Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej *Algebraiczne Mocarstwo*, sierpień 2006.

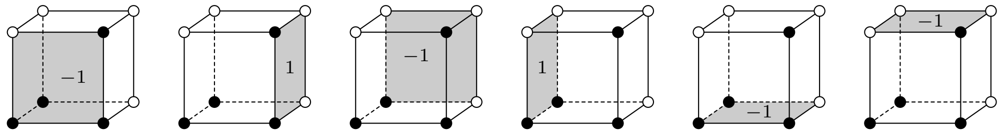
Numerowanie sześcianu

Wojciech GUZICKI, Warszawa

Uczestnicy zawodów II stopnia XLV Olimpiady Matematycznej (było to 26 lutego 1994 r.) musieli zmierzyć się z następującym zadaniem:

Zadanie 4. Każdemu wierzchołkowi sześcianu przyporządkowano liczbę 1 lub -1, a każdej ścianie — iloczyn liczb przyporządkowanych wierzchołkom tej ściany. Wyznaczyć zbiór wartości, które może przyjąć suma 14 liczb przyporządkowanych ścianom i wierzchołkom.

Popatrzmy na przykład wyjaśniający, o co chodzi w zadaniu. Wierzchołkom zaczernionym przyporządkowujemy liczbę 1, wierzchołkom oznaczonym kółeczkiem z białym wnętrzem przyporządkowujemy liczbę -1. Wówczas sześciu ścianom przyporządkowujemy liczby pokazane na rysunku:



Zauważmy, że suma liczb przyporządkowanych wierzchołkom wynosi 0, a suma liczb przyporządkowanych ścianom wynosi -2. Zatem suma wszystkich 14 liczb przyporządkowanych ścianom i wierzchołkom wynosi też -2.

Naszkicujemy teraz jeden z najprostszych sposobów rozwiązania (tzw. rozwiązanie wzorcowe). Każdy układ liczb przyporządkowanych wierzchołkom powstaje z układu samych jedynek przez zamianę niektórych jedynek na liczby przeciwne. Popatrzmy, jak zmienia się suma naszych 14 liczb, gdy jedną jedynkę w wierzchołku zastąpimy liczbą przeciwną. Wybrany wierzchołek jest wierzchołkiem trzech ścian. Każdej z tych trzech ścian jest przyporządkowana liczba 1 lub -1. Wystarczy popatrzeć, jak zmienia się suma czterech liczb: liczby przyporządkowanej wybranemu wierzchołkowi i liczb przyporządkowanych trzem sąsiadującym z nim ścianom. Te dane zostały zebrane w następującej tabelce:

Przed zmianą			Po zmianie			
Wierzchołek	Ściany	Suma	Wierzchołek	Ściany	Suma	Różnica
$+1$	$+1, +1, +1$	4	-1	$-1, -1, -1$	-4	-8
$+1$	$+1, +1, -1$	2	-1	$-1, -1, +1$	-2	-4
$+1$	$+1, -1, -1$	0	-1	$-1, +1, +1$	0	0
$+1$	$-1, -1, -1$	-2	-1	$+1, +1, +1$	4	8

W pierwszej kolumnie mamy liczby przyporządkowane wybranemu wierzchołkowi przed zmianą (są one równe 1). W drugiej kolumnie znajdują się liczby przyporządkowane trzem ścianom sąsiadującym z tym wierzchołkiem. Mamy cztery możliwości przyporządkowania liczb tym trzem ścianom: liczba ścian, którym przyporządkowano liczbę -1 może być jedną z liczb 0,1,2,3. W trzeciej kolumnie mamy sumę czterech liczb z pierwszych dwóch kolumn. W czwartej kolumnie mamy liczby przyporządkowane wybranemu wierzchołkowi po zmianie (są one równe -1). Po zmianie jedynki w wybranym wierzchołku na -1 wszystkie liczby przyporządkowane tym trzem ścianom również zmienią się na przeciwne. Te liczby znajdują się w piątej kolumnie. W szóstej kolumnie znajduje się suma liczb z czwartej i piątej kolumny, a w siódmej mamy różnicę liczb z trzeciej i szóstej kolumny. To jest właśnie różnica między naszymi sumami 14 liczb wynikająca ze zmiany liczby w jednym wierzchołku. Tabelka pokazuje, że suma wszystkich 14 liczb zmienia się o wielokrotność liczby 4. Początkowy układ samych jedynek daje sumę równą 14. Stąd wynika, że jedynymi dopuszczalnymi sumami są liczby: 14, 10, 6, 2, -2, -6, -10, -14.

Nietrudno zauważyć, że sumy 10 i -14 są niemożliwe do uzyskania. Suma -14 musiałaby powstać z samych liczb -1. Ale jeśli w każdym wierzchołku umieścimy liczbę -1, to każdej ścianie przyporządkujemy liczbę 1 i suma wszystkich liczb będzie równa -2. Suma 10 musiałaby powstać z dwunastu jedynek i dwóch liczb -1. Mamy zatem dwie możliwości: w jednym lub w dwóch wierzchołkach umieszczamy liczbę -1. Można łatwo zauważyć, że w pierwszym przypadku trzem ścianom przyporządkowujemy liczbę -1 (co daje sumę 6), a w drugim co najmniej jednej ścianie (takich ścian będzie nawet więcej: 2, 4 lub 6 w zależności od rozmieszczenia tych dwóch wierzchołków) przyporządkujemy -1 (i znów suma będzie różna od 10). Nietrudno też pokazać przykłady przyporządkowań dających pozostałe sumy; takie przyporządkowania pokażemy w dalszym ciągu.

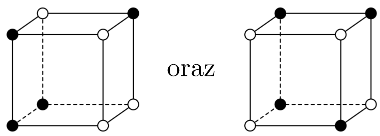
Mamy więc odpowiedź: poszukiwanym zbiorem wartości jest zbiór liczb

$$14, 6, 2, -2, -6, -10.$$

Inne sposoby rozwiązania

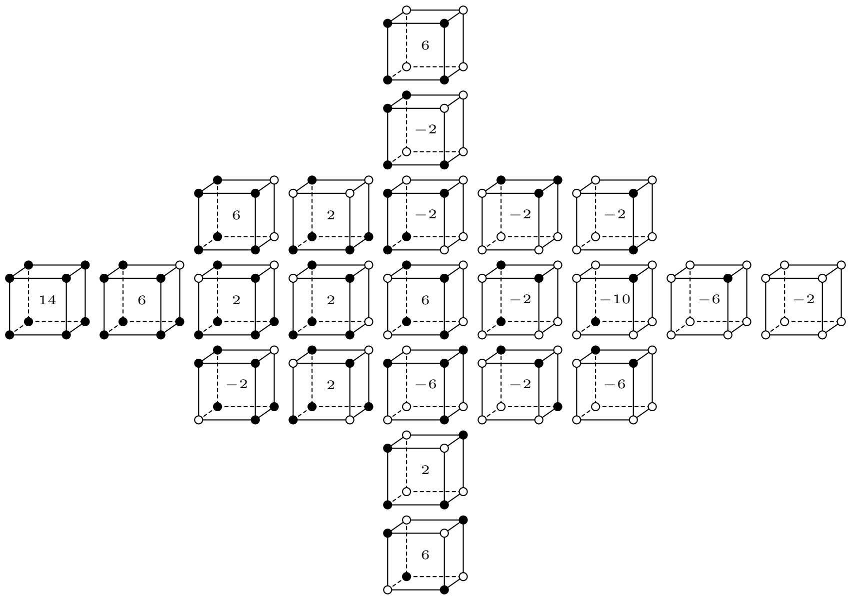
Sposób 1. Można przeanalizować po kolei wszystkie sposoby rozmieszczenia liczb $+1$ i -1 w wierzchołkach sześcianu. Istnieje wtedy 256 przypadków. Przy założeniu że przeanalizowanie każdego z tych przypadków zajmie ok. 1 minuty, rozwiązanie zadania zajmie ok. 4 godz. 15 min. Pamiętajmy, że zawodnicy mieli 5 godzin na rozwiązanie trzech zadań. Jeśli więc ktoś pierwszego dnia rozwiązał dwa zadania i przypuszcza, że rozwiązanie jeszcze jednego da mu upragniony awans do finału, to może spróbować…

Sposób 2. Zamiast rozważania wszystkich przypadków możemy ograniczyć się tylko do przypadków **istotnie różnych**, tzn. utożsamić przypadki identyczne. Za identyczne uważamy takie rozmieszczenia liczb $+1$ i -1 w wierzchołkach sześcianu, że jedno z tych rozmieszczeń można otrzymać z drugiego przez odpowiedni obrót (ew. odpowiednią izometrię) sześcianu. Na przykład rozmieszczenia



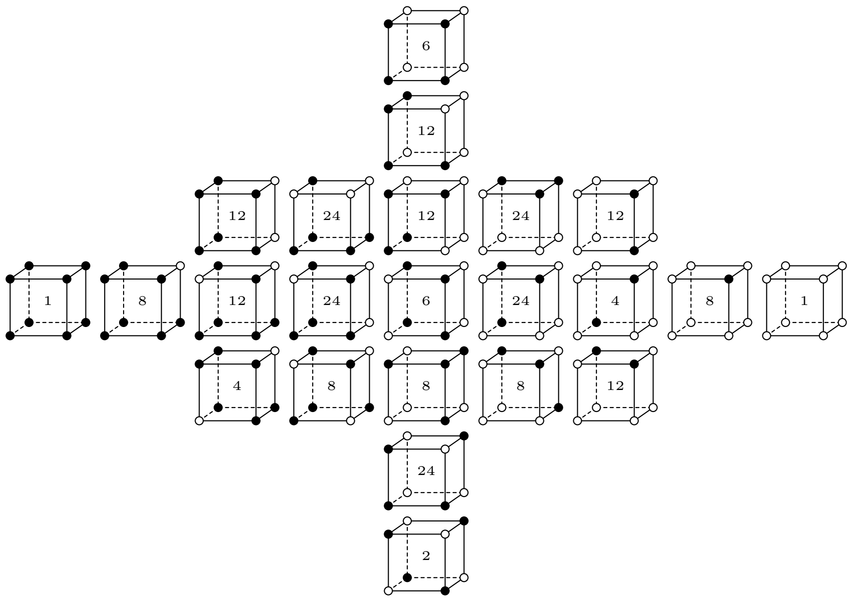
uważamy za identyczne (nadal przyjmujemy umowę, że wierzchołkowi zaczernionemu przyporządkowujemy jedynkę, a wierzchołkowi z białym wnętrzem liczbę -1). Znalezienie odpowiedniego obrotu sześcianu pozostawimy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Okazuje się, że jeśli utożsamiamy takie rozmieszczenia liczb 1 i -1 w wierzchołkach sześcianu, że jedno można otrzymać z drugiego za pomocą obrotu, to istnieją 23 istotnie różne rozmieszczenia. Na poniższym rysunku widzimy je wszystkie (wewnątrz każdego sześcianu została umieszczona liczba będąca sumą rozważanych 14 liczb).



Zauważmy, że w środkowym wierszu znajdują się wszystkie sześciany zapowiedziane w rozwiązaniu wzorcowym. Rysunek ten pokazuje też, że istotnie sumy 10 i -14 są niemożliwe do uzyskania. Jeśli natomiast utożsamimy rozmieszczenia izometryczne, to okaże się, że będą tylko 22 różne rozmieszczenia. Ćwiczeniem dla Czytelnika jest znalezienie na powyższym rysunku dwóch rozmieszczeń utożsamianych przez pewną symetrię płaszczyznową.

W tym sposobie rozwiązania istotnym problemem jest pokazanie, że te 23 przypadki istotnie wyczerpują wszystkie możliwości. Wielu zawodników nie poradziło sobie z tym problemem. Dowody na ogół zawierały luki, a nawet zdarzały się „dowody” pokazujące, że liczba wszystkich przypadków jest różna od 23. Niektórzy zawodnicy obliczali, ile jest różnych rozmieszczeń odpowiadających każdemu z tych 23 przypadków. Po wykazaniu, że otrzymali łącznie 256 rozmieszczeń, wnioskowali, że są to rzeczywiście wszystkie możliwości. Odpowiednie liczby rozmieszczeń w każdym przypadku zostały umieszczone wewnątrz każdego sześcianu na poniższym rysunku:



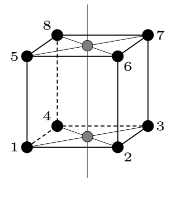
Niestety, niektórzy zawodnicy nie umieli poprawnie obliczyć liczby wszystkich rozmieszczeń w każdym ze znalezionych przypadków, co również czyniło ich rozwiązania niekompletnymi.

Powstaje zatem naturalne pytanie, czy można w jakiś sposób **obliczyć**, ile jest istotnie różnych sposobów rozmieszczenia dwóch liczb w wierzchołkach sześcianu. Inaczej mówiąc, pytamy o to, ile jest geometrycznie odróżnialnych kolorowań wierzchołków sześcianu dwoma kolorami. Oczywiście pojęcie geometrycznej odróżnialności zależy od tego, jakie przyjmiemy utożsamienia, czyli jaką podgrupę grupy izometrii sześcianu będziemy rozpatrywać. Najpierw zajmiemy się grupą obrotów sześcianu, którą teraz opiszemy.

Grupa obrotów sześcianu

Istnieją trzy rodzaje obrotów sześcianu: wokół osi przechodzących przez środki przeciwległych ścian, wokół osi przechodzących przez środki przeciwległych krawędzi oraz wokół osi zawierających przekątne sześcianu. Ostatnim elementem grupy obrotów sześcianu jest oczywiście przekształcenie identycznościowe.

Przyjrzyjmy się najpierw obrotom wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian (zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na następującym rysunku będą to ściany 1234 oraz 5678):



Obroty o 90° i 270° generują następujące permutacje wierzchołków:

$$(1,2,3,4)(5,6,7,8) \quad \text{oraz} \quad (1,4,3,2)(5,8,7,6).$$

Obrót o 180° generuje permutację $(1,3)(2,4)(5,7)(6,8)$.

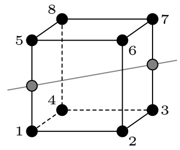
Obroty wokół osi przechodzącej przez środki ścian 1265 i 4378 generują następujące permutacje:

$$(1,2,6,5)(3,7,8,4), \quad (1,6)(2,5)(3,8)(4,7) \quad \text{oraz} \quad (1,5,6,2)(3,4,8,7).$$

Wreszcie obroty wokół osi przechodzącej przez środki ścian 1485 i 2376 generują permutacje:

$$(1,4,8,5)(2,3,7,6), \quad (1,8)(2,7)(3,6)(4,5) \quad \text{oraz} \quad (1,5,8,4)(2,6,7,3).$$

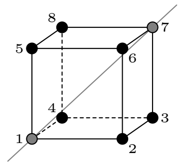
Obrót o 180° wokół osi przechodzącej przez środki krawędzi 15 i 37 generuje permutację $(1,5)(2,8)(3,7)(4,6)$:



Podobnie obroty wokół następnych pięciu osi tej postaci generują następujące permutacje wierzchołków:

$$26-48: (1,7)(2,6)(3,5)(4,8),$$
$$12-78: (1,2)(3,5)(4,6)(7,8),$$
$$34-56: (1,7)(2,8)(3,4)(5,6),$$
$$14-67: (1,4)(2,8)(3,5)(6,7),$$
$$23-58: (1,7)(2,3)(4,6)(5,8).$$

Obroty o 120° i 240° wokół osi przechodzącej przez wierzchołki 1 i 7



generują permutacje wierzchołków:

$$(1)(2,4,5)(3,8,6)(7) \quad \text{oraz} \quad (1)(2,5,4)(3,6,8)(7).$$

Obroty wokół osi zawierających pozostałe przekątne sześcianu generują permutacje

$$2-8: (1,3,6)(2)(4,7,5)(8), \quad (1,6,3)(2)(4,5,7)(8),$$
$$3-5: (1,6,8)(2,7,4)(3)(5), \quad (1,8,6)(2,4,7)(3)(5),$$
$$4-6: (1,3,8)(2,7,5)(4)(6), \quad (1,8,3)(2,5,7)(4)(6).$$

Wreszcie mamy permutację identycznościową $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$.

Permutacje i kolorowania

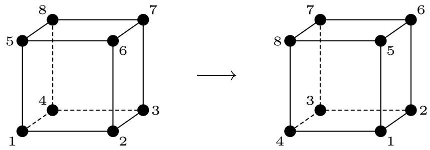
Niech będzie dany zbiór skończony A. Kolorowaniem zbioru A nazwiemy dowolną funkcję

$$c: A \to \{1, \ldots, k\}.$$

Mówimy też wtedy, że elementy zbioru A kolorujemy za pomocą k kolorów (jeśli nawet nie wszystkie kolory zostały użyte). Niech K będzie zbiorem wszystkich kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów. Przypuśćmy następnie, że dana jest pewna grupa G przekształceń zbioru A na siebie (czyli podgrupa grupy wszystkich permutacji zbioru A). Definiujemy działanie permutacji $\pi \in G$ na kolorowania. Zaczniemy od przykładu. Niech A będzie zbiorem wierzchołków sześcianu, ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 8. Mamy zatem

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

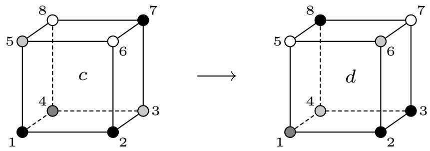
Niech następnie G będzie grupą obrotów sześcianu. Dokładniej, G jest grupą permutacji zbioru A generowanych przez obroty sześcianu. Niech następnie zbiór $\{1,2,3,4\}$ będzie zbiorem kolorów; możemy np. przyjąć umowę, że 1 oznacza kolor biały, 2 oznacza kolor czarny, 3 zielony i 4 czerwony. Rozważmy permutację π generowaną przez następujący obrót sześcianu:



Wówczas $\pi = (1,2,3,4)(5,6,7,8)$. Niech następnie kolorowanie $c : A \to \{1,2,3,4\}$ będzie określone w następujący sposób:

$$c(1) = 2,\ c(2) = 2,\ c(3) = 4,\ c(4) = 3,\ c(5) = 4,\ c(6) = 1,\ c(7) = 2,\ c(8) = 1.$$

Wreszcie niech $d : A \to \{1,2,3,4\}$ będzie kolorowaniem powstającym z kolorowania c „zgodnie z obrotem π”:



Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
d(1) &= 3 = c(4) = c(\pi^{-1}(1)),\\
d(2) &= 2 = c(1) = c(\pi^{-1}(2)),\\
d(3) &= 2 = c(2) = c(\pi^{-1}(3)),\\
d(4) &= 4 = c(3) = c(\pi^{-1}(4)),\\
d(5) &= 1 = c(8) = c(\pi^{-1}(5)),\\
d(6) &= 4 = c(5) = c(\pi^{-1}(6)),\\
d(7) &= 1 = c(6) = c(\pi^{-1}(7)),\\
d(8) &= 2 = c(7) = c(\pi^{-1}(8)).
\end{aligned}$$

Możemy teraz przyjąć definicję ogólną.

Działanie grupy G na kolorowania

Definiujemy teraz grupę G^* przekształceń zbioru K. Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ definiujemy przekształcenie

$$\pi^* : K \to K$$

wzorem $\pi^*(c) = c \circ \pi^{-1}$. Wreszcie przyjmujemy

$$G^* = \{\pi^* :\ \pi \in G\}.$$

Ćwiczenie. Jeśli $k \geq 2$, $\pi, \sigma \in G$ oraz $\pi \neq \sigma$, to $\pi^* \neq \sigma^*$. W szczególności $|G^*| = |G|$.

Dwa kolorowania c i d uważamy za identyczne (nierozróżnialne ze względu na grupę G), jeśli istnieje permutacja $\pi \in G$ taka, że

$$d = \pi^*(c).$$

Naszym celem jest wyznaczenie liczby kolorowań rozróżnialnych (nieidentycznych) ze względu na grupę G.

Orbita i stabilizator

Definicja. Jeśli G jest pewną grupą permutacji zbioru A oraz $a \in A$, to **orbitą** elementu a (ze względu na grupę G) nazywamy zbiór

$$O(a) = \{\pi(a) :\ \pi \in G\}.$$

Zatem naszym celem jest wyznaczenie liczby orbit grupy G^* w zbiorze K.

Definicja. Niech G będzie pewną grupą permutacji zbioru A i niech $a \in A$. Wówczas **stabilizatorem** elementu a nazywamy zbiór

$$S(a) = \{\pi \in G :\ \pi(a) = a\}.$$

Nietrudno zauważyć, że stabilizator elementu a jest podgrupą grupy G. Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. Dla każdego elementu a zbioru A zachodzi równość

$$|S(a)| \cdot |O(a)| = |G|.$$

Dowód. Niech $O(a) = \{b_1, \ldots, b_r\}$. Wybieramy takie przekształcenia $\pi_1, \ldots, \pi_r \in G$, by

$$\pi_1(a) = b_1, \ldots, \pi_r(a) = b_r.$$

Niech $P = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$. Oczywiście $|P| = |O(a)|$. Pokażemy, że każde przekształcenie $\pi \in G$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $\pi = \sigma \circ \rho$, gdzie $\sigma \in P$ oraz $\rho \in S(a)$. To oczywiście zakończy dowód.

Niech więc $\pi \in G$. Niech następnie $\pi(a) = b_s$, gdzie $1 \leq s \leq r$. Zatem $\pi(a) = \pi_s(a)$. Przyjmijmy

$$\sigma = \pi_s, \quad \rho = \pi_s^{-1} \circ \pi.$$

Oczywiście

$$\sigma \circ \rho = \pi_s \circ (\pi_s^{-1} \circ \pi) = \pi.$$

Ponadto $\sigma = \pi_s \in P$. Pokażemy, że $\rho \in S(a)$. Mianowicie

$$\rho(a) = (\pi_s^{-1} \circ \pi)(a) = \pi_s^{-1}(\pi(a)) = \pi_s^{-1}(\pi_s(a)) = a.$$

To dowodzi, że przekształcenie π może być przedstawione w żądanej postaci.

Przypuśćmy teraz, że

$$\pi_s \circ \rho = \pi_t \circ \tau,$$

gdzie $1 \leq s, t \leq r$ oraz $\rho, \tau \in S(a)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
(\pi_s \circ \rho)(a) &= (\pi_t \circ \tau)(a), \\
\pi_s(\rho(a)) &= \pi_t(\tau(a)), \\
\pi_s(a) &= \pi_t(a), \\
b_s &= b_t, \\
s &= t.
\end{aligned}$$

Zatem $\pi_s = \pi_t$, skąd oczywiście wynika, że $\rho = \tau$, co kończy dowód lematu.

Definicja. Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A i niech $\pi \in G$. Wtedy **charakterem** przekształcenia π nazywamy liczbę tych $a \in A$, dla których $\pi(a) = a$:

$$\chi(\pi) = |\{a \in A : \ \pi(a) = a\}.$$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie. (Lemat Burnside'a) Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A. Wtedy liczba orbit w zbiorze A (ze względu na grupę G) jest równa

$$t(G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Dowód. Będziemy zliczać na dwa sposoby liczbę elementów zbioru

$$X = \{(\pi, a) \in G \times A : \ \pi(a) = a\}.$$

Dla każdego $\pi \in G$ istnieje $\chi(\pi)$ takich $a \in A$, dla których $\pi(a) = a$, czyli $(\pi, a) \in X$. Zatem

$$|X| = \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Z drugiej strony, dla każdego $a \in A$ istnieje $|S(a)|$ takich przekształceń π, dla których $\pi(a) = a$, czyli $(\pi, a) \in X$. Zatem

$$|X| = \sum_{a \in A} |S(a)|.$$

Z poprzedniego lematu wynika, że

$$|X| = \sum_{a \in A} \frac{|G|}{|O(a)|} = |G| \cdot \sum_{a \in A} \frac{1}{|O(a)|}.$$

Przypuśćmy teraz, że zbiór A został rozbity na $r = t(G)$ orbit i niech $b_1, \ldots, b_r$ będą reprezentantami tych orbit. Wówczas

$$\sum_{a\in A} \frac{1}{|O(a)|} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{a\in O(b_j)} \frac{1}{|O(a)|} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{a\in O(b_j)} \frac{1}{|O(b_j)|} =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{|O(b_j)|} \cdot \sum_{a\in O(b_j)} 1 \right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{|O(b_j)|} \cdot |O(b_j)| \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} 1 = r = t(G).$$

Zatem

$$|X| = |G| \cdot t(G),$$

czyli

$$|G| \cdot t(G) = \sum_{\pi\in G} \chi(\pi),$$

skąd natychmiast wynika teza lematu Burnside'a.

Przypuśćmy teraz, że dany jest zbiór A i pewna grupa G przekształceń zbioru A. Rozważamy zbiór K kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów i grupę G^* przekształceń zbioru K. Wówczas liczba orbit grupy G^* jest równa

$$t(G^*) = \frac{1}{|G^*|} \cdot \sum_{\sigma\in G^*} \chi(\sigma) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi\in G} \chi(\pi^*).$$

Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ chcemy obliczyć $\chi(\pi^*)$. Przypuśćmy zatem, że $c \in K$. Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

$$\pi^*(c) = c,$$
$$c \circ \pi^{-1} = c,$$
$$c = c \circ \pi,$$
$$\forall a \in A \; \big(c(\pi(a)) = c(a)\big).$$

Ostatni warunek jest równoważny temu, że wszystkie elementy tego samego cyklu (w rozkładzie permutacji π na cykle) są pokolorowane tym samym kolorem. Zatem, jeśli $z(\pi)$ oznacza liczbę cykli permutacji π, to

$$\chi(\pi^*) = k^{z(\pi)}.$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$t(G^*) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi\in G} k^{z(\pi)}.$$

Liczba kolorowań sześcianu

Przypomnijmy, że grupa obrotów sześcianu składa się z następujących 24 permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:

(1,2,3,4)(5,6,7,8), (1,3)(2,4)(5,7)(6,8), (1,4,3,2)(5,8,7,6),
(1,2,6,5)(3,7,8,4), (1,6)(2,5)(3,8)(4,7), (1,5,6,2)(3,4,8,7)
(1,4,8,5)(2,3,7,6), (1,8)(2,7)(3,6)(4,5), (1,5,8,4)(2,6,7,3),
(1,5)(2,8)(3,7)(4,6),
(1,7)(2,6)(3,5)(4,8),
(1,2)(3,5)(4,6)(7,8),
(1,7)(2,8)(3,4)(5,6),
(1,4)(2,8)(3,5)(6,7),
(1,7)(2,3)(4,6)(5,8),
(1)(2,4,5)(3,8,6)(7), (1)(2,5,4)(3,6,8)(7),
(1,3,6)(2)(4,7,5)(8), (1,6,3)(2)(4,5,7)(8),
(1,6,8)(2,7,4)(3)(5), (1,8,6)(2,4,7)(3)(5),
(1,3,8)(2,7,5)(4)(6), (1,8,3)(2,5,7)(4)(6),
(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8).

Mamy zatem jedną permutację mającą 8 cykli, 17 permutacji mających 4 cykle i 6 permutacji mających 2 cykle. Stąd wynika, że liczba istotnie różnych kolorowań sześcianu (tzn. rozróżnialnych ze względu na grupę obrotów) za pomocą m kolorów jest równa

$$\frac{1}{24} \cdot (m^8 + 17m^4 + 6m^2).$$

Dla $m = 2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{24} \cdot (2^8 + 17 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2) = \frac{1}{24} \cdot (256 + 272 + 24) = \frac{552}{24} = 23$$

kolorowania. To dowodzi, że kolorowania pokazane na początku wykładu były istotnie wszystkimi geometrycznie odróżnialnymi kolorowaniami sześcianu za pomocą dwóch kolorów.

W podobny sposób obliczamy, że dla $m = 3$ istnieją 333 kolorowania i dla $m = 4$ istnieje 2916 kolorowań.

Grupa izometrii sześcianu składa się z 48 przekształceń. Są to wymienione wyżej obroty oraz złożenia tych obrotów z jedną ustaloną symetrią płaszczyznową (np. generującą permutację $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$). Dostajemy w ten sposób 24 nowe permutacje:

(1,6,3,8)(2,7,4,5), (1,7)(2,8)(3,5)(4,6), (1,8,3,6)(2,5,4,7),
(1)(2,5)(3,8)(4)(6)(7), (1,2)(3,4)(5,6)(7,8), (1,6)(2)(3)(4,7)(5)(8),
(1)(2)(3,6)(4,5)(7)(8), (1,4)(2,3)(5,8)(6,7), (1,8)(2,7)(3)(4)(5)(6),
(1)(2,4)(3)(5)(6,8)(7),
(1,3)(2)(4)(5,7)(6)(8),
(1,3,8,6)(2,4,7,5),
(1,6,8,3)(2,5,7,4),
(1,3,6,8)(2,7,5,4),
(1,8,6,3)(2,4,5,7),
(1,2,3,7,8,5)(4,6), (1,4,3,7,6,5)(2,8),
(1,4,8,7,6,2)(3,5), (1,7)(2,3,4,8,5,6),
(1,5,6,7,3,4)(2,8), (1,5,8,7,3,2)(4,6),
(1,2,6,7,8,4)(3,5), (1,7)(2,6,5,8,4,3),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8).

Mamy więc łącznie jedną permutację mającą 8 cykli, 6 permutacji mających 6 cykli, 21 permutacji mających 4 cykle i 20 permutacji mających 2 cykle. Liczba istotnie różnych kolorowań sześcianu (rozróżnialnych ze względu na całą grupę izometrii) za pomocą m kolorów jest więc równa

$$\frac{1}{48} \cdot (m^8 + 6m^6 + 21m^4 + 20m^2).$$

Dla $m = 2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{48} \cdot (2^8 + 6 \cdot 2^6 + 21 \cdot 2^4 + 20 \cdot 2^2) = \frac{1}{48} \cdot (256 + 384 + 336 + 80) = \frac{1056}{48} = 22$$

kolorowania.

W podobny sposób obliczamy, że dla $m = 3$ istnieje 267 kolorowań i dla $m = 4$ istnieje 1996 kolorowań.

Zliczanie orbit za pomocą indeksu cyklowego

(Polya, de Bruijn)

Pokażemy teraz ogólniejszą metodę zliczania orbit, której autorem jest G. Polya. Niech π będzie permutacją zbioru n-elementowego A. Liczbę cykli długości i permutacji π oznaczamy symbolem $\lambda_i(\pi)$. Oczywiście

$$\lambda(\pi) = \lambda_1(\pi) + \ldots + \lambda_n(\pi).$$

Niech G będzie pewną grupą permutacji zbioru A. **Indeksem cyklowym** grupy G nazywamy wielomian

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in G} x_1^{\lambda_1(\pi)} x_2^{\lambda_2(\pi)} \ldots x_n^{\lambda_n(\pi)}.$$

Bez dowodu podamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. (Polya – 1937, de Bruijn – 1959, 1964; a także w innej postaci Redfield – 1927)

Niech A będzie zbiorem n-elementowym i niech G będzie pewną grupą permutacji zbioru A. Niech K będzie zbiorem kolorowań zbioru A za pomocą m kolorów. Niech wreszcie wielomian

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

będzie indeksem cyklowym grupy G. Wtedy liczba kolorowań zbioru A rozróżnialnych ze względu na grupę G jest równa

$$P_G(m, m, \ldots, m).$$

Następnie liczba kolorowań (rozróżnialnych ze względu na grupę G), w których kolor 1 występuje k_1 razy, kolor 2 występuje k_2 razy itd. (przy czym oczywiście zachodzi równość $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), jest równa współczynnikowi przy $w_1^{k_1} w_2^{k_2} \ldots w_m^{k_m}$ w wielomianie

$$W(w_1, w_2, \ldots, w_m) = P_G\left(\sum_{i=1}^{m} w_i, \sum_{i=1}^{m} w_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^{m} w_i^n\right).$$

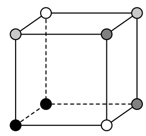
Wielomian $W(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ powstaje zatem z indeksu cyklowego $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ grupy G przez podstawienie:

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 + w_2 + \ldots + w_m, \\ x_2 &= w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_m^2, \\ \ldots & \quad \ldots \\ x_n &= w_1^n + w_2^n + \ldots + w_m^n. \end{aligned}$$

Powyższe twierdzenie zastosujemy do rozwiązania następującego zadania.

Zadanie. Na ile sposobów (rozróżnialnych ze względu na grupę obrotów lub grupę izometrii) można pokolorować wierzchołki sześcianu czterema kolorami, po dwa wierzchołki każdego koloru?

A oto przykład takiego kolorowania:



Nietrudno zauważyć, że indeksem cyklowym grupy obrotów sześcianu jest wielomian

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2).$$

Natomiast indeksem cyklowym całej grupy izometrii sześcianu jest wielomian

$$P_G(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{48}(x_1^8 + 6x_1^4x_2^2 + 8x_1^2x_3^2 + 13x_2^4 + 8x_2x_6 + 12x_4^2).$$

Przystępujemy teraz do rozwiązania zadania.

Przypadek 1. Grupa obrotów sześcianu.

Po dokonaniu podstawienia opisanego w twierdzeniu otrzymamy następujący wielomian $W(w_1, w_2, w_3, w_4)$:

$$W(w_1, w_2, w_3, w_4) =$$

$$= \frac{1}{24}\Big((w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^8 + 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^2(w_1^3 + w_2^3 + w_3^3 + w_4^3)^2 +$$

$$+ 9(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)^4 + 6(w_1^4 + w_2^4 + w_3^4 + w_4^4)^2\Big).$$

Nietrudno zauważyć, że współczynnik przy $w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2$ jest równy:

$$\frac{1}{24}\left(\frac{8!}{(2!)^4}+9\cdot\frac{4!}{(1!)^4}\right)=114.$$

W tym przypadku istnieje zatem 114 istotnie różnych kolorowań.

Przypadek 2. Grupa izometrii sześcianu.

Tym razem otrzymamy następujący wielomian:

$$\begin{aligned}W(w_1,w_2,w_3,w_4)=&\frac{1}{48}\Big((w_1+w_2+w_3+w_4)^8+\\&+6(w_1+w_2+w_3+w_4)^4(w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2)^2+\\&+8(w_1+w_2+w_3+w_4)^2(w_1^3+w_2^3+w_3^3+w_4^3)^2+\\&+8(w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2)(w_1^6+w_2^6+w_3^6+w_4^6)+\\&+13(w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2)^4+12(w_1^4+w_2^4+w_3^4+w_4^4)^2\Big).\end{aligned}$$

Współczynnik stojący przy $w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2$ jest tym razem równy:

$$\frac{1}{48}\left(\frac{8!}{(2!)^4}+6\cdot 6\cdot 2\cdot\frac{4!}{(2!)^2}+13\cdot\frac{4!}{(1!)^4}\right)=68,$$

skąd wynika, że istnieje 68 kolorowań rozróżnialnych za pomocą grupy wszystkich izometrii sześcianu.

Wszystkie kolorowania sześcianu czterema kolorami (po dwa wierzchołki każdego koloru) zostały zebrane na poniższym rysunku. W celu łatwiejszego rozróżnienia tych kolorowań, zostały one pogrupowane w 8 grup i każda grupa otrzymała kod składający się z trzech liczb. Pierwsza liczba oznacza liczbę krawędzi mających końce tego samego koloru. Druga liczba oznacza liczbę przekątnych ścian o końcach tego samego koloru. Wreszcie trzecia liczba oznacza liczbę przekątnych sześcianu o jednakowych końcach. Wewnątrz każdego sześcianu jest podana liczba kolorowań danego typu (tzn. liczba kolorowań, które można otrzymać z danego kolorowania za pomocą obrotów). Na koniec parami obok siebie zostały umieszczone kolorowania symetryczne (tzn. rozróżnialne za pomocą grupy obrotów i nierozróżnialne ze względu na grupę wszystkich izometrii).