Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

Twierdzenie Schützenbergera

Mikołaj BOJAŃCZYK, Warszawa

Słowem nad zbiorem A nazywamy ciąg elementów $a_1 \dots a_n$ z tego zbioru. Zbiór A nazywamy *alfabetem*; w dalszym ciągu zakładamy zawsze, że alfabet jest skończony. Notatka ta dotyczy teorii języków, która zajmuje się zbiorami słów (zwanymi językami). Tytułowe twierdzenie Schützenbergera mówi o związkach wyrażeń regularnych z teorią półgrup.

Wyrażenia regularne są sposobem opisywania języków. Pozwalają one na używanie do opisu języka poza elementami alfabetu napisów postaci $a + b$ (co oznacza, ze występuje litera a lub litera b), postaci a^* (co oznacza występowanie ciągu dowolnej – być może zerowej długości liter a) oraz pozwalają na konkatenację (czyli dopisywanie jednego słowa na końcu drugiego). Każdy język skończony opisuje się wyrażeniem regularnym. Rozważmy dla przykładu wyrażenie

$$(a + b)^* a(a + b)^*.$$

Wyrażenie to opisuje słowa, które można podzielić w następujący sposób. Najpierw jest ciąg $(a + b)^*$, a więc ciąg liter a albo b dowolnej (być może zerowej) długości. Następnie występuje litera a. Później znowu mamy ciąg $(a + b)^*$, a więc pewną ilość liter a albo b. Inaczej mówiąc, powyższe wyrażenie opisuje słowa nad alfabetem $\{a, b\}$, w których co najmniej raz występuje litera a. Łatwo zauważyć, że ten sam język można opisać wyrażeniem

$$b^* a(a + b)^*.$$

W dalszej części notatki nie będziemy rozróżniali wyrażenia od języka przez nie opisywanego.

Mamy następujący cel: chcemy z każdym językiem L skojarzyć pewną półgrupę S_L, tak aby własności języka L odpowiadały własnościom półgrupy S_L. Kluczem do tej półgrupy są tak zwane „rodzaje" słów.

Rozważmy dla przykładu język

$$L = b^* ab^* ab^* a(a + b)^*.$$

Do języka tego należą słowa, w których litera a występuje co najmniej trzy razy. Z punktu widzenia języka L wszystkie słowa dzielą się na cztery rodzaje. Są słowa, w których a występuje odpowiednio $0, 1, 2$ albo co najmniej 3 razy. Tak więc rodzaje słów możemy utożsamiać z liczbami $0, 1, 2, 3$. Co więcej, na rodzajach tych możemy określić operację dwuargumentową: jest to dodawanie z maksimum 3 (czyli jako jego wynik bierzemy mniejszą z liczb: zwykła suma i 3). Operacja ta odpowiada konkatenacji słów; jest ona łączna, a więc zbiór rodzajów $\{0, 1, 2, \geq 3\}$ wraz z powyższą operacją tworzy półgrupę. Półgrupa ta jest tzw. półgrupą syntaktyczną języka L.

Teraz podamy formalną definicję rodzaju oraz półgrupy syntaktycznej. Niech L będzie językiem nad alfabetem A. Powiemy, że dwa słowa u, u' nad alfabetem A są tego samego rodzaju z punktu widzenia języka L – co oznaczamy przez $u \sim_L u'$ – jeśli dla każdych słów v, w nad alfabetem A, zachodzi

$$vuw \in L \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad vu'w \in L.$$

A więc nie można rozróżnić słów u, u' poprzez wstawianie w konteksty postaci $v?w$ oraz pytanie, czy wynik należy do L. Łatwo zauważyć, że relacja $\sim_L$ jest równoważnością, a nawet kongruencją: jeżeli zachodzi $u \sim_L u'$, to:

$$uv \sim_L u'v \qquad \text{oraz} \qquad vu \sim_L vu'_L.$$

Własność powyższa uzasadnia poprawność następującej definicji półgrupy syntaktycznej S_L: elementami półgrupy są klasy abstrakcji relacji $\sim_L$, zaś wynikiem operacji na klasach abstrakcji słów u oraz v jest klasa abstrakcji konkatenacji uv tych słów. Łaczność tej operacji wynika z łączności konkatenacji, oraz z tego, że $\sim_L$ jest kongruencją. Co więcej, S_L jest nawet półgrupą z jedynką, gdyż klasa abstrakcji słowa pustego jest jedynką w S_L.

Oczywiście, półgrupa syntaktyczna S_L może być nieskończona, jeżeli język L jest skomplikowany (musi być jednak przeliczalna, ponieważ słów nad A jest przeliczalnie wiele). Na przykład, jeżeli L jest językiem

$$\{a^n b^n : n \geq 0\} ,$$

to każde dwa słowa postaci a^i oraz a^j są innego rodzaju, o ile $i \neq j$.

Okazuje się, że półgrupa L jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy język L jest regularny, to znaczy opisuje się wyrażeniem regularnym. Wynik ten nazywa się twierdzeniem Kleene'go.

Tak więc półgrupy skończone odpowiadają w sposób naturalny językom regularnym. Powstaje naturalne pytanie: czy własności półgrup mają jakieś przełożenie na własności języków?

Podamy tutaj dwa przykłady takich własności.

Pierwszy przykład jest bardzo prosty, a podany jest tylko dla rozgrzewki. Powiemy, że półgrupa S jest przemienna, jeżeli dla dowolnych dwóch elementów $s, t \in S$ zachodzi $st = ts$. Z drugiej strony, język L jest przemienny, jeżeli zamiana kolejności liter w słowie nie wpływa na należenie do L.

Twierdzenie. *Język L jest przemienny wtedy i tylko wtedy, gdy jego półgrupa syntaktyczna S_L jest przemienna.*

Drugi przykład jest o wiele bardziej złożony i jest jednym z fundamentalnych wyników w teorii półgrup skończonych. Najpierw sformułujemy twierdzenie, a potem zdefiniujemy pojawiające się w nim pojęcia.

Twierdzenie Schützenbergera. *Niech L będzie językiem regularnym. Język L jest bezgwiazdkowy wtedy i tylko wtedy, gdy jego półgrupa syntaktyczna S_L nie zawiera grupy.*

Poniżej definiujemy odpowiednie pojęcia:

- **Język bezgwiazdkowy.** Język nad alfabetem A nazwiemy bezgwiazdkowym, jeżeli można opisać go wyrażeniem bezgwiazdkowym. Wyrażenie bezgwiazdkowe to takie wyrażenie, w którym nie można używać gwiazdki L^*, ale – uwaga! – za to można używać dopełnienia $A^* \setminus L$. (W przypadku zwykłych wyrażeń operację dopełnienia można symulować za pomocą pozostałych operacji, np. dla $A = \{a, b\}$
$$A^* \setminus a = A^*bA^* + aa^*.$$
Gdy jednak zabroniona jest gwiazdka, uzupełnienie staje się kluczową operacją, która pozwala definiować języki nieskończone.)
- **Półgrupa zawierająca grupę.** Powiemy, że półgrupa S zawiera grupę G, jeżeli G jest obrazem homomorficznym pewnej podpółgrupy $T \subseteq S$. Na przykład $S = \{0, 1, 2, 3\}$ z mnożeniem modulo 4 zawiera grupę, ponieważ podpółgrupa $T = \{1, 2\} \subseteq S$ jest grupą (a więc homomorfizm jest tu identycznością). Można podać przykądy S, gdzie konieczne jest zarówno branie podpółgrupy, jak i obrazu homomorficznego.

Piękno twierdzenia Schützenbergera polega na tym, że łączy ono w zaskakujący sposób dwa naturalne, ale z pozoru niepodobne pojęcia. Zgodnie z tym twierdzeniem język $(aa)^*$ nie jest bezgwiazdkowy (bo jego półgrupa syntaktyczna po prostu jest grupą), zaś omawiany wcześniej język „co najmniej trzy a" jest bezgwiazdkowy. Oto odpowiednie wyrażenie (które można by zresztą zrekonstruować z dowodu twierdzenia):

$$\begin{aligned}
\text{„dowolne słowo''} &= (A^* \setminus \emptyset) \\
\text{„słowo z literą } a\text{''} &= \text{„dowolne słowo''} \cdot a \cdot \text{„dowolne słowo''} \\
\text{„słowo bez litery } a\text{''} &= A^* \setminus \text{„dowolne słowo''} \\
\text{„co najmniej trzy } a\text{''} &= \text{„dowolne słowo''} \cdot a \cdot \text{„dowolne słowo''} \cdot a \cdot \\
&\quad \cdot \text{„dowolne słowo''} \cdot a \cdot \text{„dowolne słowo''}.
\end{aligned}$$