Jest to rozszerzony zapis odczytu wygłoszonego na XXXVI Szkole Matematyki Poglądowej, styczeń 2006.

Podziały prostokątów

Michał ADAMASZEK

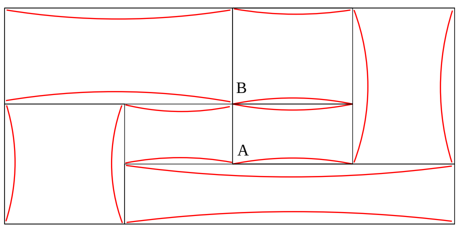
Rzecz będzie o krojeniu prostokątów. Nie całkiem dowolnie, rzecz jasna, ale na mniejsze prostokąty. Dokładniej, *podziałem prostokąta* nazywamy rozbicie na skończenie wiele prostokątów o bokach równoległych do boków początkowego prostokąta. Mówimy, że prostokąt jest typu $a \times b$, jeżeli jego boki mają długości a i b, przy czym wyróżniamy kierunek „poziomy" i „pionowy", czyli zwracamy uwagę na kolejność: prostokąty typu $a \times b$ i $b \times a$ to co innego (dla pedantów: o ile $a \neq b$). Umawiamy się, że pierwsza liczba opisuje długość boku poziomego, a druga pionowego (jak w układzie współrzędnych). Zgadzamy się też dalej na drobne nadużycie, a raczej rozszerzenie pojęcia i symbolu podzielności $x|y$ na przypadek $x, y \in \mathbb{R}_+$ w jedyny sensowny sposób: x dzieli y, jeśli $\frac{y}{x}$ jest liczbą całkowitą.

Najprostsze są podziały na prostokąty tego samego typu. Prostokąt $P = A \times B$ daje się podzielić na prostokąty typu $p = a \times b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a|A$ i $b|B$. Będziemy wówczas pisać w skrócie $p|P$. Ostatecznym naszym celem jest pójście o krok dalej i udowodnienie pewnego stwierdzenia o własnościach podziałów na prostokąty dwóch ustalonych typów. Zaczniemy jednak od dużego skoku i zajmiemy się zupełnie dowolnymi podziałami.

Poniższy lemat de Brujina zajmuje kluczowe miejsce w badaniu podziałów. Udowodnimy go dalej na dwa sposoby. Jeżeli Czytelnik mimo to nie poczuje się przekonany, w artykule [1] znaleźć może aż 14 (!) różnych dowodów.

Twierdzenie (de Brujin, 1969). Prostokąt podzielono na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok całkowitej długości. Wówczas „duży" prostokąt też ma co najmniej jeden bok całkowitej długości.

Dowód 1. (obrazkowo-teoriografowy) Z podziałem zwiążemy graf (lub jak kto woli multigraf, gdyż dopuszczamy wielokrotne krawędzie), który tworzymy następująco. Wierzchołkami grafu są wierzchołki prostokątów podziału. Dla każdego z prostokątów podziału wybieramy *dokładnie jeden* (nawet jeśli są dwa) kierunek wzdłuż którego bok ma długość całkowitą i rysujemy krawędzie wzdłuż boków leżących w tym kierunku. Otrzymujemy coś takiego:



Z każdego z wierzchołków dużego prostokąta wychodzi w naszym grafie jedna krawędź. Z kolei każdy z pozostałych wierzchołków podziału ma stopień 2 lub 4, zależnie od tego, ile prostokątów podziału się w nim schodzi (patrz A i B na rysunku). Wobec tego, rozpoczynając marszrutę po krawędziach grafu z jednego z rogów, dojdziemy do któregoś innego rogu prostokąta (istnieje ścieżka Eulera). To jednak oznacza, że współrzędne tych rogów różnią się o liczby całkowite, gdyż krok wzdłuż każdej krawędzi zmienia każdą współrzędną o liczbę całkowitą (jedną zmienia o długość boku, która jest całkowita bo tak wybraliśmy krawędzie w grafie, a drugą o 0). Na tym koniec dowodu. □

Dowód 2. (analityczny) Na początek oznaczenia: niech $P = A \times B$ będzie umieszczony w układzie współrzędnych z wierzchołkami w $(0,0)$, $(A,0)$, $(0,B)$, (A,B) i niech $p_1, \ldots, p_k$ będą prostokątami podziału, przy czym $p_i = [x_{i1}, x_{i2}] \times [y_{i1}, y_{i2}]$. Założenie nasze możemy więc sformułować następująco: dla każdego $i = 1, \ldots, k$ co najmniej jedna z liczb $x_{i2} - x_{i1}$, $y_{i2} - y_{i1}$ jest całkowita. Dalej jest już prosto: obliczymy następującą, wyciągniętą z kapelusza całkę:

$$\int_0^A \sin(2\pi x)dx \cdot \int_0^B \sin(2\pi y)dy = \int\int_P \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)dxdy =$$
$$= \sum_i \int\int_{p_i} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)dxdy =$$
$$= \sum_i \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \sin(2\pi x)dx \cdot \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} \sin(2\pi y)dy = 0$$

Ostatnia suma jest równa 0, gdyż każdy składnik jest zerem: z założenia wynika bowiem, że któryś z przedziałów całkowania ma długość całkowitą, więc z własności funkcji sinus wnioskujemy, że odpowiednia całka znika. Otrzymujemy zatem, że jedna z całek $\int_0^A \sin(2\pi x)dx$, $\int_0^B \sin(2\pi y)dy$ jest zerowa, a zatem odpowiednia granica całkowania (A lub B) jest liczbą całkowitą, o czym przekonuje nas ponownie rzut oka na wykres funkcji sinus. □

Ten dowód pozostawia niedosyt, bo niby wszystko dobrze, ale skąd magicznie wzięła się ta całka? Częściowe wyjaśnienie tego fenomenu pojawi się później.

Przechodzimy teraz do zapowiedzianych podziałów na prostokąty dwóch typów. Na początek, dla wprawy, nie całkiem dowolnych:

Stwierdzenie. Prostokąt $A \times B$ podzielono na prostokąty, z których każdy jest typu $a \times b$ lub $b \times a$. Wówczas każda z liczb a, b dzieli którąś z liczb A, B.

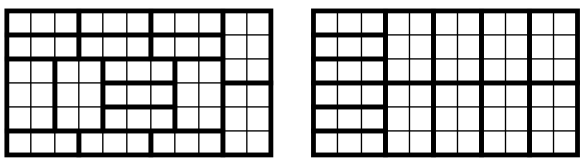
Dowód. Zastosujemy proste przeskalowanie – każdy bok prostokąta skracamy a razy. Dostajemy w ten sposób prostokąt $\frac{A}{a} \times \frac{B}{a}$ podzielony na prostokąty typu $1 \times \frac{b}{a}$ oraz $\frac{b}{a} \times 1$ z których każdy ma w oczywisty sposób co najmniej jeden bok całkowitej długości (równej 1). Z lematu de Brujina wnosimy, że i cały prostokąt $\frac{A}{a} \times \frac{B}{a}$ ma tę własność, czyli $a|A$ lub $a|B$. Dla b rozumowanie jest oczywiście analogiczne. □

Zauważmy, że może się zdarzyć, iż obie liczby a, b dzielą tę samą z liczb A, B, a nie dzielą tej drugiej.

Docieramy wreszcie do obiecanego stwierdzenia o podziałach na prostokąty dwóch typów.

Twierdzenie. Prostokąt $P = A \times B$ podzielono na prostokąty, z których każdy jest typu $R_1 = a_1 \times b_1$ lub $R_2 = a_2 \times b_2$. Wówczas prostokąt P można podzielić na dwa prostokąty P_1 i P_2 (jeden może być pusty) takie, że $R_1|P_1$ i $R_2|P_2$.

Innymi słowy, można podzielić P na dwie części, z których każdą można trywialnie wyparkietować prostokątem tylko jednego z zadanych typów. Oto przykład:



Z lewej strony mamy prostokąt 11×6 podzielony na prostokąty typu 3×1 i 2×3. Z prawej ten sam prostokąt udało się podzielić na dwie części (3×6 i 8×6), z których każdą pokrywamy prostokątami jednego typu.

Zwróćmy uwagę, że teza tego twierdzenia nie mówi np., że prostokąty z oryginalnego podziału można *poprzesuwać* tak, aby dostać podział na dwie trywialnie wyparkietowane części. Nie byłaby to prawda, co widać nawet w powyższym przykładzie.

Pora na dowód, a raczej dowody (ponownie dwa), ostatniego twierdzenia.

Dowód 1. (z przeskalowaniem) Zastosujemy dwukrotnie znaną już technikę:

- przeskalujmy bok poziomy $\frac{1}{a_1}$ razy a pionowy $\frac{1}{b_2}$ razy. Otrzymujemy prostokąt $\frac{A}{a_1} \times \frac{B}{b_2}$ podzielony na prostokąty typu $1 \times \frac{b_1}{b_2}$ oraz $\frac{a_2}{a_1} \times 1$. Na mocy nieśmiertelnego lematu de Brujina $a_1|A$ lub $b_2|B$.
- teraz bok poziomy przeskalujmy $\frac{1}{a_2}$ razy, a pionowy $\frac{1}{b_1}$ razy. Dostajemy prostokąt $\frac{A}{a_2} \times \frac{B}{b_1}$ podzielony na prostokąty typu $\frac{a_1}{a_2} \times 1$ oraz $1 \times \frac{b_2}{b_1}$. Tym razem wnosimy, że $a_2|A$ lub $b_1|B$.

Reasumując, udowodniliśmy prawdziwość zdania:

$$(a_1|A \vee b_2|B) \wedge (a_2|A \vee b_1|B)$$

Ze względu na symetrię zmiennych a i b wystarczy rozpatrzeć następujące dwa przypadki:

- $a_1|A \wedge b_1|B$. Wtedy $R_1|P$, więc cały duży prostokąt da się wyparkietować prostokątami typu $R_1 = a_1 \times b_1$ (bierzemy podział $P_1 = P$, $P_2 = \emptyset$).
- $a_1|A \wedge a_2|A$. Patrząc na pionowy bok prostokąta P widzimy, jest on pokryty pionowymi bokami prostokątów podziału. Jeżeli to pokrycie tworzy m boków długości b_1 i n boków długości b_2, to mamy:

  $$mb_1 + nb_2 = B$$

  Biorąc podział P na $P_1 = A \times mb_1$ i $P_2 = A \times nb_2 = A \times (B - mb_1)$ dostajemy to, co trzeba: oczywiście $R_1 = a_1 \times b_1 | A \times mb_1 = P_1$ i $R_2 = a_2 \times b_2 | A \times nb_2 = P_2$.

□

Dowód 2. (analityczny) Ten dowód, który jest kluczowym punktem programu, będzie samowystarczalny w tym sensie, że nie odwołamy się do lematu de Brujina.

Przyjmijmy oznaczenia jak z dowodu analitycznego lematu de Brujina. Wówczas fakt, że prostokąty p_i stanowią podział prostokąta P, możemy analitycznie wysłowić następująco:

(1) $$\chi_P = \sum_i \chi_{p_i} \text{ p.w.}$$

gdzie χ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru. Nie widać specjalnie, co można wywnioskować z takiego równania. Nieoczekiwanie (?) przekształcimy go obliczając transformatę Fouriera obu stron. Przypomnijmy, że transformata Fouriera to operator $f \mapsto \widehat{f}$ określony dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wzorem:

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i t x} dt$$

Transformatę funkcji charakterystycznej prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych łatwo obliczyć wprost z definicji i rachunek ten pominiemy. Jeżeli $Q = [\alpha, \alpha + a] \times [\beta, \beta + b]$ to:

(2) $$\widehat{\chi_Q}(x, y) = e^{2\pi i(x\alpha + y\beta)} \frac{\sin a\pi x}{\pi x} \frac{\sin b\pi y}{\pi y}$$

przy czym, jak widać, istotny (sinusoidalny) czynnik zależy tylko od długości boków prostokąta (a, b), a nie od jego punktu zaczepienia (α, β) w układzie współrzędnych. To świetnie pasuje do naszej sytuacji, w której mamy dużo prostokątów tego samego typu w różnych miejscach.

Transformata Fouriera lewej strony (1) jest wobec tego równa:

$$\widehat{\chi_P}(x, y) = \frac{\sin A\pi x}{\pi x} \frac{\sin B\pi y}{\pi y}$$

Transformata strony prawej rozpada się z kolei na wyrazy dwóch typów: takie, w których $(a, b) = (a_1, b_1)$ i te, gdzie $(a, b) = (a_2, b_2)$ (oznaczenia jak w (2)). Stąd otrzymamy:

$$\widehat{\sum_i \chi_{p_i}}(x,y) = f(x,y)\frac{\sin a_1\pi x}{\pi x}\frac{\sin b_1\pi y}{\pi y} + g(x,y)\frac{\sin a_2\pi x}{\pi x}\frac{\sin b_2\pi y}{\pi y},$$

gdzie f i g są sumami wyrażeń postaci $e^{2\pi i(xx_{i1}+yy_{i1})}$ dla poszczególnych prostokątów. Ostatecznie:

$$\frac{\sin A\pi x}{\pi x}\frac{\sin B\pi y}{\pi y} = f(x,y)\frac{\sin a_1\pi x}{\pi x}\frac{\sin b_1\pi y}{\pi y} + g(x,y)\frac{\sin a_2\pi x}{\pi x}\frac{\sin b_2\pi y}{\pi y}$$

W tej równości, prawdziwej dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, podstawmy kolejno:

- $(x,y) = (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_2})$. Z prawej strony dostajemy 0, zatem $\sin(\frac{A}{a_1}\pi)\sin(\frac{B}{b_2}\pi) = 0$, co implikuje $a_1|A$ lub $b_2|B$.
- $(x,y) = (\frac{1}{a_2}, \frac{1}{b_1})$. Tym razem dostajemy $a_2|A$ lub $b_1|B$.

Otrzymaliśmy koniunkcję dwóch alternatyw jak w poprzednim dowodzie i powtarzamy końcówkę tamtego rozumowania. □

Teraz rozjaśniła się nieco kwestia pochodzenia tajemniczej całki z sinusów z dowodu analitycznego lematu de Brujina. Sinus nie był tam konieczny – udałoby się z dowolną funkcją okresową o podobnych własnościach. Niemniej jednak miło widzieć, że narzędzia analityczne o tak ugruntowanej pozycji i wydawałoby się dobrze znanym przeznaczeniu jak transformata Fouriera pojawiają się w mniej oczekiwanych zastosowaniach.

Na koniec dodajmy dla porządku, że lemat de Brujina i ostatnie twierdzenie działają dla hiperprostopadłościanów wielowymiarowych, z której to ogólności tutaj zrezygnowaliśmy, bo namnożenie indeksów źle wpływa na przejrzystość. Odpowiednie sformułowania łatwo znaleźć i udowodnić tymi samymi technikami.

Literatura

[1] S. Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 601-617

[2] R.J. Bower, T.S.Michael, When can you tile a box with translates of two given rectangular bricks? *The Electronic Journal of Combinatorics* **11** (2004)

[3] M.N. Kolountzakis, Filling a box with translates of two bricks, *The Electronic Journal of Combinatorics* **11** (2004)