Magia algebry, czyli życie królików

Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

Jacek TABOR, Kraków

1. Wstęp

Chciałbym zacząć od wyjaśnienia czym dla mnie (a myślę raczej geometrycznie) jest algebra. Otóż ponieważ nie czuję (i nie znam) za dobrze algebry, przypomina mi ona kapelusz magika, do którego wrzucamy kolorowe wstążki, a wyciągamy królika.

Chciałbym w niniejszym referacie zaprezentować podobnego typu działanie algebry. Naszym magicznym kapeluszem jest prosta algebraiczna obserwacja dotycząca wielomianów, mająca zaskakujące konsekwencje w różnych częściach matematyki.

2. Magiczny Kapelusz

Celem pracy jest pokazanie możliwych (mam nadzieję ciekawych) zastosowań następującej prostej algebraicznej obserwacji. Przez $\mathbb{R}_+$ rozumiem $[0,\infty)$.

Obserwacja 1 (magiczny kapelusz). *Niech W będzie wielomianem o współczynnikach z $\mathbb{C}$, który nie ma miejsc zerowych w $\mathbb{R}_+$.*

Wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$ i stałe nieujemne $\beta_0, \beta_1 \ldots, \beta_N$, $\beta_0 > 0$, $\beta_N > 0$, takie że wielomian P zdefiniowany wzorem

$$P(\lambda) = \beta_0\lambda^N + \beta_1\lambda^{N-1} + \ldots + \beta_N$$

jest podzielny przez W.

Zauważmy, że dzieląc nasz wielomian P przez β_0 lub β_N możemy się tak urządzić, by $\beta_0 = 1$ lub $\beta_N = 1$.

Dowód. Po pierwsze, zauważmy, że jeżeli powyższe twierdzenie zachodzi dla wielomianów W_1 i W_2 to oczywiście zachodzi też dla wielomianu $W_1 \cdot W_2$.
W konsekwencji [na podstawie zasadniczego twierdzenia algebry mówiącego o tym, że każdy wielomian przedstawia się w postaci iloczynu jednomianów] oznacza to, że wystarczy tezę naszego twierdzenia pokazać dla jednomianów $(x-a)$, gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Oczywiście

$$(x-a)|(x^n - a^n)\cdot(x^n - \bar{a}^n) \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Teraz

$$(x^n - a^n)\cdot(x^n - \bar{a}^n) = x^{2n} - 2\mathrm{re}(a^n)x^n + |a|^{2n}.$$

Wystarczy pokazać, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$\mathrm{re}(a^n) \leqslant 0.$$

Ale $\mathrm{re}(a^n) = \cos(n\phi)$, dla $\phi = \arg(a) \in (0, 2\pi)$ (bo $a \notin \mathbb{R}_+$). Jeżeli $\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$, to oczywiście $\cos(\phi) \leqslant 0$. Zajmijmy się więc teraz przypadkiem, gdy $\phi \in (0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$. Ponieważ $\cos(2k\pi - z) = \cos(z)$, więc wystarczy nam się zawęzić do badania przypadku, gdy $\phi \in (0, \pi/2)$. Widać, że istnieje najmniejsze takie $n \in \mathbb{N}$, że $n\phi \in [\pi/2, \pi)$ i wtedy $\cos(n\phi) \leqslant 0$. □

3. Bujne życie królików

Pierwsze równanie różnicowe opisujące życie królików

$$f_0 = 0, f_1 = 1,$$
$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k,$$

wymyślił Fibonacci. Niestety, poza sytuacjami bojowymi (patrz [1]) króliki nie chcą się tak rozmnażać. Okazuje się natomiast, że równanie Fibonacciego dobrze opisuje pewne procesy biologiczne (jak na przykład liczbę gałęzi na drzewie w kolejnych latach).

Zauważmy natomiast, że to równanie posiada sensowną własność, jeśli chodzi o rozmnażanie:

jeśli wystartujemy z dodatniej liczby królików, to liczba królików ciągle pozostanie dodatnia.

Będziemy się zajmować podobnym problemem (istnienia rozwiązań nieujemnych) dla równania różnicowego liniowego

$$f_{k+n} = \alpha_1 f_{k+n-1} + \ldots + \alpha_n f_k \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Przez ustalenie warunku początkowego rozumiemy podanie wartości $f_0, \ldots, f_{n-1}$.

Definicja 1. *Troszeczkę nieściśle mówiąc, równanie, które nie ma nietrywialnego nieujemnego rozwiązania, nazywamy* oscylującym.

Jedną z ważniejszych metod badania rozwiązań równań różnicowych polega na sprawdzaniu, które ciągi geometryczne $(Aq^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (jako, że są one najprostsze) spełniają nasze równanie różnicowe:

$$Aq^{k+n} = \alpha_1 Aq^{k+n-1} + \ldots + \alpha_n Aq^k \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Jak łatwo zauważyć dostajemy równanie

$$W(q) := q^n - \alpha_1 q^{n-1} - \ldots - \alpha_n = 0.$$

Wielomian W, który jak się okazuje charakteryzuje wiele ważnych własności naszego równania, nazywamy *wielomianem charakterystycznym.*

Z naszych rozważań dostaniemy

Stwierdzenie 1. *Niech będzie dane równanie różnicowe o wielomianie charakterystycznym W. Jeśli W ma pierwiastek rzeczywisty dodatni, to istnieje rozwiązanie naszego równania, które jest ściśle dodatnie (czyli istnieją pewne warunki początkowe, przy których króliki nie wymrą).*

Dowód. Jeśli W ma pierwiastek dodatni q_0, to oczywiście ciąg $(q_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest rozwiązaniem naszego równania, ale ten ciąg składa się z elementów dodatnich. □

Zajmiemy się teraz problemem, kiedy króliki, niezależnie od postawienia warunków początkowych wymrą.

Postaramy się rozstrzygnąć to najpierw w najprostszym przypadku. Zajmiemy się równaniem stopnia drugiego:

$$f_{k+2} = \alpha_1 f_{k+1} + \alpha_2 f_k.$$

Lemat 1. *Jeżeli wielomian charakterystyczny W powyższego równania nie ma pierwiastka w $\mathbb{R}_+$, to – niezależnie od postawienia warunków początkowych – króliki wymrą.*

Dowód. Wiemy, że miejsca zerowe wielomianu W są dane przez
$$q = r(\cos\phi \pm i \ \sin\phi),$$
gdzie $\phi \in (0, \pi)$.

Korzystając ze znajomości rozwiązań w postaci ciągów geometrycznych, stwierdzamy, że rozwiązanie jest postaci
$$f_k = r^k(A\cos(k\phi) + B\sin(k\phi)).$$
I trzeba pokazać, że powyższe wyrażenie (jako funkcja k), jeśli jest niezerowe, to zmienia znak.

Jeżeli ϕ jest niewspółmierne z 2π, to dzięki tw. Kroneckera [2], dostajemy, że $(k\phi) \bmod 2\pi$ jest gęste w przedziale $[0, 2\pi]$, czyli $A\cos(k\phi) + B\sin(k\phi)$ będzie ujemne dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Jeżeli ϕ i 2π są współmierne, to znaczy, że $\phi = \frac{m}{n}2\pi$, gdzie ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Relatywnie łatwo można sprawdzić, że
$$\cos(0\phi) + \ldots + \cos((n-1)\phi) = 0,$$
$$\sin(0\phi) + \ldots + \sin((n-1)\phi) = 0.$$
W konsekwencji
$$\sum_{k=0}^{n-1}(A\cos(k\phi) + B\sin(k\phi)) = 0,$$
co oznacza, że istnieje pewne k, dla którego $A\cos(k\phi) + B\sin(k\phi) < 0$. □

W podobnym stylu można to ogólnie pokazać, z tym, że dowód robi się już znacznie mniej przyjemny. Postaramy się to zrobić inną metodą, stosując algebraiczną magię kapeluszową. Będzie potrzebna nam następująca oczywista obserwacja [której niełatwy dowód zostawiamy zainteresowanemu czytelnikowi :-)]:

Obserwacja 2. *Niech ciąg (f_k) spełnia równanie różnicowe (R_W) o wielomianie charakterystycznym W. Jeżeli mamy inne równanie różnicowe (R_P) o wielomianie charakterystycznym P takim że $W|P$, to ciąg (f_k) spełnia równanie różnicowe (R_P).*

I jako wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 1. *Niech ciąg (f_k) spełnia równanie różnicowe (R_W) o wielomianie charakterystycznym W, takim, że W nie ma nieujemnych miejsc zerowych. Wtedy ciąg (f_k) oscyluje (to znaczy nie jest od pewnego momentu ani ściśle dodatni, ani ściśle ujemny).*

Dowód. Na podstawie naszego głównego magicznego kapelusza, wiemy, że istnieją takie nieujemne liczby $\beta_1, \ldots, \beta_N$, że wielomian P zdefiniowany wzorem
$$P(\lambda) := \lambda^N + \beta_1\lambda^{N-1} + \ldots + \beta_N$$
jest podzielny przez W. Oczywiście, równanie
$$g_{k+N} = -(\beta_1 g_{k+N-1} + \ldots + \beta_N g_k) \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$
ma wielomian charakterystyczny P. W konsekwencji stwierdzamy, że nasz ciąg f_k spełnia powyższe równanie.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $f_k, \ldots, f_{k+N} > 0$. Wtedy
$$f_{k+N} = -(\beta_1 f_{k+N-1} + \ldots + \beta_N f_k) < 0,$$
sprzeczność. □

4. I jeszcze guglający króliczek na deser

Postaram się w tym rozdziale włożyć do naszego kapelusza guglające macierze kwadratowe. Aby to zrobić muszę przypomnieć, co rozumiem przez widmo macierzy $\sigma(A)$. Jak sama nazwa wskazuje, jest to pewien zbiór liczb charakteryzujący główne własności macierzy, a otrzymuje się go, biorąc miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego
$$W_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}).$$
Ważna własność wielomianu charakterystycznego macierzy A to to, że on anihiluje macierz A:
$$W_A(A) = 0.$$
W konsekwencji widzimy, że jeżeli P jest takim wielomianem, że $W_A|P$, to oczywiście też $P(A) = 0$. Aha, byłbym zapomniał, przez Id rozumiem macierz identycznościową, czyli mającą jedynki na przekątnej, i zera poza przekątną.

Stwierdzenie 2. *Niech A będzie taką macierzą, że $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Wtedy istnieją takie współczynniki $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ z $\mathbb{R}_+$, że*
$$-\mathrm{Id} = \beta_0 A^N + \ldots + \beta_{N-1}A.$$

Dowód. Z założeń wiemy, że W_A ma zera poza $\mathbb{R}_+$, więc korzystając z naszego magicznego kapelusza otrzymujemy istnienie takiego wielomianu P, $P(0) = 1$ o współczynnikach z $\mathbb{R}_+$, że $W_A|P$. Inaczej mówiąc,
$$P(\lambda) = 1 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_N\lambda^N,$$
dla pewnych nieujemnych liczb $\beta_1, \ldots, \beta_N$. Z uwag przed wnioskiem otrzymujemy, że $P(A) = 0$, ale to jest przecież dokładnie teza naszego wniosku.

Hurra!, znowu się udało coś udowodnić. :-) □

Jeśli ktoś z Państwa był na referacie Dominika Kwietniaka (mnie niestety nie było), to wie, że do guglania potrzebne są wektory własne odpowiadające rzeczywistym nieujemnym wartościom własnym macierzy o współczynnikach w $\mathbb{R}_+$. Spróbujemy coś takiego (w dosyć słabej wersji, ale jednak) udowodnić.

Wniosek 1. *Niech A będzie macierzą kwadratową mającą współczynniki z $\mathbb{R}_+$. Wtedy A ma wartość własną nieujemną rzeczywistą.*

Dowód. Jako wielki zwolennik dowodów nie wprost, aby Państwa zaskoczyć, zrobię dowód nie wprost. Załóżmy więc, dla dowodu nie wprost, że A nie ma wartości własnej nieujemnej rzeczywistej. Wtedy możemy skorzystać z naszego Stwierdzenia 2 i otrzymać liczby $\beta_1, \ldots, \beta_k \geqslant 0$. takie, że
$$-\mathrm{Id} = \beta_1 A + \ldots + \beta_k A^k.$$
Ale ponieważ A ma współczynniki z $\mathbb{R}_+$, to także A^2 ma współczynniki z $\mathbb{R}_+$, i konsekwentnie A^n ma współczynniki z $\mathbb{R}_+$ dla dowolnego n. Mamy sprzeczność, gdyż macierz po lewej stronie powyższej równości ma współczynniki na przekątnej silnie ujemne, a macierz po prawej stronie, jako suma macierzy o współczynnikach nieujemnych, ma także współczynniki nieujemne. □

Literatura

[1] Ilia Erenburg, *Burzliwe życie Lejzorka Rojtszwańca,* Warszawa, Czytelnik, 1988.

[2] Władysław Sierpiński, *Sur la valeur asymptotique d'une certaine sommme,* Bull Intl. Acad. Polonmaise des Sci. et des Lettres (Cracovie) (1910) series A, pp. 9–11.