Jest to skrócony zapis odczytu wygłoszonego na XXXVI Szkole Marematyki Poglądowej *Pomysł czy rachunek?*, Grzegorzewice, styczeń 2006.

Czy można nauczyć pomysłowości

Małgorzata MIKOŁAJCZYK, Wrocław

Rachunek sumienia

Na zdrowy rozsądek wydaje się, że pomysłowości nauczyć nie można, z takim darem trzeba się urodzić, ale z drugiej strony pomysłowości uczyć nie trzeba, bo ten dar wcale nie jest wyjątkowy — posiada go niemal każde dziecko. Małe dzieci są z natury niezmiernie ciekawe świata i bezgranicznie pomysłowe w badaniu go (co nierzadko jest powodem utrapienia ich rodziców). Dlaczego więc tak mało mamy w szkole uczniów pomysłowych (tzn. umiejących pomyśleć)? Odpowiedź jest tyleż prosta, co alarmująca: wina tkwi w samym procesie nauczania (a w znacznej mierze w procesie nauczania matematyki). W miarę zaawansowania edukacyjnego dzieci stopniowo i bezpowrotnie tracą swoją pomysłowość (i tylko nieliczne jednostki są na tyle silne, by się przed tym zgubnym wpływem tzw. oświaty skutecznie obronić). Zjawisko to można łatwo wytłumaczyć znanym prawem przyrody: organ nieużywany zanika lub przystosowuje się do nowych funkcji. Tak dzieje się też z gotowością do używania mózgu w celu pomyślenia (tzn. szukania pomysłu).

Matematyki uczymy głównie poprzez rozwiązywanie problemów. Przyjrzyjmy się więc, w rozwiązywaniu jakich problemów trenowani są uczniowie, jakich czynności intelektualnych wymaga się od nich w tym procesie. Niezależnie od etapu edukacji matematycznej (od szkoły podstawowej po wyższą) w większości zadań powtarza się następujący schemat postępowania: rozpoznanie problemu (na co jest to zadanie? z jakiego algorytmu należy skorzystać? do jakiego wzoru podstawić dane?) oraz wykonanie rachunków. Zadania takie nie pozostawiają miejsca na poszukiwanie pomysłu. Bardzo dobrym (choć niechlubnym) przykładem jest tu większość szkolnych zadań z geometrii, które w ogóle nie kształcą wyobraźni geometrycznej, a jedynie umiejętność sprawnego obliczania pól, obwodów czy objętości. A oto jeszcze kilka przykładów zaczerpniętych ze skryptów do matematyki dla kierunków przyrodniczych.

Zadanie 1. Całkując przez części, oblicz całkę:
a) $\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$, b) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sin x\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 2. Całkując przez podstawienie, oblicz całkę:
a) $\displaystyle\int \frac{\sin x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, b) $\int x^2\sin(x^3+1)\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenie Lagrange'a, uzasadnij nierówność:
a) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x-y|$ dla $x,y\in\mathbb{R}$, b) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \ge |x-y|$ dla $x,y\in(-\pi/2,\pi/2)$, c) $\displaystyle\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right| \le 1$ dla $x\ne y$.

Zadanie 4. Korzystając z reguły de l'Hospitala, oblicz granice:
a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{1-\cos x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{2x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$.

Wspólną cechą tych zadań jest to, że najważniejsza część rozwiązania (pomysł!) jest podany w treści zadania. Student nie musi „wpaść" na to, jaką metodą obliczyć całkę, czy i z jakiego twierdzenia skorzystać. Ma to podane „na tacy". Pozostają mu do wykonania jedynie schematyczne i raczej nudne rachunki (bo cóż ciekawego może być w tym, że całka z arkusa sinusa to akurat $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$?), więc motywacja do ich przeprowadzenia jest niewielka.

Takie zadania lubią i studenci, i wykładowcy (jednym łatwo jest opanować materiał, drugim – odpytać z zadowalającym efektem). Od zadań w podobnym stylu roi się w wielu podręcznikach, ale ich skutki bywają opłakane. Po kilku latach takiego nauczania nabyta reakcja ucznia na zadanie jest taka: czyta treść, rozpoznaje schemat i wykonuje rachunki. A jeśli schematu nie rozpozna, pojawia się instrukcja stopu. Uczniowi nie przychodzi nawet na myśl, że jeśli od razu nie wie, jak zrobić zadanie, to może pomyśleć i wpaść na pomysł, jak sobie z nim poradzić. Takiego postępowania nikt od niego nie wymagał i nikt go tego nie nauczył.

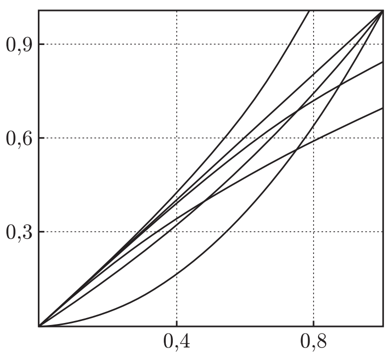
Postanowienie poprawy

Na szczęście w podręcznikach nie ma aż tak złych zadań, żeby nie dało się ich skutecznie poprawić. Przyjrzyjmy się na kilku przykładach, co zrobić, aby w tradycyjnych zadaniach znalazło się miejsce na pomysł/pomyślenie.

Zadanie 5. Uporządkuj funkcje ze względu na wartość pochodnej w punkcie $x = 0$.
a) x, b) $\sin x$, c) $\operatorname{tg} x$, d) $\ln(x+1)$, e) x^2, f) $2^x - 1$.

Zadanie to wymaga jedynie przeprowadzenia wskazanych w treści rachunków. Można jednak sformułować je inaczej.

Zadanie 5′. Rysunek 1 przedstawia wykresy funkcji $x, \sin x, \operatorname{tg} x, \ln(x+1), x^2$ i $2^x - 1$. Jak rozpoznać, która jest która?



Rys. 1

Tym razem treść nie wskazuje, jakie czynności uczeń ma wykonać, nie ukierunkowuje go na żadną własność funkcji, może on próbować różnych sposobów (np. analizować wypukłość wykresów), samodzielnie musi wpaść na pomysł, że funkcje różnią się stromością w zerze, a za tę własność odpowiada pochodna.

Zadanie 6. Przyjmując, że rok ma 365 dni, a średni promień orbity Ziemi wokół Słońca to 150 mln km, oblicz, z jaką prędkością porusza się Ziemia w ruchu wokół Słońca.

Czyżby autor zadania przypuszczał, że uczeń gimnazjum nie wie, jak długo trwa rok? Nie sądzę. Po prostu chciał w treści zawrzeć informację, że taka dana jest potrzebna do rozwiązania tego zadania. Uczniowi pozostawił więc rozpoznanie schematu (wzór na prędkość w ruchu jednostajnym i na obwód koła) oraz rachunki. Lepiej by było, gdyby uczeń mógł bez niczyjej podpowiedzi wymyślić, jakie dane będą potrzebne do znalezienia odpowiedzi. Poprawione zadanie mogłoby wyglądać tak:

Zadanie 6′. Z jaką prędkością porusza się Ziemia w ruchu wokół Słońca?

W treści nie podano danych oczywistych lub łatwo sprawdzalnych, więc uczeń musi samodzielnie zadecydować, jakie wielkości będą potrzebne do rozwiązania zadania. Nie jest też narzucony żaden schemat rozwiązania. Pytanie postawione jest nieprecyzyjnie, co dopuszcza różne jego interpretacje, konieczne jest przyjęcie dodatkowych założeń (modelowanie zjawiska). Uruchamia się tzw. uczenie mimowolne, kiedy uczeń mimochodem uczy się więcej, niż zakładał nauczyciel (szukając długości promienia orbity Ziemi, może dowiedzieć się, że jest ona elipsą, może odległość Ziemia-Słońce uśrednić, a orbitę potraktować jako okrąg lub znaleźć i zastosować wzór na długość elipsy). Wyniki otrzymane różnymi sposobami można porównać i ocenić zasadność przyjętych uproszczeń. Dodatkowo zauważmy, że postawione pytanie nie jest problemem abstrakcyjnym, a uzyskana odpowiedź poszerza wiedzę ucznia o otaczającej go rzeczywistości. Przez to staje się dlań ciekawa, a w ślad za tym rośnie jego motywacja do przeprowadzenia rachunków (intuicja może tu być zawodna – niewielu uczniów wie od razu, czy Ziemia porusza się tak wolno, jak wskazówki zegarka, czy w zawrotnym tempie – wszak „krajobraz” nie miga nam przed oczami, nie czujemy też szumu w uszach, jak to jest podczas jazdy z dużymi prędkościami).

Lista grzechów głównych

Spróbujmy zebrać cechy, jakie powinno mieć zadanie otwarte na pomysł/pomyślenie, i wady, których należy się w takich zadaniach wystrzegać. Istnieje na to kilka prostych recept.

- Sposób rozwiązania nie jest zalgorytmizowany, nie jest podany w treści zadania.
- Treść zadania geometrycznego nie zawiera rysunku.
- Zadanie dopuszcza wiele wyników, rozmaite sposoby rozwiązywania, uruchamia różne strategie myślenia oraz uczenie mimowolne.
- W treści nie podano danych oczywistych lub łatwo sprawdzalnych.

- Treść celowo zawiera rozmaite błędy (w szczególności zadane pytanie może nie mieć sensu).
- Pojawia się konieczność przyjęcia dodatkowych założeń (modelowania problemu). Wynik zadania jest ciekawy dla ucznia, niesie nowe informacje o rzeczywistości.
- Treść zadania zachęca do stawiania dalszych pytań, wskazuje ich kierunek.
- W rozwiązaniu preferowane jest szacowanie zamiast obliczania, wyniki przybliżone zamiast dokładnych rachunków.
- W rozwiązaniu preferowana jest intuicja zamiast formalizmu, metody numeryczne zamiast teoretycznych.

Zadośćuczynienie

Mam nadzieję, że poniższe przykłady przekonują o tym, że rozwiązując tylko trochę inaczej sformułowane zadania, można uczyć i wymagać zupełnie innych postaw intelektualnych, pozostawiając swobodę samodzielnych uczniowskich pomysłów.

Zadanie 7. I kto to mówi?
a) Jestem liczbą trzycyfrową, której każda następna cyfra jest o 1 większa od poprzedniej.
b) Jestem najmniejszą/największą liczbą o sumie cyfr 12.
c) Jestem najmniejszą/największą liczbą czterocyfrową zapisaną w systemie arabskim/rzymskim.

W przykładzie a) pytanie jest niejednoznaczne, dopuszcza wiele możliwych odpowiedzi. Dzięki temu daje pretekst do dalszych pytań, np.:
- Która z takich liczb jest największa/najmniejsza?
- Ile ich jest?
- Jak jest dla liczb n-cyfrowych?

Ostatnie z tych pytań dla dużych n przestaje mieć sens, więc pojawia się dalsze pytanie, ilucyfrowe liczby można rozpatrywać. Taki celowy błąd pojawia się też w przykładzie b). Uczeń musi odkryć, że nie ma największej liczby o podanej własności, i umieć uzasadnić tę tezę. Przykład c) sprawdza rozumienie pojęcia liczby n-cyfrowej. Chociaż mowa tu o prostych własnościach liczb, nie ma gotowego schematu postępowania, trzeba... pomyśleć. W przypadku poszukiwania największej liczby uczniowie początkowo mogą przelicytowywać swoje odpowiedzi, ale w końcu pojawi się konieczność uzasadnienia, że któryś z podanych wyników nie da się już poprawić.

Zadanie 8. Ile przekątnych ma graniastosłup/ostrosłup prawidłowy o podstawie pięciokąta?

Znowu błąd w zadaniu? Dlaczego w podręcznikach starannie unika się pytań o coś, co nie istnieje? To są bardzo kształcące pytania. Nie chodzi przecież o to, aby uczeń nie umiał podać odpowiedzi, ale by rozumiał, że żaden obiekt nie spełnia żądanych własności i umiał tę tezę uzasadnić. Podręczniki preferują zadania z jednoznaczną odpowiedzią, jednak znacznie ciekawsze poznawczo są sytuacje, gdy warunki zadania są sprzeczne lub zbyt szerokie, aby określić jeden wynik. Z takimi przypadkami uczeń spotyka się po raz pierwszy dopiero przy rozwiązywaniu sprzecznych i nieokreślonych układów równań, a mógłby obcować z nimi częściej i w znacznie ciekawszych zadaniach.

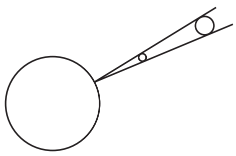
Zadanie 9. Dzień 5 IV przypada w tym roku w środę. Na jakie dni przypadają daty: 22 IV, 10 V, 12 III, 31 IV, 15 VII?

To kolejne zadanie z celowo ukrytym błędem, tym razem innego typu. Nie ma przecież 31 IV, jednak dzień tygodnia odpowiadający tej dacie można wyliczyć. Uczniowie nie lubią dawać się łapać w takie pułapki. Po kilku takich wpadkach zaczynają starannie czytać i analizować treści zadań, nie wykonują rachunków bezmyślnie.

Oczywiście powyższe uwagi nie dotyczą zadań sprawdzających wiedzę ucznia. Te akurat powinny być precyzyjne i jednoznaczne. Paradoksalnie jednak w zestawach egzaminacyjnych takie niejasne zadania, choć nie są zamierzone, dość często się zdarzają. Może więc nieudolnych autorów zadań egzaminacyjnych zachęcić do pisania podręczników?

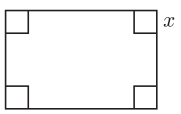
Ciekawym pomysłem na ukrycie różnego rodzaju błędów są zadania mające formę spreparowanej klasówki lub czyjejś wypowiedzi. Uczeń ma postawić się w roli nauczyciela i znaleźć popełnione w nich błędy. Uruchamia to nietypowe strategie myślenia. Inaczej wszak postępujemy, obliczając sumę kilku liczb, a inaczej, gdy chcemy wykryć w rachunku błąd (zamiast obliczania można wynik oszacować, sprawdzić jego parzystość itp.). To pomaga uczniowi także na prawdziwej klasówce, gdy na koniec może spojrzeć krytycznie na własną pracę. Z kolei wyłapywanie błędów w rozmaitych definicjach i twierdzeniach jest okazją do budowania kontrprzykładów i uczy precyzyjnego formułowania swoich sądów (dobrym materiałem mogą tu być definicje wielościanu albo funkcji okresowej podawane w różnych podręcznikach – w większości błędnie).

Zadanie 10. Jaki przedmiot umieszczony na orbicie geostacjonarnej mógłby spowodować całkowite zaćmienie Słońca?


Rys. 2

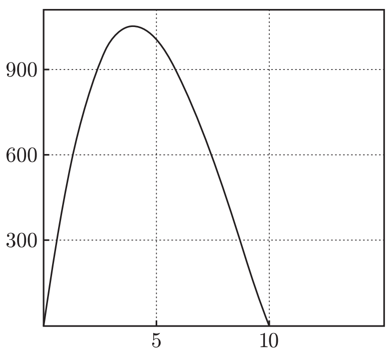
W zadaniu nie podano żadnych danych, zatem nie narzucono żadnego schematu postępowania, co ważniejsze nie opatrzono treści rysunkiem, który stanowi w tym przypadku główny pomysł rozwiązania (rys. 2). Brak precyzji w sformułowaniu zadania prowadzi do konieczności stworzenia modelu, przyjęcia dodatkowych założeń. Rozwiązanie dopuszcza wiele metod podejścia, a więc i wiele wyników. Kluczem jest tu podobieństwo trójkątów, ale uczeń musi sam na to wpaść i wymyślić, jakie dane będą mu potrzebne. To z kolei zależy od obranego sposobu rozwiązania (poza promieniem orbity geostacjonarnej jednym przyda się odległość Ziemia-Słońce i promień Słońca, innym jego rozmiary kątowe i długość przedramienia). Wynik zadania jest dla ucznia na tyle ciekawy (intuicja nie podpowiada, czy wystarczy zgubić w kosmosie telewizor, ciężarówkę, czy też obiekt rozmiarów kosmicznych), że motywuje go do przeprowadzenia rachunków do końca. Ciekawe może być też porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami i dyskusja o efektywności i skuteczności tych metod.

Zadanie 11. Jakie największe pudełko można wykonać z kartki brystolu formatu A4?



Rys. 3

Treść jest na tyle nieprecyzyjna, że po jej przeczytaniu pytania nasuwają się same: co to jest pudełko? czy ma pokrywkę? co to znaczy największe? jak je wykonać? ile właściwie mamy papieru? Zadanie to jest często spotykane w podręcznikach licealnych, ale zazwyczaj towarzyszy mu kluczowy dla rozwiązania rysunek (rys. 3). Do rozwiązania zadania wcale nie jest potrzebne stosowanie pochodnych, wystarczy znajomość wzoru na objętość prostopadłościanu (a więc można je rozwiązać już w szkole podstawowej). W zależności od głębokości nacięcia x możemy zapisać objętość pudełka jako $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$ – przyjmujemy tu przybliżone rozmiary formatu A4, choć można zrobić to dokładnie (czy warto?) i porównać końcowe odpowiedzi. Teraz wystarczy obejrzeć wyniki otrzymane dla różnych x (najwygodniej zrobić to w arkuszu kalkulacyjnym i zaznaczyć je w układzie współrzędnych – rys. 4). Sprawdzenie (z dowolną dokładnością), gdzie wypada wartość maksymalna, nie powinno sprawić nikomu problemu. Dodatkową zaletą takiego rozwiązania jest uruchomienie uczenia mimowolnego – uczeń ma okazję przekonać się, że ekstremum nie musi wypadać symetrycznie pomiędzy miejscami zerowymi, co ma miejsce dla paraboli i co wielu uczniów automatycznie przenosi na inne funkcje.



Rys. 4

Zadanie 12. Jaki największy wigwam można zrobić z koła skór o promieniu R?

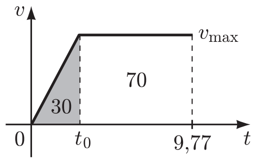
I znów seria pytań: co to jest wigwam? co to znaczy największy? jak obliczyć jego objętość? od czego ją uzależnić? (można tu mieć co najmniej kilka pomysłów prowadzących do różnego stopnia trudności rachunków i do różnych wyników, co daje świetny materiał do dyskusji i porównań).

Zadanie 13. Co by było, gdyby nagle stopił się cały lód Antarktydy?

Pytanie postawione jest tak nieprecyzyjnie, że mamy miejsce na różne pomysły: to podniósłby się poziom wód w oceanach, to zmniejszyłoby się zasolenie oceanów itp. Jakie dane trzeba mieć, by obliczyć, o ile? (np. lądy stanowią 30% powierzchni globu, średnia pokrywa lodowa Antarktydy ma 2 km). Przed przystąpieniem do rozwiązania konieczne jest przyjęcie założeń pozwalających na matematyczne wymodelowanie problemu, a samo rozwiązanie preferuje szacowanie zamiast dokładnych obliczeń oraz metody numeryczne zamiast teoretycznych. Zagadnienie jest na tyle ciekawe, że uczniowie chętnie do końca wykonają rachunki.

Zadanie 14. Jaka jest największa prędkość, jaką może osiągnąć człowiek? Czy może on zapłacić mandat za przekroczenie szybkości na obszarze zabudowanym?

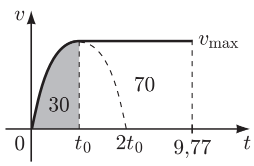
Co właściwie wiemy o tym zadaniu? Rekord świata na 100 m wynosi obecnie 9,77 s, można więc sądzić, że maksymalna prędkość, jaką osiągnął człowiek, to $\frac{100}{9{,}77} = 10{,}24$ m/s, czyli nieco mniej niż 37 km/h. Ale czy to właściwa odpowiedź? Przecież zawodnicy nie biegną ruchem jednostajnym, muszą się najpierw rozpędzić. Na początku biegną wolniej, więc aby „zmieścić się” w podanym czasie, pod koniec dystansu ich prędkość musi być większa. Załóżmy, że przez pierwsze 30 m zawodnicy rozpędzają się, a potem biegną ze stałą prędkością. Model ten ilustruje rys. 5. Ale gdzie zaznaczyć na nim te 30 m? Oczywiście jest to pole pod rosnącą częścią wykresu. Otrzymujemy zatem układ równań:



Rys. 5

$$\begin{cases} \frac{1}{2} t_0 v_{\max}, \\ (9{,}77 - t_0) v_{\max} = 70, \end{cases}$$

skąd wychodzi $v_{\max} \approx 13{,}31$ m/s, czyli prawie 48 km/h, a to radykalnie więcej niż poprzednio. Jednak i ten model biegu jest mało realistyczny, na starcie bowiem przyspieszenie jest największe, a dochodząc do swojej maksymalnej prędkości zawodnik już w ogóle nie przyspiesza, zatem tempo wzrostu prędkości (czyli stromość wykresu) powinno maleć, a przejście do funkcji stałej powinno być gładkie. Model spełniający te wymagania ilustruje rys. 6. Czy teraz maksymalna prędkość powinna być większa, czy mniejsza niż poprzednio? Jeśli przyjąć, że krzywa jest łukiem paraboli o wierzchołku w punkcie $(t_0, v_{\max})$, to prędkość tę można łatwo obliczyć, mamy bowiem: $v(t_0) = v_{\max}$, czyli $at_0(t_0 - 2t_0) = -at_0^2 = v_{\max}$, skąd $a = -\frac{v_{\max}}{t_0^2}$ oraz analogiczny do poprzedniego układ równań:



Rys. 6

$$\begin{cases} \int\limits_0^{t_0} at(t - 2t_0)\,\mathrm{d}t = 30, \\ (9{,}77 - t_0) v_{\max} = 70, \end{cases}$$

z którego $v_{\max} \approx 11{,}77$ m/s, czyli ponad 42 km/h.
A gdyby dodatkowo uwzględnić czas reakcji zawodnika np. 0,12 s? Co jeszcze można wziąć pod uwagę?

Ku przestrodze

Jako swoisty antymorał do tego moralitetu niech posłuży autentyczna historia z zajęć prowadzonych z nauczycielami na studium podyplomowym w ramach przedmiotu *Konstruowanie zadań.* Oto oryginalne zadanie z podręcznika oraz efekt jego „poprawienia” przez jednego z uważnych uczestników tych zajęć.

Zadanie 15. Małe zwierzęta są często bardzo silne. Ślimak winniczek ważący tylko 15 g potrafi ciągnąć za sobą ciężar, który waży 200 razy więcej niż on sam. Chrząszcz rohatyniec nosorożec waży zaledwie 3 g, a może udźwignąć ciężar 850 razy większy. Które z tych zwierząt potrafi uciągnąć większy ciężar? O ile większy?

Zadanie 15′. Musisz rozładować samochód z towarem, który waży 2 tony. Kogo poprosisz o pomoc: ślimaka winniczka czy chrząszcza rohatyńca nosorożca?

Czasem majstrowanie przy typowych zadaniach może okazać się bardziej niebezpieczne niż one same.