Combinatorial Nullstellensatz, czyli o algebrze w kombinatoryce

Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

Tomasz BARTNICKI, Zielona Góra

Wstęp

Jakie twierdzenia matematyczne są ważne? Zapewne każdy, kto zajmuje się matematyką, zadawał sobie takie pytanie i pewnie większość umie udzielić na nie odpowiedź, która w jego mniemaniu jest słuszna. Takie pytanie postawiono (jako przewodnie) Andrzejowi Białynickiemu-Biruli w wywiadzie, którego udzielił miesięcznikowi „Delta” w 1983 roku [4]. Jedno ze zdań, które padło wówczas z ust profesora brzmiało:

> „Są twierdzenia o charakterze raczej technicznym, ale o podstawowym znaczeniu dla dyscypliny, której dotyczą. Za takie można uznać np. twierdzenie Hilberta o zerach.”

Trudno polemizować z autorytetem, jednak, jeśli ktoś nie zetknął się z zaawansowaną geometrią algebraiczną, musi uwierzyć na słowo, że twierdzenie Hilberta o zerach (które funkcjonuje też, niezależnie od języka, pod swoją oryginalną nazwą Nullstellensatz) ma fundamentalne znaczenie dla tej dziedziny matematyki. A któż nas, nie zajmujący się nią na co dzień, wyrwany w tej chwili do odpowiedzi potrafiłby je sformułować lub przynajmniej w przybliżeniu powiedzieć, czego dotyczy? Okazało się jednak, że to techniczne twierdzenie znalazło zastosowanie w innych dziedzinach, takich, jak teoria liczb, geometria kombinatoryczna, czy teoria grafów. Dziś już możemy wręcz mówić o pewnej metodzie algebraicznego podejścia do problemów kombinatorycznych zwanej Combinatorial Nullstellensatz, którą zapoczątkował w 1999 roku Noga Alon [2]. Metodzie tej zawdzięczamy zarówno nowe, eleganckie dowody klasycznych twierdzeń, jak i rozwiązanie kilku otwartych problemów. W artykule tym przedstawimy na paru przykładach, jakie wspaniałe narzędzie stworzył David Hilbert i co potrafił z nim jeszcze zrobić Noga Alon, gdy wydawało się, że jest już mocno zużyte.

Czym jest Nullstellensatz?

Nie sposób artykułu, w którego tytule pojawia się *Nullstellensatz*, zacząć inaczej, niż od sformułowania oryginalnego twierdzenia. Z wielu równoważnych wersji wybraliśmy taką, która wymaga najmniej zaawansowanej terminologii z teorii pierścieni, ideałów i radykałów.

Twierdzenie 1 (Hilbert). *Niech F będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $F[x_1, \ldots, x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów n-zmiennych nad tym ciałem. Jeżeli wielomian $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ zeruje się w każdym wspólnym zerze wielomianów $g_1, \ldots, g_m \in F[x_1, \ldots, x_n]$, to istnieje liczba naturalna k oraz wielomiany $h_1, \ldots, h_m \in F[x_1, \ldots, x_n]$ takie, że*

$$f^k = h_1 g_1 + \cdots + h_m g_m.$$

Twierdzenie to pozostawimy zarówno bez dowodu, jak i bez żadnych dodatkowych komentarzy, a czytelnik, który spotyka się z nim po raz pierwszy musi zaufać ekspertom, że jest ono podstawą w badaniach afinicznych rozmaitości algebraicznych i może przejść do dalszej części artykułu bez zbytniego wnikania w jego sens.

Czym jest Combinatorial Nullstellensatz?

Jak już wspomnieliśmy we wstępie Combinatorial Nullstellensatz jest metodą algebraiczną w kombinatoryce wymyśloną przez Alona w 1999 roku. Składają się na nią dwa twierdzenia, które są szczególnymi przypadkami twierdzenia Hilberta. Na potrzeby tego artykułu sformułujemy tylko to z nich, które wykorzystamy w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 2 (Combinatorial Nullstellensatz). *Niech $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ będzie wielomianem nad dowolnym ciałem F. Jeżeli w wielomianie f współczynnik przy jednomianie $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ jest różny od 0 i $\deg(f) = t_1 + \cdots + t_n$, to dla dowolnych $S_1, \ldots, S_n \subseteq F$ takich, że $|S_1| > t_1, \ldots, |S_n| > t_n$, istnieją $s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n$ takie, że*

$$f(s_1, \ldots, s_n) \neq 0.$$

Również to twierdzenie pozostawimy bez szczegółowego dowodu (można go znaleźć w [2]). Pokażemy tylko, jaki jest jego związek z twierdzeniem 1. Wielomiany f w obu twierdzeniach odpowiadają sobie, przyjmujemy, że $m = n$ i wielomiany $g_1, \ldots, g_m$ z twierdzenia 1 definiujemy (na potrzeby dowodu twierdzenia 2), jako wielomiany w istocie jednej zmiennej:

$$g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s).$$

Następnie zakładamy, że wielomian $f \not\equiv 0$ zeruje się na zbiorze $S_1 \times \cdots \times S_n$, który jest tutaj jednocześnie zbiorem wszystkich wspólnych zer wielomianów $g_1, \ldots, g_n$, co jednak prowadzi do konkluzji, że $f \equiv 0$ i w efekcie do sprzeczności. Warto również zauważyć, że w twierdzeniu 2 nie trzeba zakładać algebraicznej domkniętości ciała F.

Na kombinatoryczne twierdzenie o zerach warto spojrzeć z nieco innej strony. Jest ono, bowiem, uogólnieniem znanego wszystkim faktu, że wielomian (jednej zmiennej) stopnia t ma co najwyżej t różnych pierwiastków (a więc w zbiorze S, takim, że $|S| > t$ zawsze znajdziemy element, który nie zeruje wielomianu). W przypadku wielomianu f wielu zmiennych jego stopień $\deg(f) = t_1 + \cdots + t_n$ może być realizowany przez wiele układów liczb całkowitych $t_1, \ldots, t_n$, które są wykładnikami przy nieznikających jednomianach postaci

$c \cdot x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$. Dla każdego takiego układu liczb $t_1, \dots, t_n$ i odpowiadającego mu układu zbiorów $S_1, \dots, S_n \subseteq F$ o mocach większych niż te liczby, znajdziemy podstawienie $f(s_1, \dots, s_n)$ takie, że $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ i które nie zeruje wielomianu.

Dwa klasyczne zastosowania

Pierwszym przykładem zastosowania Combinatorial Nullstellensatz jest nowy dowód klasycznego twierdzenia, które ma duże zastosowanie w addytywnej teorii liczb.

Twierdzenie 3 (Cauchy-Davenport). *Jeżeli A i B są dwoma niepustymi podzbiorami grupy $\mathbb{Z}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, to*

$$|A+B| \geqslant \min\{p, |A|+|B|-1\}.$$

Twierdzenie to, które orzeka, że zbiór $A+B$ wszystkich możliwych sum elementów ze zbiorów A i B musi być odpowiednio duży, jako pierwszy udowodnił Cauchy w 1813 roku i wykorzystał je w nowym dowodzie twierdzenia mówiącego, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów. Davenport sformułował je jako dyskretny odpowiednik hipotezy Chinczyna. Dowody podane przez Cauchy'ego i Davenporta były oparte na tym samym kombinatorycznym pomyśle i wykorzystywały indukcję ze względu na moc jednego ze zbiorów. Poniższy dowód wykorzystujący proste zastosowanie twierdzenia 2 ma tę zaletę, że jego drobna modyfikacja może być wykorzystana w dowodach kilku podobnych rezultatów.

Dowód. Jeżeli minimum jest realizowane przez p, czyli gdy $|A|+|B|>p$, to wynik jest oczywisty, gdyż zbiory A i B mają wspólny element, a więc także dla dowolnego $g \in \mathbb{Z}$ zbiory A i $g-B$ mają wspólny element. Istnieje więc $a \in A$, który należy również do $g-B$, czyli $a = g-b$ dla pewnego $b \in B$, a to oznacza, że $g = a+b$, zatem $A+B = \mathbb{Z}$.

Niech więc $|A|+|B| \leqslant p$ i załóżmy nie wprost, że teza jest fałszywa, czyli $|A+B| \leqslant |A|+|B|-2$. Niech C będzie podzbiorem $\mathbb{Z}_p$ takim, że $A+B \subseteq C$ i $|C| = |A|+|B|-2$. Zdefiniujmy wielomian

$$f = f(x,y) = \prod_{c \in C}(x+y-c)$$

i zauważmy, że zgodnie z tą definicją i określeniem zbioru C mamy

(1) $\qquad f(a,b) = 0$ dla wszystkich $a \in A,\ b \in B.$

Połóżmy $t_1 = |A|-1$ i $t_2 = |B|-1$ oraz zauważmy, że w wielomianie f stopnia t_1+t_2 współczynnik przy jednomianie $x^{t_1}y^{t_2}$ wynosi $\binom{|A|+|B|-2}{|A|-1}$ i jest niezerowy w $\mathbb{Z}_p$, z uwagi na to, iż $|A|+|B|-2 < p$, a p jest liczbą pierwszą i nie może dzielić iloczynu liczb mniejszych od niej. Zatem stosując twierdzenie 2 dla $n=2$, $S_1 = A$, $S_2 = B$ wnioskujemy, że muszą istnieć $a \in A$ oraz $b \in B$ takie, że $f(a,b) \neq 0$, co jest sprzeczne z (1) i kończy dowód. $\square$

Drugie klasyczne zastosowanie Combinatorial Nullstellensatz pochodzi z geometrii kombinatorycznej i daje elegancką odpowiedź na pytanie postawione przez Komjátha. Choć problem został rozwiązany już wcześniej, to poprzedni dowód był o wiele bardziej skomplikowany. Problem dotyczył pokrywania wierzchołków kostki jednostkowej w przestrzeni dowolnego wymiaru (a więc kwadratu, sześcianu, hipersześcianu, itd...) hiperpłaszczyznami (czyli obiektami opisywanymi jednym równaniem liniowym) w tej przestrzeni. Łatwo zauważyć, że do pokrycia wszystkich wierzchołków kostki jednostkowej w $\mathbb{R}^n$ (czyli $\{0,1\}^n$) potrzeba (i wystarcza) dokładnie dwóch hiperpłaszczyzn. Problem komplikuje się jednak, jeżeli zażądamy, aby dokładnie jeden wierzchołek kostki (na przykład ten umieszczony w punkcie $(0,\dots,0)$) pozostał niepokryty. Okazuje się, że wówczas potrzebujemy (i jest to optymalna liczba) dokładnie tyle hiperpłaszczyzn, ile wynosi wymiar przestrzeni, lecz dowód tego faktu jest już znacznie trudniejszy.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $H_1, \dots, H_m$ jest rodziną hiperpłaszczyzn w przestrzeni $\mathbf{R}^n$ pokrywającą wszystkie, za wyjątkiem dokładnie jednego, wierzchołki n-wymiarowej kostki jednostkowej, to $m \geqslant n$.*

Dowód. Bez utraty ogólności możemy założyć, że niepokrytym wierzchołkiem jest $(0,\dots,0)$. Niech każda hiperpłaszczyzna H_i będzie określona równaniem $\langle \mathbf{a_i}, \mathbf{x}\rangle = b_i$ (czyli $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$). Zauważmy, że $b_i \neq 0$ dla każdego i, gdyż żadna z hiperpłaszczyzn H_i nie pokrywa punktu zerowego.
Załóżmy nie wprost, że teza jest fałszywa, czyli $m < n$ i zdefiniujmy wielomian

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= (-1)^{n+m+1} b_1 \cdots b_m \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)}_{L} + \underbrace{\prod_{i=1}^{m}(\langle \mathbf{a_i}, \mathbf{x}\rangle - b_i)}_{P}.$$

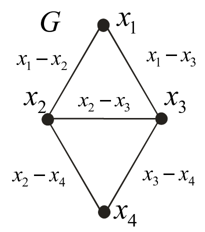
Wielomian P został tak zdefiniowany, aby jego lewa część (L) zerowała się na wierzchołkach kostki jednostkowej (oprócz $(0,\dots 0)$) zaś prawa (P) na wszystkich punktach należących do którejkolwiek z hiperpłaszczyzn H_i. Ponadto współczynnik $(-1)^{n+m+1} b_1 \cdots b_m$ został tak dobrany, aby również $P(0,\dots,0) = 0$. Z założenia twierdzenia wszystkie punkty kostki (poza 0) należą do którejś hiperpłaszczyzny, więc wielomian P zeruje się na wszystkich $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$.
Z drugiej strony, stopień wielomianu wynosi n i jest realizowany przez jednomian $x_1 \cdots x_n$, gdyż współczynnik przy nim $(-1)^{n+m+1} b_1 \cdots b_m$ jest niezerowy. Stosując twierdzenie 2 dla $t_1 = \cdots = t_n = 1$ oraz $S_1 = \cdots = S_n = \{0,1\}$ dostajemy, że istnieje jednak wektor zerojedynkowy, który nie zeruje wielomianu P, co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód. $\square$

Algebra w teorii grafów

Jednym z pierwszych pomysłodawców wykorzystania metod algebraicznych w teorii grafów był Julius Petersen. Zaproponował on w 1891 roku, aby grafowi przyporządkować jednoznacznie pewien wielomian, a następnie – badając go algebraicznie – wnioskować o różnych własnościach związanego z nim grafu. Wielomian taki nazywany jest często wielomianem Petersena lub po prostu wielomianem grafowym, a oto jak przebiega jego konstrukcja.

Przez graf rozumiemy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest skończonym zbiorem wierzchołków (zwykle $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i na rysunkach są to punkty), zaś $E \subseteq V \times V$ zbiorem krawędzi, czyli wyróżnionym zbiorem par wierzchołków (na rysunkach oznaczanych odcinkami łączącymi punkty). Wielomian f_G tworzymy w ten sposób, że każdemu wierzchołkowi v_i przyporządkowujemy dokładnie jedną zmienną x_i, a następnie tworzymy iloczyn (po wszystkich krawędziach) różnic zmiennych na końcach krawędzi, co formalnie można zapisać jako

$$f_G(x_1, \ldots x_n) = \prod_{\substack{i<j,\\ \{v_i, v_j\} \in E}} (x_i - x_j).$$



Rys. 1. Konstrukcja wielomianu grafowego

Na przykład dla grafu z rysunku 1

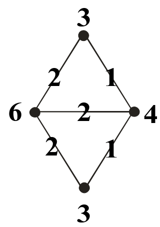
$$f_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4).$$

Tak zdefiniowany wielomian ma bezpośredni związek z jednym z głównych problemów w teorii grafów, mianowicie z poprawnym kolorowaniem wierzchołków grafu. Poprawnym kolorowaniem nazywamy takie przyporządkowanie wierzchołkom grafu wartości z ustalonego zbioru C (zwanego zbiorem kolorów), aby każda para sąsiadujących wierzchołków otrzymała różne kolory. Problem jest w tym, aby liczba użytych kolorów była możliwie najmniejsza. Taką najmniejszą liczbę kolorów, która umożliwia poprawne pokolorowanie wierzchołków zadanego grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* i oznaczamy przez $\chi(G)$. Nietrudno dostrzec, że jeżeli za $|C|$ przyjmiemy zbiór liczb (lub elementów z pewnego ciała), to znalezienie poprawnego kolorowania grafu G jest równoważne znalezieniu niezerującego podstawienia do wielomianu f_G elementów ze zbioru C.

Oczywiście samo przeformułowanie problemu z języka grafowego na wielomianowy nic jeszcze nie wnosi, należało by jeszcze użyć jakichś algebraicznych narzędzi (na przykład Combinatorial Nullstellensatz) do opisu własności tak skonstruowanego wielomianu. Niestety, w większości przypadków dotyczących kolorowania dużych grafów jest to sprawą równie beznadziejną jak wyjściowy problem. Jako trywialne zastosowanie możemy zauważyć, że w utworzonym wyżej wielomianie (po wymnożeniu czynników) znajdziemy jednomian $-x_1x_2x_3^2x_4$, co, po zastosowaniu twierdzenia 2, gwarantuje, że istnieje poprawne kolorowanie grafu trzema kolorami. Warto jednak zauważyć, że znalezienie jednomianu o niskich wykładnikach ogranicza nam liczbę chromatyczną, lecz nie wskazuje sposobu poprawnego kolorowania.

Ważenie grafów

Zastosowanie Combinatorial Nullstellensatz w nowoczesnej teorii grafów dało rozwiązanie kilku niezwykle ciekawych problemów. Niestety sformułowanie większości z nich wymaga wprowadzenia dość zaawansowanej technicznej terminologii. Zdecydowaliśmy się, zatem, aby zamiast prezentować spektakularne rozwiązanie zawiłego problemu, pokazać dość nowy i elementarnie sformułowany problem, który, co prawda, nie został do końca rozwiązany, ale za to podejście algebraiczne dało pewne częściowe rezultaty i rzuciło nań nowe światło.



Rys. 2. Dobre ważenie grafu

Ważeniem grafu będziemy nazywać przyporządkowanie jego krawędziom wag, czyli liczb z pewnego ustalonego zbioru (lub ogólniej elementów z danego ciała). W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że wagi będą liczbami naturalnymi. Mówimy, że dane ważenie grafu jest dobre, jeżeli po obliczeniu sumy wag wokół każdego wierzchołka okaże się, że każda para wierzchołków połączonych krawędzią otrzymała różne sumy, czyli dała poprawne kolorowanie wierzchołków (patrz rysunek 2). Możemy teraz postawić naturalne pytanie, czy każdy graf da się dobrze zważyć, a jeśli tak, to jaki najmniejszy zbiór wag może nam to zagwarantować. Łatwo zauważyć, że grafu złożonego z dwóch wierzchołków połączonych krawędzią (zwanego K_2) nijak nie da się dobrze zważyć z żadnego zbioru, bo oba wierzchołki zawsze dostaną tę samą wartość. Jest to jednak szczególny przypadek grafu, a dla wszystkich innych może się nawet okazać, iż:

Hipoteza 123 (Karoński, Łuczak, Thomason, 2004, [5]). *Każdy spójny graf (z wyjątkiem K_2) można dobrze zważyć za pomocą liczb ze zbioru* $\{1, 2, 3\}$.

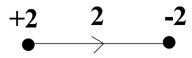
Tak łatwa do sformułowania hipoteza wydaje się być bardzo napięta, gdyż znamy grafy, dla których zbiór $\{1, 2\}$ nie wystarcza do ich dobrego zważenia, a z drugiej strony dowód, że jakikolwiek skończony zbiór $\{1, \ldots, n\}$ wystarczy, nie był elementarny. Dziś wiadomo już, że:

Fakt 1 (Addario-Berry, Aldred, Dalal, Reed, 2005, [1]). *Każdy spójny graf (z wyjątkiem K_2) można dobrze zważyć za pomocą liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 16\}$.*

Kolejny rezultat pozwala sądzić, że hipoteza 123, jeśli nawet jest fałszywa, to grafy, które są kontrprzykładami są niezmiernie rzadkie.

Fakt 2 (Addario-Berry, Aldred, Dalal, Reed, 2005, [1]). *Prawie każdy spójny graf można dobrze zważyć za pomocą liczb ze zbioru $\{1, 2\}$.*

Mówiąc bardziej formalnie sformułowanie „prawie każdy" oznacza, iż prawdopodobieństwo, że losowy graf (tzn. taki, w którym każda krawędź pojawia się niezależnie z ustalonym prawdopodobieństwem p) ma żądaną własność, dąży do 1, gdy liczba wierzchołków dąży do nieskończoności.



Rys. 3. Ważenie grafu skierowanego

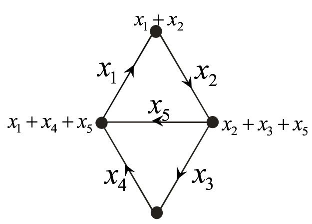
Ostatni fakt dotyczy ważenia grafów skierowanych, czyli takich, których każda krawędź ma nadaną jedną z dwóch orientacji (oznaczaną strzałką). Dla takiego grafu z ustalonymi wagami na krawędziach zmienia się sposób liczenia sum dla wierzchołków, bo wagi krawędzi wchodzących do wierzchołka liczymy ze znakiem ujemnym, zaś wagi krawędzi wychodzących ze znakiem dodatnim (patrz rysunek 3).

Fakt 3. *Każdy graf skierowany można dobrze zważyć za pomocą liczb ze zbioru $\{1, 2\}$.*

Hipoteza 123 i Combinatorial Nullstellensatz

Aby próbować rozwiązać hipotezę 123 metodami algebraicznymi, musimy skonstruować odpowiedni dla niej wielomian, którego zerowanie będzie odpowiadać złemu ważeniu grafu, znalezienie zaś niezerującego podstawienia będzie oznaczać dobre ważenie. Konstrukcja wielomianu przebiega następująco:

1. Krawędziom przypisujemy zmienne x_i.
2. Dla każdego wierzchołka v tworzymy sumę S_v zmiennych z krawędzi z nim incydentnych.
3. Dowolnie orientujemy krawędzie grafu G.
4. Dla każdej skierowanej krawędzi $e = (u, v)$ tworzymy różnicę $D_e = S_v - S_u$.
5. Mnożymy wszystkie różnice D_e, aby otrzymać wielomian P_G.



Rys. 4. Konstrukcja wielomianu do ważenia grafów

Wielomian dla przykładowego grafu z rysunku 4 wygląda następująco:

$$P_G(x_1, \dots, x_5) = \\ = (x_2 - x_4 - x_5)(x_3 + x_5 - x_1)(x_4 - x_2 - x_5) \times \\ \times (x_1 + x_5 - x_3)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3).$$

Analizując powyższą konstrukcję dochodzimy do sformułowania problemu dobrego ważenia grafów w języku algebraicznym.

Fakt 4. *Graf G można dobrze zważyć za pomocą wag ze zbioru S wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $s_1, \dots, s_m \in S$ (gdzie m jest liczbą krawędzi), takie że $P_G(s_1, \dots, s_m) \neq 0$.*

Aby móc zastosować Combinatorial Nullstellensatz do wielomianu P_G i dostać rozwiązanie hipotezy 123, musielibyśmy pokazać, że w wielomianie tym będzie zawsze istniał jednomian o wykładnikach co najwyżej 2. Mielibyśmy wówczas ciąg implikacji:

Hipoteza 123 (wersja wielomianowa). *Dla każdego spójnego grafu G (z wyjątkiem K_2) wielomian P_G posiada nieznikający jednomian o wykładnikach niewiększych niż 2.*

$\Downarrow$ (Combinatorial Nullstellensatz)

Hipoteza 123 (wersja listowa).

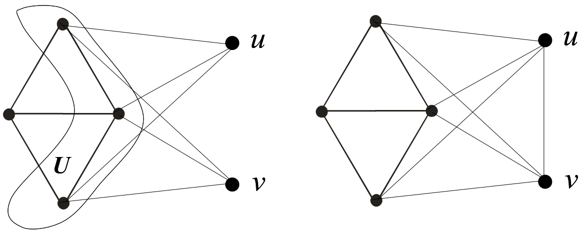
$\Downarrow$

Hipoteza 123 (wersja oryginalna).

Warto zauważyć, że hipoteza, którą stawiamy, jest znacznie silniejsza od oryginalnej. Bowiem jeśli jest prawdą, że wielomian P_G ma żądany jednomian o niskich wykładnikach, to wówczas graf G możemy dobrze zważyć, nie tylko liczbami 1, 2, 3, ale każdymi trzema z dowolnego ciała. Co więcej możemy to zrobić w tak zwanej wersji listowej, czyli przypisać na wstępie każdej krawędzi dowolną trójelementową listę wag, a następnie zażądać, aby każda krawędź dostała wagę ze swojej listy. Zwykłe ważenie będzie wówczas szczególnym przypadkiem wersji listowej, w którym wszystkie listy są identyczne.

Okazuje się, że o współczynnikach w rozwinięciu wielomianu P_G decydują własności pewnych macierzy związanych z wielomianem P_G i z grafem G. Badanie tych macierzy (a konkretnie ich permanentów) i zastosowanie Combinatorial Nullstellensatz nie doprowadziło, niestety, do pełnego rozwiązania hipotezy 123, jednak udało się opracować algorytm konstruowania grafów które spełniają ją w silniejszej wersji listowej.

Na zakończenie przedstawimy tę konstrukcję [3]. Załóżmy, że mamy pewien graf $G = (V, E)$, którego wielomian P_G posiada jednomian o współczynnikach niewiększych niż 2, a więc spełnia on także hipotezę 123 w silniejszej wersji (takim grafem jest np. rozważany wcześniej „diament"). Wybieramy w grafie G dowolny $U \subseteq V$ niepusty podzbiór wierzchołków, dodajemy dwa nowe wierzchołki u i v (mogą one być zarówno połączone jak i niepołączone krawędzią), a następnie łączymy każdy z nich ze wszystkimi wierzchołkami ze zbioru U. Otrzymany w ten sposób graf $G' = (V \cup \{u, v\}, E')$ (patrz rysunek 5) również spełnia hipotezę 123 i może być podstawą do dalszej konstrukcji. Algorytm nie gwarantuje skonstruowania każdego grafu, lecz umożliwia otrzymanie na przykład klasy drzew, grafów pełnych lub pełnych dwudzielnych.



Rys. 5. Konstrukcja grafów dobrze ważalnych

Podziękowania
Dziękuję Zofii Miechowicz za wszystkie cenne uwagi i pomoc w przygotowaniu zarówno wykładu, jak i niniejszego artykułu.

Literatura

[1] L. Addario-Berry, K. Dalal, B. A. Reed, Degree constrained subgraphs, Disc. Apll. Math. (to appear).

[2] N. Alon, *Combinatorial Nullstellensatz*, Combinatorics, Probability and Computing 8 (1999), 7–29.

[3] T. Bartnicki, J. Grytczuk, S. Niwczyk, *Weight choosability of graphs*, manuskrypt.

[4] A. Białynicki-Birula, M. Szurek, *Jakie twierdzenia matematyczne są ważne?*, Delta (1/1983).

[5] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 91 (2004), 151–157.