Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

Między grupą a kategorią

Wiktor BARTOL, Warszawa

Między grupą a kategorią znajduje się algebra – przedmiot badań algebry uniwersalnej, zwanej niekiedy algebrą ogólną. Ta dziedzina matematyki, zrodzona w latach 30. XX wieku, zajmuje się badaniem bardzo ogólnych struktur algebraicznych – algebr – w postaci zbioru (zwanego nośnikiem) z rodziną skończenie argumentowych operacji (działań) na tym zbiorze. Na mapie matematyki algebra uniwersalna ma licznych sąsiadów: teoria krat, teoria półgrup, teorie grup, pierścieni i ciał (czyli algebra abstrakcyjna), teoria mnogości, logika, teoria modeli, nieco dalej, choć niezbyt daleko, znajduje się topologia.

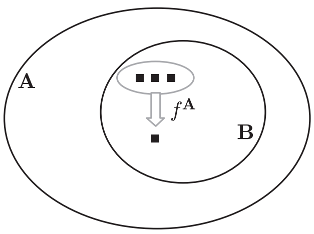
Operacja n-argumentowa to po prostu funkcja z A^n w A. Operację 0-argumentową można utożsamić ze stałą.

Cała algebra uniwersalna jest rozpięta na czterech fundamentalnych pojęciach: homomorfizmu, podalgebry, kongruencji oraz produktu prostego.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^n \arrow[r, "h^n"] \arrow[d, "f^{\mathbf{A}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{B}^n \arrow[d, "f^{\mathbf{B}}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "h"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

Rys. 1. Homomorfizm to przemienność diagramu

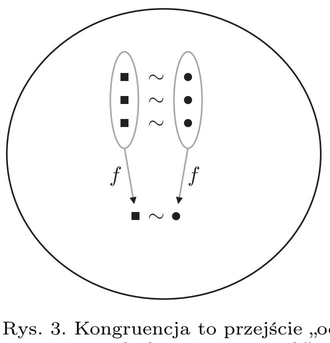
Zanim je krótko przedstawimy, umówmy się, że kiedykolwiek mamy do czynienia z więcej niż jedną algebrą, wszystkie one stanowią realizację tego samego języka funkcyjnego. Powiemy wtedy, że te algebry są podobne. Mówiąc nieco precyzyjniej, algebry $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są podobne, gdy istnieje zbiór F symboli funkcyjnych, taki że operacje zarówno algebry $\mathbf{A}$, jak i $\mathbf{B}$ są interpretacjami tych symboli, przy czym zakładamy, że z każdym symbolem jest związana (nieujemna) liczba argumentów. Możemy zatem te algebry zapisać w postaci $\mathbf{A} = (A, (f^{\mathbf{A}})_{f\in F})$ i $\mathbf{B} = (B, (f^{\mathbf{B}})_{f\in F})$. Zauważmy, że w ten sposób otrzymujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między operacjami obu algebr: odpowiadającymi sobie operacjami są te, które są interpetacjami tego samego symbolu (mają więc tyle samo argumentów).



Rys. 2. Podalgebra to zamkniętość na operacje

Homorfizmem algebry $\mathbf{A} = (A, (f^{\mathbf{A}})_{f\in F})$ w algebrę podobną $\mathbf{B} = (B, (f^{\mathbf{B}})_{f\in F})$ jest każda funkcja $h : A \to B$ zgodna z operacjami, co oznacza, że zawsze $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{\eta(f)})) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_{\eta(f)}))$. Inaczej mówiąc, możemy najpierw wykonać w $\mathbf{A}$ operację $f^{\mathbf{A}}$ i wynik przenieść funkcją h do $\mathbf{B}$, możemy też najpierw przenieść do $\mathbf{B}$ argumenty i dopiero tam wykonać operację $f^{\mathbf{B}}$ – w obu przypadkach otrzymamy to samo. Na przykład, funkcja $\ln : R^+ \to R$ jest homomorfizmem algebry liczb rzeczywistych dodatnich z mnożeniem $(R^+, \cdot)$ w algebrę liczb rzeczywistych z dodawaniem $(R, +)$, ponieważ $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b.

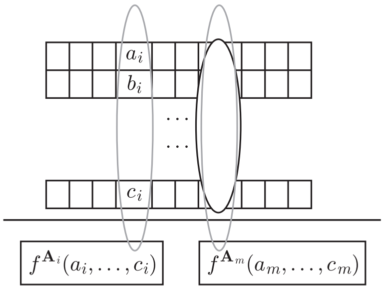
Podalgebrą algebry $\mathbf{A} = (A, (f^{\mathbf{A}})_{f\in F})$ jest każdy podzbiór zbioru A zamknięty na operacje algebry $\mathbf{A}$ wraz z odpowiednio zredukowanymi operacjami dziedziczonymi z całej algebry $\mathbf{A}$.



Rys. 3. Kongruencja to przejście „od równoważnych do równoważnych”

Z kolei kongruencja w algebrze $\mathbf{A} = (A, (f^{\mathbf{A}})_{f\in F})$ to relacja równoważności na zbiorze A zgodna z operacjami algebry $\mathbf{A}$, czyli taka, że jeśli $f^{\mathbf{A}}$ jest operacją n-argumentową oraz pary $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ są w relacji, to w relacji jest także para $(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n))$.

Wreszcie produkt prosty rodziny algebr podobnych $\mathbf{A}_i = (A_i, (f^{\mathbf{A}_i})_{f\in F})$ $(i \in I)$ to struktura zbudowana na iloczynie kartezjańskim $\prod_{i\in I} A_i$, w której operacje wykonywane są po współrzędnych.

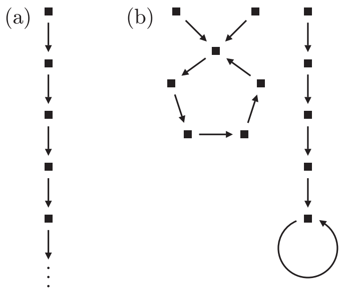


Rys. 4. Produkt to działanie po współrzędnych

Zamiast opowiadać dalej o całej dziedzinie, skorzystajmy z metody literackiej: spróbujmy uchwycić smak całości, skupiając się na przykładzie jednostkowym – a tym przykładem niech będzie obiekt znany każdemu algebraikowi niezależnie od przynależności gatunkowej: algebra wolna.

Cóż to jest algebra wolna? Przede wszystkim musimy określić klasę algebr, w której algebra ma być wolna. Inaczej mówiąc, pojęcie wolności jest związane z określoną klasą (nie, to nie wykład socjologii politycznej). Otóż algebra jest wolna w danej klasie, mówiąc obrazowo, jeśli jest w tej klasie najswobodniej zbudowana, co oznacza, że nie wiążą jej żadne równości, które nie byłyby prawdziwe dla każdej algebry z tej klasy. Dla przykładu, algebra wolna w klasie wszystkich grup, czyli grupa wolna, nie może być grupą abelową (jeśli nie jest cykliczna), ponieważ nie w każdej grupie operacja binarna jest przemienna. Nie może też być skończoną (np. n-elementową) grupą cykliczną, bo przecież nie w każdej grupie prawdziwa jest równość $x^n = e$, gdzie e jest elementem neutralnym grupy. Bardziej precyzyjna definicja algebry wolnej znajduje się na obok marginesie. Na przykład na rysunku 5 z dwóch algebr z jedną operacją jednoargumentową tylko algebra (a) jest wolna (nad jednoelementowym zbiorem generatorów) w klasie wszystkich algebr z jedną operacją jednoargumentową.

Algebra $\mathbf{A}$ jest wolna w klasie K algebr podobnych nad zbiorem generatorów X, jeśli
(a) $\mathbf{A} \in K$,
(b) każdą funkcję z X w algebrę $\mathbf{B}$ z klasy K można rozszerzyć do homomorfizmu z całej algebry $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$.



Rys. 5. (a) Algebra wolna (b) Algebry nie są wolne.

Dlaczego należy zajmować się algebrami wolnymi? Dlatego, że ze swojej natury są one doskonałymi reprezentantkami swojej klasy – właśnie dlatego, że nie mają własnych cech (opisywalnych równościami), a jedynie takie, które charakteryzują całą klasę. Dokładniej wyraża to twierdzenie następujące (tu p i q oznaczają pewne termy w języku algebr z klasy K):

Twierdzenie 1. Niech $\mathbf{A}$ będzie algebrą wolną w klasie K nad przeliczalnym zbiorem generatorów X. Wówczas równość $p = q$ jest prawdziwa w każdej algebrze z klasy K wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w algebrze $\mathbf{A}$.

Teraz powinien nastąpić dowód twierdzenia, ale … nie nastąpi. Udowodnimy za to twierdzenie mocniejsze i zapewne bardziej zaskakujące. Oto ono:

Twierdzenie 2. Niech $\mathbf{A}$ będzie algebrą wolną w klasie K nad co najmniej n-elementowym zbiorem generatorów X. Wówczas równość $p = q$, gdzie p i q są termami n zmiennych, jest prawdziwa w każdej algebrze z klasy K wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona przez pewne parami różne generatory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ze zbioru X.

Wystarczy zatem znaleźć n różnych generatorów algebry wolnej, które podstawione do równości dadzą to samo po obu stronach, by móc wnioskować, że równość jest prawdziwa w całej klasie K! Ta własność jest fundamentem wielu zastosowań algebr wolnych.

Zarys dowodu. Jeśli równość jest prawdziwa w całej klasie K, to w szczególności jest prawdziwa w $\mathbf{A}$, a więc także spełniona przez dowolne jej generatory. Z drugiej strony, weźmy dowolną algebrę $\mathbf{B} \in K$ oraz dowolne elementy $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{B}$ i wybierzmy funkcję $h : X \to B$ tak, aby $h(x_1) = a_1, h(x_2) = a_2, \ldots, h(x_n) = a_n$. Istnieje rozszerzenie funkcji h do homomorfizmu $\overline{h} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, zatem $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p(\overline{h}(x_1), \overline{h}(x_2), \ldots, \overline{h}(x_n)) = \overline{h}(p(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \overline{h}(q(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \ldots = q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. c.b.d.o.

W jakich klasach istnieją algebry wolne? W bardzo różnych, ale wszystko można sprowadzić do klas szczególnie sympatycznych, choćby dlatego, że właśnie mają algebry wolne. Te klasy to rozmaitości (w angielskiej wersji „variety”, nie „manifold”), czyli klasy zamknięte na podalgebry, obrazy homomorficzne i produkty proste. Znane twierdzenie Birkhoffa mówi, że równoważnie można je zdefiniować jako klasy algebr, definiowalne za pomocą zbioru równości, a więc klasy wszystkich modeli pewnego zbioru równości. Takimi są, na przykład, klasy wszystkich grup (traktowanych jako algebry z jedną operacją binarną, jedną unarną i jedną 0-argumentową) , wszystkich grup abelowych, wszystkich pierścieni, wszystkich półgrup, wszystkich krat rozdzielnych i mnóstwo innych. Otóż:

Twierdzenie 3. Jeśli klasa K jest rozmaitością, to dla każdego zbioru X istnieje algebra wolna w K nad zbiorem X.

Tym razem dowodu nie będzie z nieco innych powodów niż poprzednio: czytelnikowi (i papierowi) mogłoby nie starczyć cierpliwości. Odnotujmy zatem tylko, że taką algebrę wolną można otrzymać z algebry termów nad X, dzieląc ją przez odpowiednią kongruencję, reprezentującą zbiór wszystkich równości prawdziwych w całej klasie K.

Z poprzedniego twierdzenia można wydedukować jeszcze jeden pożytek z algebr wolnych, a mianowicie:

Twierdzenie 4. Każda algebra w rozmaitości K jest obrazem homomorficznym pewnej algebry wolnej.

Zarys dowodu. Jeśli $\mathbf{A} \in K$, to wystarczy wziąć algebrę wolną nad jej nośnikiem A, „nałożyć" dowolną funkcją to nowe wcielenie A na stare, a potem już tylko rozszerzyć taką funkcję do homomorfizmu. I już. c.b.d.o.

Czy każda algebra ma szansę być gdzieś wolna? Odpowiedź na to pytanie przynosi kolejny fakt o algebrach wolnych:

Twierdzenie 5. Algebrą $\mathbf{A}$ jest wolna w pewnej klasie K nad X wtedy i tylko wtedy, gdy jest wolna w klasie $\{\mathbf{A}\}$ nad X .

Dowód (dość oczywisty). Jeśli $\mathbf{A}$ jest wolna w klasie $\{\mathbf{A}\}$, to jest właśnie wolna . . . w pewnej klasie. Jeśli natomiast jest wolna w pewnej klasie, to w szczególności do niej należy, a więc każda funkcja z X w $\mathbf{A}$ rozszerza się do homomorfizmu. Co oznacza, rzecz jasna, że $\mathbf{A}$ jest wolna w $\{\mathbf{A}\}$. c.b.d.o.

Wymowa tego ostatniego twierdzenia jest bardzo filozoficzna: wolnym jest się wtedy, gdy się tę wolność ma w sobie. . .