Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

Algebry w logice

Adam KOLANY, Sosnowiec

Dla ustalenia uwagi ograniczymy się tylko do języka zdaniowej logiki klasycznej.

Niech $\mathsf{P} = \{\mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{r}, \ldots\}$ będzie ustalonym zbiorem ZMIENNYCH ZDANIOWYCH. FORMUŁĄ ZDANIOWĄ nazywamy dowolny napis powstały ze zmiennych zdaniowych za pomocą SPÓJNIKÓW zdaniowych: $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja), $\leftrightarrow$ (równoważność) i $\neg$ (negacja), wedle następujących reguł:

1. Zmienne zdaniowe są formułami.
2. (a) Jeśli α jest formułą, to $\neg\alpha$ też;
   (b) Jeśli α i β są formułami, to $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ oraz $\alpha \leftrightarrow \beta$ są formułami
3. Każda formuła powstaje dzięki zastosowaniu skończenie wiele razy reguł 1. i 2.

Zbiór wszystkich formuł zdaniowych oznaczać będziemy **Frm**.

Spójniki zdaniowe narzucają w zbiorze formuł zdaniowych strukturę algebry. Mianowicie dla każdego ze spójników $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ możemy zdefiniować operację $f_\circ$ następującym wzorem: $f_\circ(\alpha, \beta) = \alpha \circ \beta$, oraz dla negacji, $f_\neg(\alpha) = \neg\alpha$. Algebrę tę nazywamy ALGEBRĄ JĘZYKA LOGIKI ZDAŃ i oznaczać ją będziemy $\mathfrak{F}$. Automorfizmy tej algebry nazywa się PODSTAWIENIAMI. Okazuje się, że każde podstawienie jednoznacznie wyznaczone jest przez jego wartości na zmiennych zdaniowych. Mamy bowiem:

Twierdzenie. Algebra $\mathfrak{F}$ jest algebrą wolną w klasie algebr do niej podobnych ze zbiorem P jako zbiorem generatorów. Tzn. Dla dowolnej algebry $\mathfrak{A} = \langle A, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, \Leftrightarrow, - \rangle$, w której $\sqcup, \sqcap, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są działaniami dwuargumentowymi, a $-$ jest działaniem jednoargumentowym oraz funkcji $v : \mathsf{P} \rightarrow A$, istnieje **jedyny** homomorfizm $h^v : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{A}$, dla którego $h^v \lceil \mathsf{P} = v$.

Przykład 1. Niech v dane będzie następująco (dla zmiennej różnej od p i q, v przyjmuje wartość równą tej zmiennej):

$$v : \mathsf{p} \mapsto \neg\mathsf{q},\ \mathsf{q} \mapsto \mathsf{p} \rightarrow \neg\mathsf{q},$$

Wówczas

$$\begin{aligned} h^v\big(\mathsf{p} \rightarrow (\mathsf{q} \rightarrow \mathsf{p})\big) &= \mathfrak{f}_\rightarrow\big(h^v(\mathsf{p}), h^v(\mathsf{q} \rightarrow \mathsf{p})\big) = \\ &= h^v(\mathsf{p}) \rightarrow \mathfrak{f}_\rightarrow\big(h^v(\mathsf{q}), h^v(\mathsf{p})\big) = \neg\mathsf{q} \rightarrow ((\mathsf{p} \rightarrow \neg\mathsf{q}) \rightarrow \neg\mathsf{p}) \end{aligned}$$

Przykład 2. Niech $\mathfrak{B}_2 = \langle \{0,1\}, f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow, f_\neg \rangle$, gdzie działania $f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow, f_\neg$ dane są następującymi, znanymi skądinąd, tabelami:

x	y	$f_\vee(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$f_\wedge(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$f_\rightarrow(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	y	$f_\leftrightarrow(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	$f_\neg(x,y)$
0	1
1	0

Niech dalej $v : \mathsf{P} \rightarrow \{0,1\}$ dane będzie następująco (dla zmiennych innych niż wymienione załóżmy, że v przyjmuje wartość 0):

$$v : \mathsf{p} \mapsto 1,\ \mathsf{q} \mapsto 0,\ \mathsf{s} \mapsto 1.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} &h^v\Big(\big((\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}) \wedge (\mathsf{s} \rightarrow \mathsf{q})\big) \rightarrow (\mathsf{p} \vee \mathsf{s} \rightarrow \mathsf{q})\Big) = \\ &\quad = f_\rightarrow\Big(h^v\big((\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}) \wedge (\mathsf{s} \rightarrow \mathsf{q})\big), h^v\big((\mathsf{p} \vee \mathsf{s} \rightarrow \mathsf{q})\big)\Big) = \\ &\quad = f_\rightarrow\Big(f_\wedge\big(h^v(\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}), h^v(\mathsf{s} \rightarrow \mathsf{q})\big), f_\rightarrow\big(h^v(\mathsf{p} \vee \mathsf{s}), h^v(\mathsf{q})\big)\Big) = \\ &\quad = f_\rightarrow\Big(f_\wedge\big(f_\rightarrow(h^v(\mathsf{p}), h^v(\mathsf{q})), f_\rightarrow(h^v(\mathsf{s}), h_v(\mathsf{q}))\big), f_\rightarrow\big(f_\vee(h^v(\mathsf{p}), h^v(\mathsf{s})), v(\mathsf{q})\big)\Big) = \\ &\quad = f_\rightarrow\Big(f_\wedge\big(f_\rightarrow(1,0), f_\rightarrow(1,0)\big), f_\rightarrow\big(f_\vee(1,1), 0\big)\Big) = \\ &\quad = f_\rightarrow\Big(f_\wedge\big(0,0\big), f_\rightarrow\big(1,0\big)\Big) = f_\rightarrow\Big(0,1\Big) = 1. \end{aligned}$$

Formuły, które dla dowolnego homomorfizmu algebry języka w $\mathfrak{B}_2$ przyjmują wartość 1 nazywamy TAUTOLOGIAMI KLASYCZNYMI. Zbiór tautologii klasycznych oznaczać będziemy jako **Taut**.

Zauważmy, że zbiór **Taut** ma następujące dwie własności:

1. $h(\alpha) \in \mathbf{Taut}$, dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{Taut}$ i podstawienia $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$.
2. Jeśli $\alpha \in \mathbf{Taut}$ i $\alpha \to \beta \in \mathbf{Taut}$, to $\beta \in \mathbf{Taut}$

O zbiorach formuł, które spełniają pierwszy z tych warunków powiadamy, że są domknięte na PODSTAWIENIA; o zbiorach spełniających warunek drugi, że są domknięte na REGUŁĘ ODRYWANIA. Zbiory formuł domknięte na podstawienia i regułę odrywania nazywa się LOGIKAMI ZDANIOWYMI. Oczywiście **Taut**, jest logiką zdaniową. Logikami zdaniowymi są także zbiór pusty, $\emptyset$, oraz zbiór wszystkich formuł, **Frm**. Logiki zdaniowe różne od tej ostatniej nazywać będziemy logikami NIESPRZECZNYMI. Rodzinę wszystkich logik zdaniowych oznaczać będziemy symbolem $\mathfrak{L}$.

Niech $\mathcal{L} \in \mathfrak{L}$, $X \subseteq \mathbf{Frm}$ i niech $\alpha \in \mathbf{Frm}$. Powiemy, że α ma w $\mathcal{L}$ dowód ze zbiorem założeń X, jeśli istnieje taki ciąg formuł $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ (zwany właśnie dowodem formuły α), że $\alpha = \alpha_n$ oraz, że dla $1 \leq j \leq n$ zachodzi jeden z przypadków: (a) $\alpha_j \in X \cup \mathcal{L}$ lub (b) istnieją $1 \leq k, l < j$, że $\alpha_k = \alpha_l \to \alpha_j$. Zbiór formuł, które mają dowód w $\mathcal{L}$ ze zbiorem założeń X oznaczać będziemy symbolem $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X)$. Nietrudno pokazać, że $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X)$ jest najmniejszym ze zbiorów formuł, który zawiera X, $\mathcal{L}$ oraz, który jest domknięty na regułę odrywania. Łatwo dowodzi się też, że operator $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}$ ma następujące własności:

1. $X \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X)$,
2. $X \subseteq Y \implies \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X) \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(Y)$,
3. $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}\big(\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X)\big) \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}} X$,

dla dowolnych $X, Y \subseteq \mathbf{Frm}$.

Punkty stałe operatora $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}$ nazywa się TEORIAMI logiki $\mathcal{L}$. Bezpośrednio z własności 1. i 3., widzimy, że zbiory postaci $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X)$ są teoriami logiki $\mathcal{L}$. Oczywiście teorie zawsze są tej postaci (no bo wtedy $X = \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X)$). Rodzinę teorii logiki $\mathcal{L}$ oznaczać będziemy $\ell_{\mathcal{L}}$.

Zauważmy, że dla dowolnych dwu teorii logiki $\mathcal{L}$ ich część wspólna jest także teorią. W rzeczy samej, niech $X, Y \in \ell_{\mathcal{L}}$. Oczywiście $X \cap Y \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X \cap Y)$. Ponieważ $X \cap Y \subseteq X$ i $X \cap Y \subseteq Y$, na podstawie 2. dostajemy

$$\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X \cap Y) \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X) = X \text{ oraz } \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X \cap Y) \subseteq \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(Y) = Y.$$

Czyli $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X \cap Y) \subseteq X \cap Y$, co dowodzi ostatecznie, że $X \cap Y$ jest teorią logiki $\mathcal{L}$.

Część wspólna dwu zbiorów jest największym spośród zbiorów, który zawarty jest każdym z nich. Suma dwu zbiorów jest, z kolei, najmniejszym zbiorem, w którym one oba są zawarte. Pokazaliśmy przed chwilą, że największą z teorii zawierającą dwie dane teorie X i Y jest właśnie ich przekrój. Niestety nie jest w całej ogólności prawdą, że najmniejszą teorią zawierającą X i Y jest ich suma – nie musi ona być teorią. Najmniejszą teorią zawierającą X i Y jest $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(X \cup Y)$. Oznaczać ją będziemy symbolem $X \sqcup Y$. Aby zachować symetrię oznaczeń, zamiast pisać $X \cap Y$, pisać w dalszym ciągu będziemy $X \sqcap Y$.

Poza oczywistą przemiennością i łącznością działań $\sqcap$ i $\sqcup$, w algebrze $\langle \ell_{\mathcal{L}}, \sqcap, \sqcup \rangle$ spełnione są następujące aksjomaty, zwane prawami POCHŁANIANIA:

$$X \sqcap (Y \sqcup X) = X, \qquad X \sqcup (Y \sqcap X) = X, \qquad X, Y \in \ell_{\mathcal{L}}.$$

Algebry z dwoma działaniami, które są łączne, przemienne, i które spełniają prawa pochłaniania, nazywa się KRATAMI. Dowodzi się, że w dowolnej kracie $\mathcal{K}$ relacja $\preceq$ zdefiniowana wzorem:

$$a \preceq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \sqcap b = a, \qquad a, b \in \mathcal{K}$$

jest częściowym porządkiem i nazywa się go PORZĄDKIEM KRATY $\mathcal{K}$. W dodatku $a \sqcap b$ i $a \sqcup b$ są odpowiednio kresem dolnym i górnym zbioru $\{a, b\}$, $a, b \in \mathcal{K}$. Z drugiej strony, mając częściowy porządek na jakimś zbiorze K, w którym każdy skończony i niepusty podzbiór ma kres dolny i górny, operacje

$$a \sqcap b = \inf\{a, b\} \quad \text{i} \quad a \sqcup b = \sup\{a, b\} \qquad a, b \in K$$

czynią z K kratę. Porządkiem tej kraty jest dokładnie ten sam porządek, dzięki któremu zdefiowane są $\sqcap$ i $\sqcup$. W przypadku $\ell_{\mathcal{L}}$ tym częściowym porządkiem jest zawieranie się zbiorów.

Kraty teorii logik zawierających formuły $\Phi_1 =$ '$(\mathsf{p} \to (\mathsf{q} \to \mathsf{s})) \to ((\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to$ $\to (\mathsf{p} \to \mathsf{s}))$' i $\Phi_2 =$ '$\mathsf{p} \to (\mathsf{q} \to \mathsf{p})$' (oznaczmy te logiki symbolem $\mathfrak{L}_{\{\Phi_1,\Phi_2\}}$) mają jeszcze jedną właściwość, która czyni z nich tzw. kraty IMPLIKACYJNE. Mianowicie, jeśli $\mathcal{L} \in \mathfrak{L}_{\Phi_1,\Phi_2}$, to dla dowolnych dwu $X, Y \in \ell_{\mathcal{L}}$ istnieje największa spośród $Z \in \ell_{\mathcal{L}}$, dla której $Z \sqcap X \subseteq Y$. Jest nią teoria $\{\alpha \in \mathbf{Frm} : X \cap \mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\alpha\}) \subseteq Y\}$. Nazywa się ją RELATYWNYM PSEUDOUZUPEŁNIENIEM X względem Y i oznacza symbolem $X \Rightarrow Y$.

Kraty implikacyjne spełniają następujące warunki ROZDZIELNOŚCI:

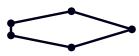
$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c), \qquad a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c).$$

Nietrudno pokazać, że skończone kraty rozdzielne są kratami implikacyjnymi. Mianowicie w kracie skończonej K dla dowolnych $a, b \in K$ zawsze istnieje

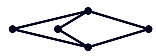
$$\sup\{c \in K :\ c \sqcap a \leq b\ \}$$

Jeśli krata jest rozdzielna, to element ten jest właśnie relatywnym pseudouzupełnieniem a względem b. Kraty rozdzielne są dość łatwo rozpoznawalne. Wystarczy, aby nie zawierały podkrat izomorficznych z następującymi:

Pentagon



Chińska latarnia



Zwróćmy uwagę, że w kratach implikacyjnych element $X \Rightarrow X$ jest zawsze elementem największym. W kracie $\ell_{\mathcal{L}}$ istnieje również element najmniejszy. Jest nim oczywiście $\mathcal{L}$. Kraty implikacyjne z elementem najmniejszym nazywane są ALGEBRAMI HEYTINGA. Ponieważ kraty skończone mają zawsze element najmniejszy, wnioskujemy stąd, że skończone kraty rozdzielne są algebrami Heytinga. Element największy $\top = \sup\ \mathcal{H}$ algebry Heytinga $\mathcal{H}$ nazywamy jej SZCZYTEM, a element najmniejszy $\bot = \inf\ \mathcal{H}$ tej algebry jej SPODEM. Wprowadzając teraz w $\mathcal{H}$ jednoargumentowe działanie '$\sim$' wzorem $\sim a = a \Rightarrow \bot$, dostajemy algebrę podobną do algebry języka logiki zdań. Możemy zatem rozważać homomorfizmy z $\mathfrak{F}$ w tę algebrę. Formuły α, dla których wartość $h(\alpha)$ wynosi $\top$, dla dowolnego homomorfizmu $h : \mathfrak{F} \to \mathcal{H}$ nazwiemy formułami PRAWDZIWYMI w $\mathcal{H}$. Zbiór formuł prawdziwych w $\mathcal{H}$ oznaczać będziemy symbolem $\mathsf{E}(\mathcal{H})$ i nazywać ZAWARTOŚCIĄ algebry $\mathcal{H}$. Zawartości algebr Heytinga zawsze są logikami.

Okazuje się, że w każdej algebrze Heytinga, prawdziwe są następujące formuły:

$\Phi_1\ (p \to (q \to s)) \to ((p \to q) \to (p \to s))$,		$\Phi_2\ p \to (q \to p)$,
$\Phi_3\ p \to p \vee q$,	$\Phi_4\ q \to p \vee q$,	$\Phi_5\ (p \to q) \to ((s \to q) \to (p \vee s \to q))$,
$\Phi_6\ p \wedge q \to p$,	$\Phi_7\ p \wedge q \to q$,	$\Phi_8\ (p \to q) \to ((p \to s) \to (p \to q \wedge s))$,
$\Phi_9\ (p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$,	$\Phi_{10}\ (p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$,	$\Phi_{11}\ (p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$,
$\Phi_{12}\ p \to (\neg p \to q)$,	$\Phi_{13}\ (p \to \neg p) \to \neg p$,	

Logiki zawierające wyżej wymienione formuły nazywa się logikami NADINTUICJONISTYCZNYMI. Ich rodzinę oznaczymy symbolem $\ell^{\star}_{\mathbf{INT}}$. Najmniejszą z logik nadintuicjonistycznych, $\bigcap \ell^{\star}_{\mathbf{INT}}$, nazywa się INTUICJONISTYCZNĄ LOGIKĄ ZDANIOWĄ i oznacza się ją symbolem **INT**. Najmniejszą (i jak się okazuje jedyną, oprócz logiki sprzecznej) logikę nadintuicjonistyczną, do której należy PRAWO PODWÓJNEGO PRZECZENIA $\Phi_{14} =$ '$\neg\neg p \to p$', nazywa się KLASYCZNĄ LOGIKĄ ZDAŃ. Oznaczać ją będziemy symbolem **LK**.

Niech $\mathcal{L}$ będzie dowolną logiką nadintuicjoinistyczną. Zdefiniujmy w zbiorze formuł relację $\approx_{\mathcal{L}}$ wzorem:

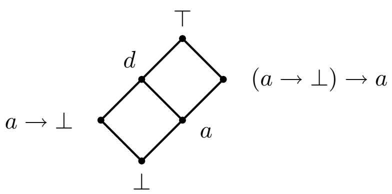
$$\alpha \approx_{\mathcal{L}} \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \leftrightarrow \beta \in \mathcal{L}.$$

Okazuje się, że relacja ta jest kongruencją algebry $\mathfrak{F}$. Ponadto algebra ilorazowa $\mathfrak{F}/_{\approx_{\mathcal{L}}}$ zwana ALGEBRĄ TARSKIEGO–LINDENBAUMA DLA $\mathcal{L}$ jest algebrą Heytinga, której szczytem jest $\mathcal{L}$. Jeśli teraz, np. $\alpha \notin \mathcal{L}$, to odwzorowanie ilorazowe

$h : \varphi \mapsto \varphi/{\approx_{\mathcal{L}}}$, $\varphi \in \mathbf{Frm}$ jest homomorfizmem, dla którego $h(\alpha) \neq \mathcal{L}$. Czyli α w $\mathfrak{F}/{\approx_{\mathcal{L}}}$ jest nieprawdziwa. W szczególności, gdy $\mathcal{L} = \mathbf{INT}$, dostajemy następujące:

Twierdzenie (o pełności dla INT) Formuła jest w **INT** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona prawdziwa w każdej algebrze Heytinga.

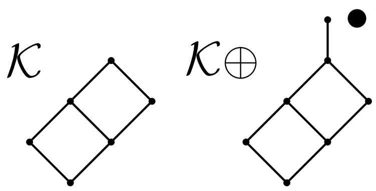
W przypadku, gdy $\mathcal{L} = \mathbf{LK}$, algebra Lindenbauma $\mathfrak{F}/{\approx_{\mathcal{L}}}$ jest tzw. ALGEBRĄ BOOLE'A – czyli ograniczoną kratą rozdzielną z unarnym działaniem '$\sim$' spełniającą postulaty: $a \sqcup {\sim} a = \top$ i $a \sqcap {\sim} a = \bot$, dla dowolnego jej elementu a. Wspomniana wcześniej algebra $\mathfrak{B}_2$ jest algebrą Boole'a, a **Taut** jest niczym innym jak jej zawartością. Okazuje się, że o ile zawartości algebr Heytinga mogą się od siebie różnić, to zawartością każdej algebry Boole'a jest zawsze **Taut**. Stąd też, w szczególności, wynika równość **Taut** = **LK** (tzw. twierdzenie o pełności dla **LK**). Innymi słowy dla rozstrzygnięcia, czy formuła α jest w **LK**, potrzeba i wystarczy sprawdzić, czy jest ona prawdziwa w $\mathcal{B}_2$. Mamy zatem logikę $\mathcal{L}$ oraz algebrę, której zawartość równa jest dokładnie logice $\mathcal{L}$. Mówimy wówczas, że algebra ta jest ADEKWATNA dla danej logiki. Co prawda, w myśl tego, co napisano wcześniej, dla dowolnej logiki nadintuicjonistycznej $\mathcal{L}$, algebra $\mathfrak{F}/{\approx_{\mathcal{L}}}$ jest adekwatna dla $\mathcal{L}$. Ale przyznać należy, że $\mathfrak{B}_2$ jest łatwiejsza do ogarnięcia niż $\mathfrak{F}/{\approx_{\mathbf{Taut}}}$. W przypadku logiki **INT** nie ma skończonej algebry adekwatnej. Ale pokazać można, że dla rozstrzygnięcia przynależności formuły α do **INT** wystarczy ograniczyć się do algebr skończonych o nie więcej niż 2^{2^m} elementach, gdzie m jest liczbą podformuł formuły α. Np w przypadku tzw. TEZY PIERCE'A: '$\big((\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to \mathsf{p}\big) \to \mathsf{p}$' wystarczy przejrzeć wszystkie $2^{2^5} = 2^{32} = 4 \cdot (2^{10})^3 > 4 \cdot 10^9$ elementowe algebry Heytinga. Nie znaczy to bynajmniej, że nie ma algebry mniejszego rozmiaru, która obala daną formułę. Np. dla wspomnianej tezy Pierce'a, w poniższej algebrze homomorfizm spełniający warunki $h(\mathsf{p}) = a$ oraz $h(\xi) = \bot$, dla zmiennej ξ różnej od p, przyjmuje wartość $h\Big(\big((\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to \mathsf{p}\big) \to \mathsf{p}\Big) = d \neq \top$ (rys. 1).



Rys. 1

Okazuje się, że nie trzeba przeglądać wszystkich algebr danego rozmiaru – wystarczy jedna spośród tzw. algebr JAŚKOWSKIEGO. Byle odpowiednio duża.

Mając dowolną kratę $\mathcal{K}$, możemy wzbogacić ją o jeden element spoza niej postulując, że jest on większy od wszystkich pozostałych. Operację tę nazywamy DOSTAWIANIEM MASZTU DO KRATY (rys. 2).



Rys. 2

Jeśli $\mathcal{K}$ była kratą rozdzielną, to wynikowa krata $\mathcal{K}\oplus$ będzie także kratą rozdzielną. Widzimy więc, że dostawianie masztu nie wyprowadza poza klasę skończonych algebr Heytinga. Klasa algebr JAŚKOWSKIEGO, to najmniejsza klasa algebr Heytinga zawierająca algebry zdegenerowane, która zamknięta jest na skończone produkty i dostawianie masztu. Dowodzi się, że każda skończona algebra Heytinga zawarta jest w pewnej algebrze Jaśkowskiego.

Wśród algebr Jaśkowskiego wyróżnia się następującą ich rodzinę: Niech $\mathcal{J}_1$ będzie kratą zdegenerowaną $\mathfrak{B}_1 = \{\top\}$ i niech $\mathcal{J}_{n+1} = (\mathcal{J}_n)^n\oplus$, dla $n = 1, 2, 3 \ldots$, gdzie '$\mathcal{A}^n$' jest produktem n egzemplarzy algebry $\mathcal{A}$. Wówczas każda algebra Jaśkowskiego włożona jest w którąś z algebr $(\mathcal{J}_n)^m$, $m, n \geq 1$, co implikuje, że każda formuła spoza **INT** falsyfikowana jest w pewnej algebrze tej postaci.

Wykazał to Wojciech Dzik z Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach około 1980 roku.

Wróćmy na chwilę do kraty $\ell_{\mathbf{Taut}}$. Skoro jest ona algebrą Heytinga, to warto zapytać o jej zawartość. Okazuje się, że jest to dokładnie **INT**. Ponieważ formuły Φ_1 i Φ_2 są w **INT**, to krata $\ell_{\mathbf{INT}}$ także jest algebrą Heytinga. Jej zawartość jednak nie jest równa **INT**. Jej zawartością jest najmniejsza logika zawierającą formułę zwaną SŁABYM PRAWEM WYŁĄCZONEGO ŚRODKA, **WEM** = '$\neg\mathsf{p} \vee \neg\neg\mathsf{p}$'.

Jak wykazał wspomniany już W. Dzik, dla każdej niesprzecznej logiki nadintuicjonistycznej $\mathcal{L}$, zachodzi

$$\mathbf{INT} \subseteq \mathbf{E}(\ell_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathbf{WEM}\,.$$

Okazuje się, ze $\ell^{\star}_{\mathbf{INT}}$ także jest algebrą Heytinga, ale jaka jest jej zawartość, nie wiadomo.