Topologia i jej wykłady

Nie trzeba nikomu przypominać, że topologia jest jednym z głównych działów matematyki i trudno sobie wyobrazić wykształcenie matematyka bez elementów topologii. Istnieją różne koncepcje jej wykładania. Najczęściej podstawowy kurs topologii jest kursem topologii ogólnej, a więc: przestrzenie topologiczne, przestrzenie metryczne, odwzorowania ciągłe, aksjomaty oddzielania, zbiory zwarte, spójne itp. Czasem dokłada się jakieś informacje o homotopiach lub innych zagadnieniach nawiązujących do metod algebraicznych, topologii płaszczyzny lub przestrzeni, względnie teorii wymiaru.

Zazwyczaj też takie kursy topologii, jak zresztą wykłady z innych dziedzin matematyki, są bardzo formalne i abstrakcyjne. Jak w specjalistycznych artykułach, liczy się niemal każde słowo i brak miejsca na dłuższe komentarze, uwagi, czy motywacje, nie mówiąc o uwagach historycznych. Obowiązuje zasada, że w jak najmniejszej objętości należy umieścić jak najwięcej treści. Czytelnik, szczególnie ten rozpoczynający studia matematyczne, młody i niedoświadczony, często nie ma możliwości zrozumienia głębszego sensu wprowadzanych pojęć. Nie ma też pojęcia, jakie są korzenie wykładanych teorii, dlaczego właśnie tak a nie inaczej definiuje się obiekty lub formułuje się i dowodzi rozmaite ważne twierdzenia.

Wydaje się, że do przeszłości należą podręczniki, w których autorzy prezentowali nie tylko formalne dowody, ale także solidne uzasadnienia przeprowadzanych rozumowań nie zapominając o historycznych komentarzach.

Pewnym odstępstwem od reguły jest podręcznik Klausa Jänicha *Topologia* wydany przez PWN. Jest to kurs podstawowy wprowadzający początkującego czytelnika w tajniki topologii. We wstępie Autor wyjaśnia, czym jest topologia mnogościowa i krótko przedstawia jej narodziny. Potem następuje już regularny wykład. Rozdział I zawiera pojęcie przestrzeni topologicznej i metrycznej, definiowana jest ciągłość, spójność oraz zwartość. W rozdziale II wprowadzane są wektorowe przestrzenie topologiczne, przestrzenie Hilberta, Banacha i Frécheta oraz podstawowe przykłady. Dalej, w rozdziale III, opisana jest topologia ilorazowa, przestrzenie jednorodne, przestrzenie orbit oraz rozmaite konstrukcje wykorzystujące przestrzenie ilorazowe. Rozdział IV poświęcony jest uzupełnianiu przestrzeni metrycznych. W następnym rozdziale wyłożone są podstawy teorii homotopii. Autor wprowadza pojęcie kategorii i funktora. Wyjaśnia ideę topologii algebraicznej i tłumaczy, do czego przydają się homotopie. W rozdziale VI następuje krótki powrót do topologii mnogościowej i omówione są aksjomaty przeliczalności. Kolejny rozdział znów jest bardziej geometryczny – badane są kompleksy symplicjalne i CW-kompleksy. I znów mamy przeskok do metod mnogościowych. Dowodzony jest lemat Uryshona i twierdzenie Tietzego. Pojawia się parazwartość i rozkład jedynki z informacją o zastosowaniach do badania wiązek wektorowych. Przedostatni rozdział poświęcony jest teorii nakryć i grupie podstawowej, a w ostatnim udowodniono twierdzenie Tichonowa. Jest tam też informacja o lemacie Zorna. Szkoda tylko, że redaktorzy wydania polskiego nie zamieścili informacji, iż lemat ten, nie tylko w literaturze polskiej, nazywany jest często lematem Kuratowskiego–Zorna. Całość zamyka bardzo krótkie – napisane przez Theodora Bröckera – uzupełnienie z teorii mnogości. Autor *Topologii* nie unika komentarzy i chętnie odpowiada na pytanie „po co to jest?". Umieścił też sporo informacji o wynikach bardziej zaawansowanych odsyłając zainteresowanych problemami do odpowiedniej literatury. Na uwagę zasługują oryginalne, sugestywne rysunki działające na wyobraźnię. Książkę Jänicha można polecić jako krótkie i sprawne wprowadzenie w problematykę topologii z zastrzeżeniem jednak, że czytelnik pragnący poznać więcej szczegółów, będzie musiał sięgnąć do bardziej specjalistycznej literatury.

Zupełnie inny charakter mają zaproponowane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego *Wykłady z topologii* Jerzego Mioduszewskiego – książka pod wieloma względami niezwykła. W podtytule zaznaczono, że *Wykłady* poświęcone są topologii przestrzeni euklidesowych, co może oznaczać (i to się potwierdza w trakcie czytania), że będą poruszane trudne i ważne problemy, często tylko sygnalizowane w typowych kursach topologii. Zgodnie z tytułem, każdy z rozdziałów jest wykładem, które układają się w logiczny ciąg ciekawych faktów.

Autor rozpoczyna „nietypowo" od wprowadzenia historycznego. Przypomina, że początków topologii należy się dopatrywać w pracach Eulera poświęconych zadaniu o mostach królewieckich i wzorowi, który dziś nazywany jest wzorem Eulera. Naszkicowany jest dowód wzoru Eulera dla grafów spójnych na płaszczyźnie z zaznaczeniem jego topologicznych aspektów dotyczących rozcinania płaszczyzny. W wykładzie wstępnym jest też dowód twierdzenia o istnieniu pięciu wielościanów foremnych. Następny wykład też rozpoczyna się geometrycznie od aksjomatu Pascha. Autor uzasadnia, że aksjomat ten jest podstawą wszystkich twierdzeń o rozcinaniu płaszczyzny. Pojawia się więc twierdzenie Jordana–Dehna o łamanej zamkniętej oraz uzupełniające je twierdzenie Schoenfliesa dla łamanych. W następnych wykładach twierdzenia te są uogólniane. Mioduszewski często stosuję tę metodę w swojej książce: najpierw formułuje i dowodzi wersję prostszą, by później, po rozwinięciu odpowiedniego aparatu, udowodnić twierdzenie w wersji najogólniejszej. Można by uznać, że jest to niepotrzebna strata czasu. Dzięki takiemu podejściu jednak czytelnik ma szansę poznać różnorodne techniki dowodowe oraz lepiej zrozumieć wzajemne powiązania różnych pojęć i twierdzeń. We wstępie Autor pisze, że wykładając topologię przez wiele lat nie musiał się już obawiać zarzutu o plagiat, pozwalając sobie na plagiat całkowity. Jest chyba trochę kokieterii w tym stwierdzeniu, gdyż wystarczy chociażby przejrzeć tematykę wykładów, by się przekonać, że układ materiału jest oryginalny i głęboko przemyślany. I tak: w wykładzie drugim wprowadzone zostają podstawowe pojęcia i fakty tak zwanej topologii kombinatorycznej – sympleksy, podziały barycentryczne, triangulacje, odwzorowania symplicjalne, dowodzone jest kluczowe twierdzenie o aproksymacji symplicjalnej. Stanowi to przygotowanie do dowodów podstawowych i niełatwych twierdzeń: twierdzenia o niezmienniczości obszaru (w książce twierdzenie o zachowaniu otwartości) – z którego wynika twierdzenie o niehomeomorficzności przestrzeni euklidesowych o różnych wymiarach – i twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Fundamentalnym narzędziem dowodowym jest lemat Spernera. Fakty te zostały umieszczone w wykładzie trzecim, gdzie dyskutowane jest też znaczenie twierdzenia Spernera o zamocowaniu i jego zastosowania. Dalej omawiane są podstawy teorii wymiaru oraz udowodnione jest twierdzenie Mengera–Nöbelinga o zanurzaniu zwartej przestrzeni metrycznej n wymiarowej w $2n+1$ wymiarową przestrzeń euklidesową. Wykład piąty wprowadza czytelnika w elementy teorii homotopii. Omawiane są własności przestrzeni ściągalnych i odwzorowań nieistotnych, czyli homotopijnych ze stałymi. Sformułowany jest lemat Borsuka o przedłużaniu homotopii, twierdzenie o przedłużaniu odwzorowań nieistotnych oraz oryginalne i trochę egzotyczne twierdzenia Holsztyńskiego i Łokuciewskiego. Kolejne dwa wykłady poświęcone są twierdzeniom o rozcinaniu, pojawiają się też klasyczne przykłady: jeziora Wady i naszyjnik Antoine'a. W wykładzie dziewiątym i dziesiątym konstruowana jest grupa podstawowa i opisane są jej najważniejsze własności. Wyliczona jest grupa podstawowa okręgu, a zastosowana metoda zostaje wykorzystana do dowodu podstawowego twierdzenia algebry i nieistnienia retrakcji wstęgi Möbiusa na brzeg. Pojawiają się nakrycia i twierdzenia o podnoszeniu dróg i homotopii, ich zastosowania oraz przykład przestrzeni o nieabelowej grupie podstawowej. W dalszym ciągu wyznaczona jest grupa podstawowa płaszczyzny rzutowej, udowodnione są też twierdzenia: Borsuka–Ulama o antypodach, Lusternika–Sznirelmana i słynne twierdzenie o kanapce. Przedostatni wykład zawiera twierdzenia Janiszewskiego o rozcinaniu płaszczyzny z dowodem Eilenberga, a całość kończy się uogólnieniami twierdzenia o antypodach i jego zastosowaniami.

Z tego, dość pobieżnego przeglądu widać, że *Wykłady* nie są raczej przeznaczone dla czytelnika rozpoczynającego studiowanie topologii. Wymagają już pewnej wiedzy z zakresu podstaw topologii (Autor zaznacza we wstępie, że zostały opracowane na bazie wykładów dla doktorantów). Można jednak przypuszczać, że zainteresowany i ambitny czytelnik wiele z nich skorzysta. Na uwagę zasługują liczne komentarze i dygresje nie tylko o charakterze historycznym. Do niemal każdego twierdzenia podane jest odniesienie do prac oryginalnych, gdzie twierdzenie to było udowodnione po raz pierwszy. Autor imponuje nie tylko wiedzą merytoryczną, ale także historyczną.

Większość podręczników pisana jest językiem beznamiętnym. Inaczej jest w przypadku *Wykładów*, gdzie możemy zauważyć, jak Wykładowca delektuje się przedstawianymi rozumowaniami – jedne wyraźnie preferuje, inne, konieczne, uznaje na przykład za triki rachunkowe. Ta fascynacja prezentowaną tematyką udziela się czytelnikowi.

Na końcu, dla ułatwienia orientacji w tekście, umieszczony jest spis używanych symboli, a także, co jest już bardzo rzadkie, wykaz twierdzeń ułożonych w kolejności pojawiania się na wykładach. Jest też wykaz nazw i spis autorów twierdzeń, prac i podręczników cytowanych w tekście. Nie ma spisu literatury, gdyż ta podawana jest na bieżąco w wykładach i przypisach, co gwarantuje, że czytelnik łatwiej będzie kojarzył omawiane problemy z odpowiednimi pracami lub książkami.

Należy jeszcze dodać, że w 2003 roku ukazała się druga część *Wykładów z topologii* poświecona różnym aspektom pojęcia spójności. Napisana jest w podobnej konwencji jak część pierwsza i jest istotnym rozszerzeniem tejże. Jest to kolejna uczta dla chcących poznać własności zbiorów o różnym stopniu niespójności i kontinuów.

Wydaje się, że byłoby dobrze, gdyby zamierzający pisać podręcznik z topologii lub planujący wykładać ten przedmiot zapoznał się z *Wykładami z topologii* Mioduszewskiego. Można podpatrzeć nie tylko sposoby dowodzenia rozmaitych faktów, lecz także, jak robić to interesująco.

Klaus Jänich, *Topologia*, PWN Warszawa 1991, 96, 98. Tłumaczenie Dorota Czarnocka-Cieciura, Grzegorz Cieciura

Jerzy Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1994

Jerzy Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Zbiory spójne o kontinua*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2003

Zdzisław POGODA