ liczba s_0 leżała poza zasięgiem możliwości ludzkich obliczeń (jest tak nadal, nawet z wykorzystaniem współczesnych komputerów) zaczęto poszukiwać jakiegokolwiek jej górnego oszacowania. Pierwszy podał je w 1933 roku Stanley Skewes, który wykazał, że

$$s_0 < e^{e^{e^{79}}} \approx 10^{10^{10^{34}}},$$

lecz w jego dowodzie pojawił się jeden istotny mankament: założenie prawdziwości hipotezy Riemanna (do dziś nieudowodnionej). Dopiero w kolejnym dowodzie Skewesa z 1955 roku założenie to zostało usunięte, ale za to górne oszacowanie stało się „lepsze":

$$s_0 < 10^{10^{10^{1000}}}.$$

Dla formalności należy dodać, iż obecnie wiadomo, że $s_0 < 1.397162914 \times 10^{316}$ (Demichel, 2005).

Miejsce drugie

Widać, że do zapisu liczb większych, niż te z poprzedniego rozdziału, tradycyjna notacja potęgowa staje się dość kłopotliwa, gdyż musielibyśmy budować coraz wyższe wieże wykładników. Hugo Steinhaus zaproponował wygodną notację uogólnioną później przez Leo Mosera, która nazywana jest dziś *notacją Steinhausa-Mosera*. Polega ona na tym, że liczbę naturalną n zapisujemy w wielokącie foremnym, a wielkość takiego wyrażenia zależy zarówno od wartości n, jak i od liczby boków wielokąta i jest zdefiniowana następująco:

$$\triangle n = n^n,$$
$$\boxed{n} = n \text{ w } n \text{ trójkątach},$$
$$\pentagon n = n \text{ w } n \text{ kwadratach}.$$

W oryginalnym pomyśle Steinhausa konstrukcja ta kończyła się w tym miejscu, a zamiast pięciokąta używany był okrąg. Moser uogólnił ją definiując n zapisane w k-kącie, jako n zapisane w n $(k-1)$-kątach.

Nietrudno zauważyć, że liczba 1 zapisana w dowolnym wielokącie zawsze da w wyniku 1. Spróbujmy obliczyć, ile wynosi wartość liczby 2 zapisywanej w kolejnych wielokątach.

$$\triangle 2 = 2^2 = 4$$

oraz

$$\boxed{2} = \triangle 4 = 4^4 = 256,$$

jednak wyznaczając wartość 2 w pięciokącie otrzymamy liczbę 256 umieszczoną w 256 trójkątach. Próba jej wyliczenia i zapisania w tradycyjny sposób nie może się oczywiście udać, bowiem już w pierwszym kroku musimy obliczyć 256^{256}, następnie otrzymaną liczbę podnieść do niej samej i tak 256 razy. Steinhaus nazwał tę liczbę MEGA i uznał, że dalsza zabawa w pisanie coraz większych liczb przestaje być ciekawa. Moser posunął się w tym wyścigu jeszcze krok dalej i zdefiniował liczbę

$$\text{MOSER} = 2 \text{ w MEGA-kącie.}$$

Możemy mieć wątpliwości co do tego, czy liczba wymyślona przez Mosera nie jest tworem sztucznym, bo na wstępie tego artykułu zastrzegliśmy przecież, że rozważania nasze ograniczymy wyłącznie do liczb mających jakieś realne zastosowanie. Zgadzamy się z tym po części, jednak argument za uznaniem MOSERA jest taki, że zarówno notacja Steinhausa-Mosera, jak i sama liczba są powszechnie przyjęte i znane matematykom, a jako jej realne zastosowanie możemy uznać to, że przyjmiemy ją za punkt odniesienia dla jeszcze większych liczb, o których mowa będzie w kolejnym rozdziale.

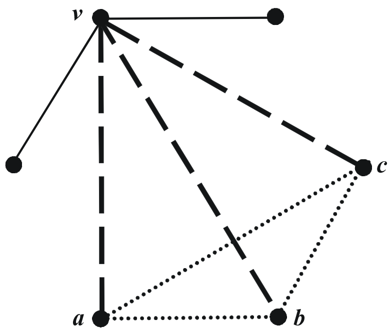
Miejsce pierwsze i rekord świata

Aby dobrze zrozumieć, co wyraża największa liczba na świecie, konieczne będzie krótkie wprowadzenie, które zaczniemy od prostej obserwacji matematyczno-socjologicznej.

Sześć osób na przyjęciu

Wyobraźmy sobie, że w jakimś miejscu (np. na przyjęciu) spotyka się pewna grupa ludzi i, jak to w życiu zwykle bywa, niektórzy z nich znają się, zaś inni są sobie obcy. Możemy założyć, że relacja bycia znajomym jest określona dla każdej pary osób (albo się znają, albo nie znają) i jest symetryczna (jak ja znam ciebie, to i ty znasz mnie). Jeśli spojrzymy teraz na dowolną grupę złożoną z sześciu osób i przeanalizujemy układ znajomości pomiędzy nimi, to łatwo dojdziemy do następującego spostrzeżenia:

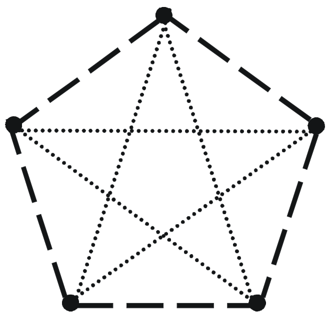
Fakt 1. *Wśród dowolnych sześciu osób zawsze znajdziemy:*
albo trzy osoby, które znają się wzajemnie (każda z każdą),
albo trzy osoby, które nie znają się wcale (żadna z żadną).



Rys. 1. Jednokolorowa klika K_3 w grafie K_6

Dowód. Aby udowodnić ten fakt przeformułujemy go na język teorii grafów następująco: każdą z sześciu osób utożsamiamy z innym wierzchołkiem grafu, a następnie każdą parę wierzchołków (osób) łączymy krawędzią. Powstanie w ten sposób graf, który nazywamy *grafem pełnym* (lub *kliką*) na sześciu wierzchołkach i oznaczamy przez K_6. Układ znajomości przedstawiamy w ten sposób, że każdej krawędzi nadajemy jeden z dwóch kolorów: czerwony – jeśli osoby umieszczone w wierzchołkach, które ona łączy, znają się lub niebieski – jeśli osoby te nie znają się. Wystarczy teraz pokazać, że przy dowolnym takim czerwono-niebieskim kolorowaniu krawędzi, zawsze znajdziemy trzy wierzchołki połączone krawędziami w jednym kolorze (tworzące czerwoną lub niebieską klikę K_3).

Ustalmy w pokolorowanym już grafie dowolny wierzchołek v i zauważmy, że skoro wychodzi z niego pięć krawędzi, to co najmniej trzy z nich muszą być w tym samym kolorze, powiedzmy czerwonym. Oznaczmy wierzchołki na drugich końcach tych krawędzi przez a, b, c i przeanalizujmy kolorowanie powyższego układu (rysunek 1). Ponieważ krawędzie va, vb oraz vc są czerwone, to nadanie koloru czerwonego którejkolwiek z krawędzi ab, bc lub ac spowoduje pojawienie się trójkąta w tym kolorze (odpowiednio vab, vbc lub vac), a więc wszystkie one muszą otrzymać kolor niebieski, ale to z kolei prowadzi do powstania niebieskiego trójkąta abc, co kończy dowód. ☐



Rys.2. Kolorowanie grafu K_5 bez jednokolorowej kliki K_3

Warto jeszcze zauważyć, że w powyższym twierdzeniu liczby sześć nie możemy zmniejszyć, gdyż w grupie pięcioosobowej możemy tak dobrać układ znajomości, aby uniknąć monochromatycznego trójkąta (tak jak na rysunku 2).

Twierdzenie Ramseya

Nasuwa się pytanie, czy twierdzenie o sześciu osobach można uogólnić. Czy, jeżeli zamiast żądać pojawienia się jednokolorowej kliki trzyosobowej, zażądamy, aby taka klika składała się z czterech osób, to czy w odpowiednio dużej grupie musi się ona pojawić. Co wreszcie z ogólnym przypadkiem dowolnej kliki K_k? W 1930 ukazała się praca Franka Ramseya, w której udowodnił on bardzo daleko idące uogólnienie naszych rozważań, a szczególnym przypadkiem była odpowiedź na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie 1 (Ramsey (1930)). *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna n, że wśród dowolnych n osób zawsze znajdziemy:*
albo k osób, które znają się wzajemnie (każda z każdą),
albo k osób, które nie znają się wcale (żadna z żadną).

Najmniejsze takie n, którego istnienie gwarantuje powyższe twierdzenie, oznaczamy przez $R(k)$ i nazywamy *k-tą liczbą Ramseya.*

Można powiedzieć trochę filozoficznie, że twierdzenie Ramseya mówi o nieuchronności pojawiania się pewnych regularności w dużych strukturach. Dla każdego małego obiektu matematycznego możemy zawsze znaleźć odpowiednio dużą strukturę, w której obiekt ten musi się pojawić, i – co więcej – nawet próba zniszczenia go przez rozbicie tej struktury na mniejsze musi skończyć się niepowodzeniem.

Liczby Ramseya i kosmici

Pojawia się nam następny naturalny problem: czy istnieje jakiś jawny wzór na kolejne liczby Ramseya, a jeśli nie, to czy można je chociaż efektywnie wyznaczać. Wiadomo, że $R(2) = 2$ (dwie osoby znają się, bądź nie znają), a na początku tego rozdziału pokazaliśmy, że $R(3) = 6$, ale już wykazanie, że $R(4) = 18$ nie jest sprawą łatwą. Po pierwsze musimy pokazać, że istnieje dwukolorowanie krawędzi grafu K_{17}, w którym unikniemy jednokolorowej kliki K_4. Okazuje się, że kolorowanie takie jest wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do permutacji wierzchołków), a otrzymujemy je w ten sposób, że wierzchołkom grafu przypisujemy liczby $\{0, 1, \ldots, 16\}$ z ciała $\mathbb{Z}_{17}$, krawędź zaś malujemy na czerwono, wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczb na jej końcach jest kwadratem w tym ciele. Wykazanie, że w grafie K_{18} takie kolorowanie jest niemożliwe jest sprawą znacznie trudniejszą.

A ile wynosi $R(5)$? Otóż, zaskakujące jest, że dokładna wartość piątej liczby Ramseya nie jest dotąd znana. Wiadomo tylko, że $43 \leqslant R(5) \leqslant 49$, co na pierwszy rzut oka wydaje się nieprawdopodobne. Któż z nas teraz nie zakrzyknie: od czego mamy nowoczesne komputery?! Czy przebadanie kolorowań grafu pełnego na zaledwie 43 wierzchołkach może w dzisiejszych czasach stanowić jakąkolwiek trudność? Gdy, jednak, przyjrzymy się problemowi bliżej i dokonamy kilku obliczeń sprawa staje się jasna. Zauważmy, że graf K_{43} ma $\binom{43}{2} = 903$ krawędzie, więc chcąc przeanalizować ich wszystkie możliwe dwukolorowania, musielibyśmy rozpatrzyć 2^{903} (czyli około 10^{271}) przypadków, a to już znacznie przekracza możliwości, nawet najszybszych, superkomputerów. Z kolejnymi liczbami Ramseya sprawa wygląda jeszcze gorzej: $102 \leqslant R(6) \leqslant 165$, $205 \leqslant R(7) \leqslant 540$, $282 \leqslant R(8) \leqslant 1870$. Naiwnością byłoby również sądzić, że mogą one się wyrażać jakimkolwiek jawnym wzorem.

Aby oddać skalę trudności problemu znajdowania liczb Ramseya warto przypomnieć opowiastkę, którą często zwykł przytaczać Paul Erdős, a trudno chyba o większy autorytet w tej dziedzinie (opublikował on przeszło 100 prac dotyczących teorii Ramseya).

> Wyobraźmy sobie, że wrogo nastawiona i znacznie potężniejsza militarnie obca cywilizacja, napada na Ziemię i żąda od ludzi wyznaczenia dokładnej wartości liczby $R(5)$, gdyż w przeciwnym razie zniszczy planetę. Co powinniśmy zrobić, aby nie dopuścić do zagłady? Powinniśmy zmobilizować wszystkich matematyków, informatyków i programistów, zaprogramować wszystkie komputery na świecie i spróbować znaleźć żądaną wartość. A co, jeśli kosmici zażądają wyznaczenia liczby $R(6)$? Wówczas powinniśmy spróbować... zniszczyć najeźdźców.

Musimy pogodzić się z tym, że, prawdopodobnie, nigdy nie poznamy, ile wynosi szósta, siódma i następne liczby Ramseya, co wcale nie znaczy, że ludzie zaprzestaną swych wysiłków, w próbach ich wyznaczenia.

Grafy Ramseya w przestrzeni

W dotychczasowych rozważaniach grafy traktowaliśmy w sposób abstrakcyjny, czyli jako parę złożoną z pewnego skończonego zbioru V (wierzchołki) i z kolekcji jego dwuelementowych podzbiorów E (krawędzie), natomiast tradycyjny rysunek grafu na płaszczyźnie (punkty połączone liniami) służył nam jedynie do lepszej wizualizacji prezentowanych problemów, ale w żaden sposób nie wykorzystywaliśmy jego geometrycznych własności.

Ostatnim krokiem do poznania największej liczby na świecie będzie spojrzenie na twierdzenie Ramseya w sposób geometryczny. Będziemy rozważać grafy pełne, których wierzchołki będą umieszczone we wszystkich wierzchołkach wielowymiarowej kostki jednostkowej w przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru (na prostej będą to końce odcinka, na płaszczyźnie wierzchołki kwadratu, w przestrzeni trójwymiarowej wierzchołki sześcianu itd.). Ogólnie w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wierzchołków tych będzie 2^n (a więc powstanie nam graf K_{2^n}) i będą nimi wszystkie punkty, których współrzędne tworzą ciąg zerojedynkowy.

Wiemy z poprzedniego rozdziału, że $R(4) = 18$, a więc, jeśli krawędzie grafu pełnego, który ma co najmniej 18 wierzchołków, pomalujemy dwoma kolorami, to musi się pojawić jednokolorowa klika K_4. Jeżeli rozważać będziemy tylko kolorowania grafów pełnych związanych z kostkami jednostkowymi, to zauważymy, że w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ graf taki ma tylko 16 wierzchołków, a więc możemy jego krawędzie tak pokolorować, by uniknąć jednokolorowej kliki K_4, natomiast już w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ w grafie na 32 wierzchołkach klika taka pojawi się w każdym dwukolorowaniu.

Zażądajmy dodatkowej własności: aby klika K_4 była nie tylko jednokolorowa, ale na dodatek, aby wszystkie jej wierzchołki leżały w jednej płaszczyźnie (nazywamy ją płaską). Możemy teraz postawić pytanie: jakiego wymiaru musi być kostka jednostkowa, aby w dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego z nią powiązanego zawsze pojawiła się **płaska i monochromatyczna** kopia kliki K_4? Zauważmy, że klasyczne twierdzenie Ramseya nie mówi nam nic o jakichkolwiek geometrycznych własnościach, a więc nie mamy żadnej pewności, że powyższe pytanie ma w ogóle odpowiedź wyrażającą się skończoną liczbą.

W 1971 roku Ron Graham i Bruce Rothschild opublikowali pracę, w której udowodnili twierdzenie, bardzo głęboko uogólniające wiele dotychczasowych rezultatów typu ramseyowskiego. Twierdzenie Ramseya, którego szczególna wersja pojawiła się w poprzednim rozdziale, było tylko drobnym wnioskiem płynącym z ich ogólnych rozważań. Twierdzenie Grahama-Rothschilda dawało również pozytywną odpowiedź na postawione wcześniej pytanie, mianowicie istnieje taka liczba naturalna n, że w dowolnym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego powiązanego z n-wymiarową kostką jednostkową zawsze pojawi się płaska i jednokolorowa klika K_4. Oznaczmy najmniejsze n o tej własności przez $RG(1,2,2)$. Nadmiar parametrów w RG ma na celu pokazanie, że jest to w istocie szczególny (najmniejszy nietrywialny) przypadek ogólnego twierdzenia. Oznaczają one kolejno: 1 – kolorujemy obiekty jednowymiarowe (krawędzie), 2 – obiekt, który musi się pojawić, jest dwuwymiarowy (płaska klika K_4), 2 – używamy dwóch kolorów.

Nasuwa się naturalne pytanie, czy znana jest dokładna wartość $RG(1,2,2)$, a jeśli nie, to czy można ją jakoś sensownie oszacować. Ron Graham pokusił się o wyliczenie konkretnej wartości jej górnego oszacowania, które wynikało bezpośrednio z dowodu ich głównego twierdzenia i zamieścił ten wynik w opublikowanej wspólnie z Rothschildem pracy. Jednak szerzej znany stał się dopiero w 1977 roku, kiedy to Martin Gardner na łamach swojej popularnej rubryki w *Scientific American* opisał całą historię. Wiadomo więc, że

$$RG(1,2,2) \leqslant LG,$$

gdzie LG nazywana jest liczbą Grahama, lecz zanim poznamy jej wartość, konieczne będzie zapoznanie się ze specjalną notacją.

Notacja strzałkowa Knutha

Gdy, na początku swojej edukacji, poznajemy nowe działanie arytmetyczne staramy się je zdefiniować za pomocą działań poznanych wcześniej. Mnożenie dwóch liczb naturalnych $m \cdot n$ definiuje się jako n-krotne dodawanie składnika m, z kolei potęgowanie m^n, jako n-krotne mnożenie czynnika m. Donald Knuth wpadł na pomysł, aby procedurę tę uogólnić definiując kolejne działania jako wielokrotne złożenia poprzednich. Punktem wyjścia niech będzie zwykłe potęgowanie:

$$m \uparrow n = m^n = \underbrace{m \cdots m}_{n \text{ razy}},$$

które zapisujemy za pomocą pojedynczej strzałki (tak jak tradycyjny zapis używany w informatyce). Kolejne działania notować będziemy podobnie (zwiększając tylko liczbę strzałek) i definiować rekurencyjnie:

$$m \uparrow\uparrow n = \underbrace{m \uparrow m \uparrow \cdots \uparrow m}_{n \text{ razy}} = m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}},$$

$$m \uparrow\uparrow\uparrow n = \underbrace{m \uparrow\uparrow m \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow m}_{n \text{ razy}},$$

a w ogólności

$$m \overbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow}^{k} n = \underbrace{m \overbrace{\uparrow \cdots \uparrow}^{k-1} m \overbrace{\uparrow \cdots \uparrow}^{k-1} m \cdots m \overbrace{\uparrow \cdots \uparrow}^{k-1} m}_{n \text{ razy}}.$$

Ponieważ działania strzałkowe nie są łączne, to ustalamy dodatkowo, że w przypadku braku nawiasów wykonujemy je w kolejności od prawej do lewej (analogicznie jak przy wielokrotnym potęgowaniu). Aby nieco oswoić się z taką notacją wykonajmy kilka prostych obliczeń. Łatwo zauważyć, że $2 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow 2$ jest zawsze równe 4, niezależnie od liczby strzałek, nietrudno też obliczyć, że $3 \uparrow 3 = 3^3 = 27$. Nieco dłuższe rachunki musimy wykonać, aby obliczyć

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3 \uparrow 27 = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987.$$

Jeśli liczba rzędu siedmiu bilionów nas nie przeraża, to spróbujmy policzyć

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 7\,625\,597\,484\,987$$

i tu niestety nasza moc obliczeniowa staje się niewystarczająca, gdyż w kolejnym kroku musielibyśmy napisać przeszło siedem i pół biliona trójek przedzielonych pojedynczymi strzałkami, co w tradycyjnym zapisie oznacza wieżę potęgową o wysokości 7 625 597 484 987 zbudowaną z trójek. Oczywiście trudna jest jakakolwiek próba wyobrażenia sobie wielkości tej liczby. Możemy, chyba, tylko czuć ją intuicyjnie widząc jej zapis w postaci wieży potęgowej.

Liczba Grahama

Jeśli chcesz, Czytelniku, poznać wielkość liczby Grahama musisz pójść krok dalej i spróbować ogarnąć (choć jest to prawdopodobnie niewykonalne) wielkość liczby $G_0 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$, a następnie wykonać krok drugi (który jest już chyba krokiem w otchłań nieskończoności) i poznać liczbę zdefiniowaną następująco:

$$G_1 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow}_{G_0 \text{ strzałek}} 3.$$

Warto w tym miejscu przypomnieć liczbę MOSER z poprzedniego rozdziału i porównać ją z olbrzymem napisanym powyżej. Otóż w porównaniu tym wielki MOSER staje się bardzo małym i niegroźnym moserkiem, gdyż liczba G_1 jest od niego znacznie, znacznie większa. Jeśli wykonaliśmy 2 kroki to kolejne nie powinny już sprawić trudności. Niech

$$G_2 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow}_{G_1 \text{ strzałek}} 3,$$
$$G_3 = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_2 \text{ strzałek}} 3,$$

i tak dalej, aż po 64 krokach zatrzymamy się wreszcie, bo oto poznamy największą liczbę na świecie, czyli Liczbę Grahama:

$$RG(1,2,2) \leqslant LG = G_{63} = 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_{62} \text{ strzałek}} 3.$$

Warto odnotować ciekawostkę, że liczba Grahama została zauważona również przez ludzi, którzy zawodowo zajmują się wszelkimi rekordowymi osiągnięciami, trafiła bowiem w 1997 roku do Księgi Rekordów Guinnessa i, prawdopodobnie, pozostanie ona tam jeszcze przez długie lata.

Na zakończenie rozwikłamy wreszcie zagadkę, skąd w tytule niniejszego artykułu wzięło się przewrotne pytanie dotyczące liczby jedenaście. Związane jest ono z tym, że najlepszym znanym dziś dolnym oszacowaniem liczby $RG(1,2,2)$ jest $10 < RG(1,2,2)$([1]), więc pierwszą możliwą jej dokładną wartością jest właśnie 11. Gdyby okazało się to prawdą i liczbę Grahama w pierwotnym oszacowaniu $RG(1,2,2)$ można byłoby zastąpić jedenastką, to musiałaby to być największa liczba $\Huge 11$ jaką znamy.

Literatura

[1] G. Exoo, *A Euclidean Ramsey Problems*, Discrete & Computational Geometry **8** (2003), 223-227

[2] H. J. Prömel, *Large numbers, Knuth's arrow notation, and Ramsey Theory*, Synthese **133** (2002), 87-105

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_%28numbers%29`