Artykuł powstał na podstawie odczytu pod tym samym tytułem, wygłoszonego podczas XXXVI Szkoły Matematyki Poglądowej *Pomysł czy rachunek?* w Grzegorzewicach, styczeń 2006.

Bajki kombinatoryczne

Joanna JASZUŃSKA, Warszawa

Jak udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}k!\cdot\prod_{i=1}^{n-k}(2i-1)\right)+\binom{2n}{n}n! = 3^n\cdot\prod_{i=1}^{n}(2i-1),$$

nie gubiąc się w gąszczu obliczeń?

Czy wyrażenia

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$

nie dałoby się jakoś uprościć?

W matematyce pojawiają się liczne problemy tego typu, istnieje też szereg metod radzenia sobie z nimi. Przydatne bywają żmudne rachunki, tradycyjna indukcja, wnioski z obserwacji trójkąta Pascala, korzystanie ze znanych już tożsamości, jak również metody mniej bezpośrednie. Do tych ostatnich zaliczać można takie, które wymagają pozornego skomplikowania problemu, na przykład poprzez wprowadzenie sprytnie dobranego wielomianu lub pomysłowe opowiedzenie pewnej bajki. Jak się okazuje, trafnie wymyślona historyjka może prowadzić do rozwiązania nie tylko bardzo krótkiego, ale też eleganckiego i wydobywającego kombinatoryczne znaczenie zawiłych wzorów. Kilkanaście takich właśnie bajek pragnę tu zaprezentować (problemy postawione na początku rozwiążemy w przykładach 10 i 7).

Dowodzenie równości metodą bajek kombinatorycznych składa się z trzech podstawowych etapów:

a) opowiedzenie bajki,
b) stwierdzenie, co konkretnie chcemy policzyć,
c) policzenie tego dwoma różnymi sposobami (z których jeden prowadzi do lewej strony żądanej tożsamości, a drugi — do prawej), na przykład w różnej kolejności.

Prześledźmy to krok po kroku.

Przykład 1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

a) Spośród n dzieci k ma iść do kina.
b) Na ile sposobów możemy wybrać tę grupkę?
c) Możemy wskazać dzieci, które idą do kina (na $\binom{n}{k}$ sposobów) lub możemy — równie dobrze — wskazać dzieci, które do kina nie idą (na $\binom{n}{n-k}$ sposobów). ■

Przykład 2. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

Zapiszmy powyższą tożsamość w postaci $(k+1)\binom{n+1}{k+1}=(n+1)\binom{n}{k}$ i policzmy, na ile sposobów z grupy $n+1$ osób możemy wybrać $k+1$, z których jedna będzie szefem. Po lewej stronie najpierw wybieramy ekipę, potem z niej wyłaniamy szefa. Po prawej zaś najpierw typujemy szefa, potem dobieramy mu resztę ekipy. ■

Przykład 3. Udowodnić, że $((n!)^k\cdot k!)|(kn)!$

W kolejce w stołówce szkolnej stoi kn dzieci, które będą siedzieć przy k stolikach n-osobowych. Nie jest istotne, kto siedzi przy którym stoliku, ani kto na którym konkretnie miejscu, natomiast jest ważne, kto siedzi z kim przy stole. Na ile sposobów mogą usiąść?

Istnieje $(kn)!$ różnych ustawień kolejki. Załóżmy, że pierwszych k dzieci siada przy pierwszym stoliku, następnych k przy drugim i tak dalej. Ponieważ nie interesują nas permutacje w ramach stolików ani numery stolików, więc dla danej kolejki takie samo usadzenie otrzymamy na $(n!)^k\cdot k!$ sposobów.

Wobec tego różnych usadzeń jest

$$\frac{(kn)!}{(n!)^k \cdot k!},$$

więc ta liczba jest naturalna, co kończy dowód. ∎

Zadanie 1. Wykazać, że $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Przykład 4.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Spośród n dzieci z pewnej klasy część idzie wieczorem do kina (być może 0 lub n). Na ile sposobów można wybrać tę grupkę?

Lewa strona: Zastanówmy się najpierw, ile osób pójdzie do kina. Następnie wybierzmy te osoby spośród wszystkich n.

Prawa strona: Spytajmy po kolei każde z n dzieci, czy idzie do kina. ∎

Niektóre tożsamości dość łatwo modyfikować i rozbudowywać, otrzymując z nich kolejne. Przykładowo w powyższej bajce, jeśli ktoś z zainteresowanych kupi wcześniej bilety, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

jeśli ponadto ktoś inny zbierze na nie pieniądze, to mamy

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

i tak dalej.

Zadanie 2. Jaką tożsamość otrzymamy w przypadku, gdy możliwe jest, aby ta sama osoba zbierała pieniądze i kupowała bilety?

Przykład 5. Z powyższego przykładu można też uzyskać szereg tożsamości dla bajki o dwóch klasach, A i B, które wspólnie wybierają się do kina. Załóżmy, że w każdej jest n uczniów, a do kina wybiera się połowa z całej grupy $2n$ osób. Jeśli z klasy A idzie k uczniów, a z klasy B pozostałych $n-k$, to korzystając z przykładu 1 otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$ ∎

Tu również możemy komplikować bajkę: jeśli ktoś z zainteresowanych z klasy A kupi wszystkim bilety, to

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1},$$

a jeśli ktoś z klasy B zbierze od wszystkich pieniądze, to

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-2}$$

i tak dalej.

Przykład 6. Jeszcze inną tożsamość otrzymamy rozważając, czy wśród $k+1$ osób wybierających się do kina jest wychowawca klasy:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$ ∎

Przykład 7.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 3^n$$

Na zebranie rodziców od każdego z n dzieci przychodzi matka, ojciec albo nie pojawia się nikt. Ile różnych wariantów zebrania może się odbyć?

Lewa strona: Niech k oznacza liczbę rodziców obecnych na zebraniu ($0 \leq k \leq n$), czyli liczbę reprezentowanych uczniów – wtedy na 2^k sposobów decydujemy, które z rodziców przychodzi.

Środek: Niech dodatkowo i oznacza liczbę obecnych na zebraniu matek (wtedy $k - i$ to liczba ojców). Wybieramy matki, a następnie spośród ojców pozostałych uczniów wybieramy resztę uczestników zebrania.

Prawa strona: Każde dziecko na trzy sposoby decyduje, czy i kto będzie je reprezentował na zebraniu. ∎

Przykład 8.

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n!\cdot\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

Tym razem załóżmy, że w klasie jest $2n$ dzieci. Wychowawczyni chce usadzić je w ławkach, wskazując każdemu dziecku, z kim siedzi i w której ławce. Pozostawia uczniom decyzję, kto z nich siądzie po lewej, a kto po prawej stronie.

L: Wybiera spośród wszystkich $2n$ dzieci dwójkę i wskazuje im pierwszą z brzegu ławkę, następnie z pozostałych $2n - 2$ dzieci wybiera kolejną dwójkę do drugiej z kolei ławki i tak dalej, aż wreszcie z końcowej czwórki wskazuje dwoje do przedostatniej ławki, a pozostałych dwoje będzie siedzieć w ostatniej ławce.

Ś: Ustawia uczniów w szeregu i przydziela kolejnym parom ławki, w ramach ławki uczniowie siadają na 2 sposoby.

P: Wyczytuje według listy. Pierwsze dziecko wybiera, z kim chce siedzieć w ławce, ma do wyboru $2n - 1$ osób. Kolejne wyczytywane dzieci, jeśli jeszcze nie mają pary, wybierają ją sobie kolejno na $2n - 3, 2n - 5, \ldots, 5, 3, 1$ sposoby. Zatem możliwych sposobów dobrania w pary jest

$$(\star) \qquad (2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1 = \prod_{i=1}^{n}(2i-1).$$

Następnie na $n!$ sposobów przydziela n parom ławki. ∎

Tożsamość podobną do części **Ś=P** powyższego przykładu możemy też udowodnić inaczej.

Przykład 9.

$$\binom{2n}{n}\cdot n! = 2^n\cdot\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

Na lekcji WF tych samych $2n$ dzieci ściga się w parach. Nauczyciel chce zanotować wyniki — kto z kim biegł i kto w każdej parze wygrał. Nie interesuje go kolejność wyścigów. Ile różnych zestawów rezultatów może zanotować?

L: Może najpierw spisać nazwiska tych n dzieci, które wygrały — ma $\binom{2n}{n}$ możliwości. Następnie, mając już listę wygranych, może przy każdym dopisać nazwisko osoby, która z nim przegrała — robi to na $n!$ sposobów.

P: Może najpierw zapisać pary (wiemy, że jest ($\star$) sposobów dobrania ich, bez ustalania kolejności), a następnie w każdej parze podkreślić nazwisko osoby, która wygrała (2^n możliwości). ∎

Przykład 10.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}k!\cdot\prod_{i=1}^{n-k}(2i-1)\right) + \binom{2n}{n}n! = 3^n\cdot\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

Załóżmy teraz, że mamy tę samą bajkę, co w poprzednim przykładzie, ale możliwe są remisy.

L: Jeśli nie było remisów, to już wiemy, że jest $\binom{2n}{n}n!$ możliwych zestawów wyników. Jeśli były remisy, to niech k oznacza liczbę biegów rozstrzygniętych, $k \leq n - 1$. Spośród wszystkich $2n$ uczniów trener spisuje tych $2k$, którzy nie zremisowali, następnie na tej liście podkreśla tych k, którzy wygrali ze swoimi partnerami, a na koniec przy każdym wygranym zaznacza, z kim się ścigał spośród k przegranych (na $k!$ sposobów). Potem notuje, kto z kim biegł wśród $2n-2k$ graczy, którzy zremisowali — jak już wiemy z ($\star$), możliwości jest $\prod_{i=1}^{n-k}(2i-1)$.

P: Tak jak w poprzednim przykładzie: dobieramy uczniów w pary, dla każdej pary mamy 3 możliwe rezultaty wyścigu. ■

Czasem warto, opowiadając prostą bajkę, pozornie bardzo ją komplikować. Można, jak w poniższym przykładzie, jednocześnie porządkować elementy pewnego zbioru (u nas — uczniów) i wyróżniać konkretny element.

Przykład 11.

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

P: Spośród $n+1$ osób (n uczniów + wychowawca) wybieramy $k+1$ osób.

L: Uczniowie są uporządkowani według listy, wychowawca ma numer 0. Ustalamy największy numer i dobieramy resztę ekipy. Dla ustalonego maksymalnego m mamy $k \le m \le n$ oraz $\binom{m}{k}$ możliwości wyboru. ■

Następujące zadanie z Olimpiady Matematycznej to nieco trudniejszy przykład sumowania po pomysłowo wybranym elemencie.

Przykład 12. Rozważamy wszystkie r-elementowe podzbiory zbioru $\{1,\ldots,n\}$ dla ustalonego $0<r\le n$. W każdym podzbiorze wybieramy najmniejszą liczbę. Wykazać, że średnia arytmetyczna tych liczb jest równa $\frac{n+1}{r+1}$.

Wszystkich r-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego jest $\binom{n}{r}$. Wystarczy zatem obliczyć sumę S wyróżnionych liczb. Oznaczmy przez l_i liczbę zbiorów, w których element i jest najmniejszy. Wtedy $S=\sum_i i\cdot l_i$.

Obliczmy l_i: spośród $n-i$ elementów większych od i trzeba wybrać wszystkie pozostałe elementy podzbioru, czyli $r-1$ liczb. Zatem $l_i=\binom{n-i}{r-1}$. Stąd

$$S=\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-i}{r-1}.$$

Zinterpretujmy tę liczbę inaczej, opowiadając nową bajkę. Spośród $n+1$ liczb $0,1,\ldots,n$ wybieramy podzbiór złożony z $r+1\ge 2$ liczb. Uporządkujmy wszystkie takie podzbiory według drugiej co do wielkości wartości. Dla ustalonego i mamy wtedy i możliwości wybrania najmniejszej liczby (bo od 0 do $i-1$) oraz $\binom{n-i}{r-1}$ możliwości wybrania pozostałych $r+1-2$ większych od i elementów zbioru.

Wobec tego wszystkich naszych podzbiorów jest

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-i}{r-1}=S.$$

Jednocześnie oczywiście jest ich $\binom{n+1}{r+1}$, zatem $S=\binom{n+1}{r+1}$.

Szukana średnia arytmetyczna jest więc, na mocy przykładu 2, równa

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1},$$

czego należało dowieść. ■

Oto jeszcze inny przykład zliczania po odpowiednio wybranym elemencie.

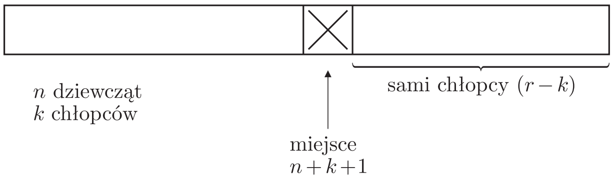
Przykład 13.

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$$

Powróćmy do dzieci w szkole, które tym razem przygotowują układ baletowy na zbliżający się wielki bal. W długim szeregu tańczyć będzie r chłopców i $n+1$ dziewcząt. Panią choreograf interesuje wyłącznie to, na których miejscach będą tańczyć chłopcy, a na których dziewczęta — w ramach jednej płci nie rozróżnia ona dzieci.

P: Oczywiście miejsca dla chłopców może wskazać na $\binom{n+r+1}{r}$ sposobów.

L: Może też postąpić inaczej: wskazać numer miejsca, na którym tańczyć będzie ostatnia, licząc od początku szeregu, dziewczynka (dalej będą już tylko chłopcy). Załóżmy, że przed tą dziewczynką pojawia się w szeregu k spośród wszystkich chłopców (pozostałych $r-k$ stanowi „końcówkę").



Wtedy ostatnia z dziewcząt tańczy na miejscu o numerze $(n+1)+k$. Spośród wcześniejszych $n+k$ miejsc możemy na $\binom{n+k}{k}$ sposobów wskazać te, na których tańczą chłopcy i w ten sposób mamy już jednoznacznie wyznaczone całe ustawienie. Stąd wszystkich ustawień jest $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$. ■

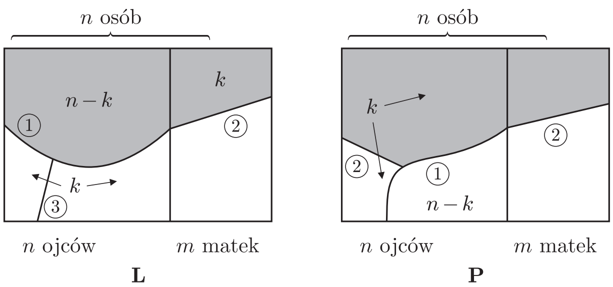
Następujące dwa przykłady pokazują, że czasami kluczowa okazuje się kolejność, w jakiej wprowadza się określony podział zbioru.

Przykład 14.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+k}{n}$$

Przed balem odbywa się kolejne zebranie rodziców, na którym obecnych jest m matek i n ojców. Wychowawczyni znacząco sugeruje, że przydałoby się akurat n osób do organizacji balu.

L: Zgłasza się tyle właśnie osób, ale niekoniecznie są to sami ojcowie. W takim wypadku wychowawczyni prosi pozostałych ojców o pomoc przy pilnowaniu porządku podczas balu i niektórzy z nich się zgadzają.



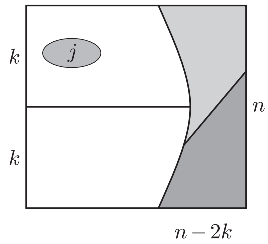
P: Najpierw zgłaszają się wszyscy ojcowie skłonni w jakikolwiek sposób pomagać (jest ich k), następnie spośród nich oraz zawsze chętnych do pomocy matek wychowawczyni wybiera n osób, które pomogą przed balem. Pozostali chętni do pracy ojcowie będą pilnować porządku. ■

Przykład 15.

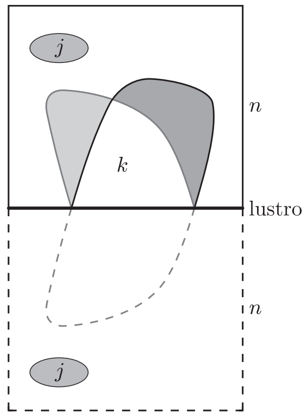
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{k}{j} 2^{n-2k} = \binom{n}{j}\binom{2n-2j}{n}$$

Tym razem n baletnic przygotowuje skomplikowany układ taneczny na bal.

L: Pani choreograf wybiera $2k$ spośród nich do tańczenia w dwóch rzędach, wskazuje k do pierwszego rzędu oraz j z drugiego, które będą mieć indywidualne role. Każdej z pozostałych $n-2k$ dziewcząt przydziela miejsce po lewej lub po prawej stronie sceny.



L



P

P: Baletnice ćwiczą w sali z wielkim lustrem na całą ścianę. Na początek pani choreograf wybiera tych j dziewcząt, które będą mieć indywidualne role. Następnie przygląda się każdej z pozostałych dwukrotnie — osobno baletnicy, osobno jej lustrzanemu odbiciu. Spośród tych $2n - 2j$ niezależnych postaci wskazuje n.

Zauważmy, że dziewcząt, które zostały wskazane dwukrotnie (zarówno osobiście, jak i w lustrze) jest tyle samo, co dziewcząt, które nie zostały wskazane wcale (bo już mają indywidualne role lub bo nie przypadły pani choreograf do gustu), bowiem w sumie wskazano tyle samo postaci, ile jest wszystkich baletnic (n). Jeśli zatem dziewczęta wskazane dwukrotnie będą tańczyć w pierwszym rzędzie, a dziewczęta nie wskazane wcale — w drugim, razem z „indywidualistkami”, to rzędy te będą liczyć po tyle samo baletnic. Każda z pozostałych dziewcząt została wskazana na jeden z dwóch sposobów – tylko w lustrze lub tylko osobiście. Zatem taki sposób wyznaczania baletnicom ról prowadzi do tego samego rezultatu, co sposób L. ■

Udowodnijmy na koniec, korzystając z kolejnej bajki o balu, wzór na sumę kwadratów kolejnych liczb.

Przykład 16.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

Do balu pozostało $n + 1$ dni, łącznie z dzisiejszym. Baletnice mają do przećwiczenia dwuczęściowy układ. Całodniowa próba generalna ma być ostatnią, wcześniej trzeba zaplanować po jednej próbie każdej z części układu. Te dwie wcześniejsze próby mogą odbyć się obie jednego dnia (choćby dziś), w takim wypadku ich kolejność jest nieistotna. Na ile sposobów można rozplanować grafik prób?

L: Zaczynamy od ustalenia terminu próby generalnej: niech odbędzie się ona za k dni. Wtedy na każdą z wcześniejszych prób jest do wyboru k terminów (licząc łącznie z dzisiejszym).

P: Decydujemy najpierw, czy na próby potrzebujemy trzech różnych dni, czy tylko dwóch. Jeśli trzech, to wybieramy je na $\binom{n+1}{3}$ sposoby i potem jeszcze na 2 sposoby ustalamy, którą z części układu ćwiczymy na której z pierwszych dwóch prób. A jeśli próby zajmą nam tylko dwa dni, to wybieramy te dni na $\binom{n+1}{2}$ sposoby i już o niczym więcej nie musimy decydować. ■

Zadanie 3 (rozwiązania nie znam, chętnie poznam). Zinterpretować kombinatorycznie inną znaną postać wzoru na sumę kwadratów:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^{n} k = \binom{n+1}{2} \qquad \text{oraz że} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$$

Zadanie 5. Zauważmy, że $\binom{n+1}{2}^2$ to liczba wszystkich prostokątów na szachownicy $n \times n$ o bokach wzdłuż linii podziału kratek.

a) Zinterpretować tak samo liczbę $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

b) Udowodnić kombinatorycznie, że suma pól wszystkich takich prostokątów jest równa $\binom{n+2}{3}^2$.

W powyższych zadaniach o sumie sześcianów raz opowiadamy bajkę o grafiku prób, a raz o prostokątach. W przykładzie 12 również pojawiały się dwie różne historyjki interpretujące to samo wyrażenie. Urok i siła bajek kombinatorycznych polegają między innymi właśnie na wielkiej różnorodności pomysłów i na swobodzie dobierania najwygodniejszej w danym momencie interpretacji. O tym, jak bujną wyobraźnię mają matematycy i jak wiele bajek można wymyślić na jeden temat, świadczyć mogą liczby Catalana.

Ciąg liczb Catalana zadany jest wzorem $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, jego początkowe wyrazy to $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 5, c_5 = 14$. Liczby Catalana spełniają dla $n \geq 2$ warunek $c_n = c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_{n-1}c_1$.

W licznych bajkach interpretujących liczby Catalana występują między innymi: kasjerka wydająca resztę klientom w kolejce do kina, żołnierze w dwuszeregu, najkrótsze drogi w mieście, pasma górskie o ustalonej sumie wysokości gór, wybory z jedną partią stale prowadzącą, triangulacje wielokąta, płaskie drzewa binarne, niekrzyżujące się uściski dłoni rycerzy przy okrągłym stole i wiele, wiele innych. O liczbach Catalana, powyższych bajkach oraz o jeszcze kilkudziesięciu dalszych interpretacjach przeczytać można w książce [1].

Zadania. Udowodnić kombinatorycznie następujące tożsamości:

Zadanie 6.

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Zadanie 7.

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = k^n$$

Zadanie 8. Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Zadanie 9. Tożsamość Vandermonde'a

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

Zadanie 10.

$$\binom{n}{k}\binom{n}{m} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{m+i}\binom{m+i}{k}\binom{k}{i}$$

Zadanie 11.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n$$

Zadanie 12.

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} \cdot k! = n^n$$

Literatura

[1] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, tom II, str. 221, fragment o liczbach Catalana dostępny też na stronie www autora `http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/`

[2] Marta Sved, *Counting and Recounting*, The Mathematical Intelligencer, vol. 5. no. 4, 1983, str. 21-26