Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

Ciało liczb nadrzeczywistych

Michał MUZALEWSKI, Białystok

1. Ciało liczb nadrzeczywistych $\mathbb{R}^*$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$$

jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. O ile pierwsze dwa rozszerzenia: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, realizują się metodą utożsamiania par, o tyle ostatnie dwa rozszerzenia: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, powstają metodą utożsamiania ciągów.

2. Cantor skonstruował liczby rzeczywiste utożsamiając wybrane ciągi $(w_0, w_1, \ldots)$ liczb wymiernych $w_0, w_1, \ldots \in \mathbb{Q}$. Konstruując liczby nadrzeczywiste wykorzystujemy wszystkie ciągi $(r_0, r_1, \ldots)$ liczb rzeczywistych $r_0, r_1, \ldots \in \mathbb{R}$. Trochę dokładniej: ciąg $x' = (r'_0, r'_1, \ldots)$ utożsamiamy z ciągiem $x = (r_0, r_1, \ldots)$, jeżeli zbiór wyrazów identycznych ciągów x, x': $E(x, x') := \{i : r_i = r'_i\}$ jest „duży".

3. Przyjrzyjmy się definicji granicy ciągu: $\lim_{i\to\infty} r_i = g$

$$(*) \qquad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{k}{\exists}\ \underset{n>k}{\forall}\ |r_i - g| < \varepsilon.$$

A więc nierówność „$|r_i - g| < \varepsilon$" ma być prawdziwa na zbiorze $\{k+1, k+2, \ldots\}$.

W definicji tej pojawiły się **zbiory koskończone** – tak nazywają się uzupełnienia zbiorów skończonych. Zauważmy, że warunek $(*)$ jest równoważny warunkowi następującemu:

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór koskończony $A \subset \mathbb{N}$ taki, że dla każdego $i \in A$ $|r_i - g| < \varepsilon$.

4. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich koskończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. Rodzina ta jest **filtrem**, gdyż spełnia następujące warunki:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$
(2) jeżeli $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, to $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$
(3) jeżeli $A \in \mathcal{F}$ i $A \subset B \subset \mathbb{N}$, to $B \in \mathcal{F}$.

Rodzina $\mathcal{F}$ jest **filtrem wolnym**, gdyż spełnia jeszcze jeden warunek:

(4) jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to A jest zbiorem nieskończonym.

Niestety rodzina $\mathcal{F}$ nie posiada następującej własności:

(5) jeżeli $A \cup B = \mathbb{N}$ i $A \cap B = \emptyset$, to $A \in \mathcal{F}$ lub $B \in \mathcal{F}$.

Własność (5) „chroni" nas przed dzielnikami zera.

Definicja. Rodzinę $\mathcal{U}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ nazywamy ultrafiltrem wolnym, jeżeli $\mathcal{U}$ spełnia warunki (1)–(5), w których za $\mathcal{F}$ należy podstawić $\mathcal{U}$.

5. Za pomocą dowolnie wybranego ultrafiltru wolnego $\mathcal{U}$ określimy relację równoważności ciągów:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \sim (b_0, b_1, b_2, \ldots) \text{ wtw } E(a, b) \in \mathcal{U}.$$

Klasę równoważności ciągu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ oznaczmy symbolem $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$, a zbiór wszystkich klas równoważności oznaczamy symbolem $\mathbb{R}^*$. W zbiorze $\mathbb{R}^*$ wprowadzamy strukturę ciała uporządkowanego w następujący sposób:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] + [b_0, b_1, b_2, \ldots] = [a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots]$$
$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] \cdot [b_0, b_1, b_2, \ldots] = [a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots]$$
$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] < [b_0, b_1, b_2, \ldots] \text{ wtw } \{i : a_i < b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Ciało $\mathbb{R}^*$, zwane **ciałem liczb nadrzeczywistych**, zawiera podciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ za pomocą kanonicznego włożenia

$$w(x) := [x, x, x, \ldots] \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Konstrukcja, którą posłużyliśmy się wyżej, nosi nazwę **ultraproduktu**. A więc ciało $\mathbb{R}^*$ jest ultraproduktem ciała $\mathbb{R}$ (względem ultrafiltru $\mathcal{U}$). Analogicznie moglibyśmy zdefiniować ciało uporządkowane liczb nadwymiernych $\mathbb{Q}^*$ jako ultraprodukt ciała $\mathbb{Q}$.

6. $\mathbb{R}^*$ **jest ciałem niearchimedesowym.** Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to element $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ ciała $\mathbb{R}^*$ jest większy od dowolnej liczby naturalnej n. Przy okazji zauważmy, że każdy ciąg o granicy zero generuje element nieskończenie mały, tzn. mniejszy, co do bezwzględnej wielkości, od $\frac{1}{n}$, dla dowolnej liczby naturalnej n.

7. Twierdzenie. Każde ciało zupełne jest archimedesowe.

Dowód (nie wprost): Niech D będzie ciałem zupełnym. Jeżeli ciało D nie jest archimedesowe, to zbiór $\mathbb{N}$ jest ograniczony z góry. Niech s będzie kresem górnym zbioru $\mathbb{N}$. Zatem $s - 1 < n$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd $s < n + 1$. Sprzeczność. ∎

8. Ważny, choć nietrudny do dowodu jest następujący fakt: jeżeli ciało D jest archimedesowe, to liczby wymierne tworzą w nim podzbiór gęsty.

9. Każde dwa ciała zupełne są kanonicznie izomorficzne. Dokładniej:

Twierdzenie. Każde dwa ciała zupełne są izomorficzne. Co więcej, istnieje dokładnie jeden izomorfizm ψ ciała D_1 na ciało D_2 stały na liczbach wymiernych.

Dowód. Każdemu $x \in D_1$ przyporządkowujemy zbiór $S_x := \{q \in Q : q < x\}$. Zauważmy, że S_x jest podzbiorem zarówno D_1, jak i D_2. Jako podzbiór ciała D_1, zbiór S_x jest ograniczony z góry przez element x. Z punktu 7 wynika, że istnieje liczba naturalna n taka, że $x < n$. Ponieważ $n \in D_2$, więc S_x jako podzbiór ciała D_2 jest także ograniczony z góry – przez element n. Przyporządkowanie ψ dowolnemu elementowi x ciała D_1 kresu górnego zbioru S_x jako podzbioru ciała D_2 jest kanonicznym izomorfizmem ciał. ∎

10. Nieskończenie wielkie i nieskończenie małe. Symbolem $\varphi = \varphi(D)$ oznaczmy zbiór wszystkich skończonych elementów ciała D, tzn. takich $x \in D$, że $|x| < n$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Elementy należące do zbioru $\omega = \omega(D) := D - \varphi(D)$ nazywamy nieskończenie dużymi. Natomiast nieskończenie małymi nazywamy elementy zbioru $\alpha = \alpha(D) := \{x^{-1} : x \in \omega(D)\}$. Przykłady nieskończenie wielkich i małych dla $D = \mathbb{R}^*$ podaliśmy w punkcie 6.

11. Charakteryzacja ciał archimedesowych i niearchimedesowych.
NWSR (= następujące warunki są równoważne):

(i) D jest ciałem archimedesowym
(ii) $D = \varphi$
(iii) $\omega = \emptyset$
(iv) $\alpha = \emptyset$
NWSR:
(i) D jest ciałem niearchimedesowym
(ii) $D \neq \varphi$
(iii) $\omega \neq \emptyset$
(iv) $\alpha \neq \emptyset$

12. φ **jest pierścieniem lokalnym.** Pierścień nazywa się **lokalnym**, jeżeli posiada dokładnie jeden ideał maksymalny. Tym jedynym ideałem maksymalnym w pierścieniu φ jest ideał $\overline{\alpha} := \alpha \cup \{0\}$. Wynika to stąd, że każdy element $x \notin \varphi - \overline{\alpha}$ ma element odwrotny $y \in \varphi$.

13. Twierdzenie. Ciało $\varphi/\overline{\alpha}$ jest ciałem archimedesowym.

14. Ciekawostka na zakończenie. Okazuje się, że jeżeli konstrukcję ciała uporządkowanego $\varphi/\overline{\alpha}$ przeprowadzimy startując od ciała $\mathbb{Q}^*$, to ciało $\varphi/\overline{\alpha}$ jest nie tylko archimedesowe, ale nawet zupełne. Zatem na mocy punktu 9, ciało $\varphi/\overline{\alpha}$ jest ciałem liczb rzeczywistych.