Matematyka w muzyce

Anna ZDANOWICZ, Warszawa

Dla przeciętnego odbiorcy muzyki matematyka i muzyka należą do dwóch odrębnych, może nawet antagonistycznych porządków. Matematyka stoi na czele nauk ścisłych, będących domeną ludzkiego umysłu. Natomiast muzyka jest sztuką, odnosi się bezpośrednio do naszych emocji. Powszechny jest pogląd, że muzyka jest formą spontanicznej ekspresji, wolną od sztywnych reguł i norm. Wypływa prosto z serca artysty, twórcy i płynie do serca odbiorcy. Ale czy tak jest naprawdę? Czy muzyka nie opiera się na stałych zależnościach, które możemy opisać językiem matematyki i fizyki?

1.

Na początek przyjrzyjmy się z perspektywy naukowców właśnie kwestii odbioru muzyki. Z fizycznego punktu widzenia dźwięk jest falą rozchodzącą się w powietrzu. Ludzkie ucho posiada zdolność określania częstotliwości słyszanego dźwięku, co przekłada się na nasze odczucia, kiedy słuchamy muzyki. Nazwy dźwięków: **C, C♯, D, D♯, E** itd., są w istocie stałymi oznaczającymi określone częstotliwości fal. Przykładowo dźwięk podstawowy $\mathbf{A^1}$ to dźwięk o częstotliwości 440 Hz. Ten sam dźwięk zagrany o oktawę wyżej ma częstotliwość dwukrotnie wyższą. I tak np. dźwięk $\mathbf{A^2}$ (tzw. druga harmoniczna dla tonu podstawowego $\mathbf{A^1}$) to 880Hz. Co zaś z częstotliwością pozostałych dźwięków? Okazuje się, że możemy je obliczyć wiedząc, że w stosowanej współcześnie skali muzycznej stosunek częstotliwości dwóch kolejnych (tj. odległych od siebie o półton) dźwięków jest stały. Zatem skoro podniesienie dźwięku o jedną oktawę (12 półtonów) daje dwukrotny wzrost częstotliwości, to pojedynczy półton musi oznaczać wzrost częstotliwości o czynnik $\sqrt[12]{2}$. Stąd możemy już łatwo wyliczyć częstotliwości wszystkich dźwięków. Jak jednak przekłada się to na przyjemność płynącą z odbioru muzyki będącej kombinacją dźwięków? Otóż okazuje się, o czym wiedzieli już Pitagorejczycy, że człowiek odbiera jako harmonijne zestawienie takich dźwięków, których częstotliwości pozostają ze sobą w stosunku będącym ilorazem niewielkich liczb naturalnych. [Pitagorejczycy zauważyli, że jeżeli długości dwóch napiętych jednakową siłą strun mają się jak 1:2, to struny te dają przyjemne współbrzmienie. Podobnie 2:3, 3:4 – te zależności są liczbowym opisem konkretnych interwałów muzycznych: oktawy (1:2), kwinty czystej i kwarty czystej. Ich obserwacje można streścić w stwierdzeniu, że „harmonia wyraża się przez stosunek dwóch liczb naturalnych i tym jest pełniejsza, im liczby te są mniejsze". Informacje te pochodzą z książki Marka Kordosa: *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994. Cytowany fragment znajduje się w wykładzie IV: *Dedukcja*, na s. 49.] Wyjaśnienie tego faktu leży w fizyce fal. Nałożenie na siebie dwóch fal spełniających powyższą własność daje w rezultacie regularny (okresowy) wynik określany w teorii muzyki mianem konsonansu. Nałożenie na siebie fal o niepasujących częstotliwościach da nieregularny wynik nazywany dysonansem.

I tu dochodzimy do sedna sprawy. Pojawia się bowiem pytanie jak to możliwe, że z dźwięków, których częstotliwości powstają z tonu podstawowego przez mnożenie razy czynnik $\sqrt[12]{2}$ (będący niewątpliwie liczbą niewymierną), można skomponować muzykę miłą dla ucha. Sprzeczność jest jedynie pozorna. Wynika to z faktu, że otrzymane w ten sposób niewymierne liczby są bardzo dobrymi przybliżeniami liczb wymiernych o małych mianownikach. Ilustruje to poniższa tabela:

nazwa interwału	współczynnik		wartość przybliżona
sekunda wielka	$2^{2/12}$	1.12246	9:8
tercja mała	$2^{3/12}$	1.18921	6:5
tercja wielka	$2^{4/12}$	1.25992	5:4
kwarta czysta	$2^{5/12}$	1.33483	4:3
kwinta czysta	$2^{7/12}$	1.49830	3:2
septyma wielka	$2^{11/12}$	1.88774	17:9
oktawa	$2^{12/12}$	2.00000	2:1

Jak widać tabela ta nie zawiera wszystkich interwałów. Niektóre z nich nie są dobrymi przybliżeniami idealnych stosunków wymiernych (dotyczy to w szczególności sekundy małej i kwinty zmniejszonej). Wniosek z tego, że budując akordy i skale muzyczne musimy trzymać się pewnych reguł, których podłoże tkwi w matematyce. Jeśli przeanalizujemy budowę najczęściej spotykanych akordów, to okaże się, że spełniają te reguły. Na przykład akordy durowe zbudowane są z dźwięku podstawowego, tercji wielkiej, kwinty czystej oraz ich harmonicznych (dźwięków odległych o oktawę). Akordy i skale, których budowa nie przestrzega tych reguł, stosowane są rzadziej i są trudniejsze w odbiorze. Wykorzystuje się je w bardziej skomplikowanych i ambitnych gatunkach muzycznych takich jak jazz. W prostszej muzyce, jak blues czy rock, opartej o „bezpieczne" akordy i skale, znacznie łatwiej jest uniknąć dysonansu.

2.

Należy zdawać sobie również sprawę, że zasada harmonii nie dominuje we współczesnej muzyce poważnej. Od lat 20. XX w. kompozytorzy zaczynają odchodzić od systemu tonalnego dur-moll i od reguł faworyzujących konsonans. [*Mimo iż Schönberg problem dysonansu uznawać za najbardziej fundamentalny także dla nowej muzyki i jej teorii, istotna zmiana znaczenia polegała na tym, że opozycja konsonansu i dysonansu przestała istnieć jako problem natury technicznej, a stała się problemem czysto estetycznym. To przesunięcie zagadnień klasyfikacji współbrzmień ze sfery technicznokompozytorskiej w rejony estetyki muzycznej ocenić wypada jako jeden z najistotniejszych zwrotów w teorii muzyki XX wieku.* – Maciej Gołąb: *Dodekafonia*, wyd. Pomorze, Bydgoszcz 1987, s. 87.] Wraz z odrzuceniem tradycyjnych zasad harmonii, rola matematyki w procesie komponowania zaczyna rosnąć. Chciałabym opisać te zacieśniające się zależności między matematyką a muzyką na dwóch przykładach: pokrótce omawiając założenia dodekafonii (1920–1950) i założenia twórczości francuskiego kompozytora pochodzenia greckiego Iannisa Xenakisa (ur. 1922), który świadomie wykorzystuje do komponowania swoich utworów konkretne teorie z obszaru matematyki i fizyki.

Dodekafonia, czyli muzyka dwunastotonowa powstała w 1 poł. lat 20. XX w. w Austrii i Niemczech. Najbardziej znanymi kompozytorami, którzy stworzyli i posługiwali się tą techniką kompozytorską byli Arnold Schönberg, Anton Webern i Alban Berg. Podstawą dodekafonii jest odrzucenie tonalności i traktowanie wszystkich dźwięków skali chromatycznej jako całkowicie autonomicznych elementów. W konsekwencji tego neguje się fakt uprzywilejowania pewnych dźwięków jako mocnych punktów, tzw. dominant. Drugie założenie mówiło, że żaden dźwięk nie powinien być powtórzony, dopóki nie zostaną użyte wszystkie dźwięki skali. Ciąg dźwięków, nazwany przez Schönberga szeregiem, porządkiem lub serią – po niemiecku Reihe – jest odpowiednikiem melodii w tradycyjnej teorii. *Seria eksponowała określony system relacji interwałowych. Nawiązując do wykształconych w polifonii średniowiecza środków symetrii, kompozytor [Schönberg] wywiódł z niej trzy formy zwierciadlane, które wprawdzie zmieniają kolejność występowania dźwięków jako jednostek wysokości, jednak nie naruszają serii jako zbioru relacji. Owe trzy formy zwierciadlane to inwersja, rak i inwersja raka* [ibidem, s. 88]. Jeśli weźmie się pod uwagę 11 interwałów w dwunastostopniowej skali, maksymalna możliwa liczba szeregów wynosi:

$$11! = 39916800$$

Seria pierwotna została nazwana przez Schönberga *Grundgestalt*. Miała ona zapewnić dziełu muzycznemu logiczną spójność. Ponadto kompozytor po skonstruowaniu serii (spełniającej założenia estetyczne dzieła) tworzy jej warianty na dwa sposoby:

- **Transpozycja** – serię interwałów przyporządkowuje się na kolejnym dźwięku skali, otrzymując w ten sposób 11 wariantów.
- **Imitacja** – stosując zasady imitacji (lustrzanego odbicia w pionie lub poziomie) pomiędzy seriami. Znane są tu trzy transformacje serii:

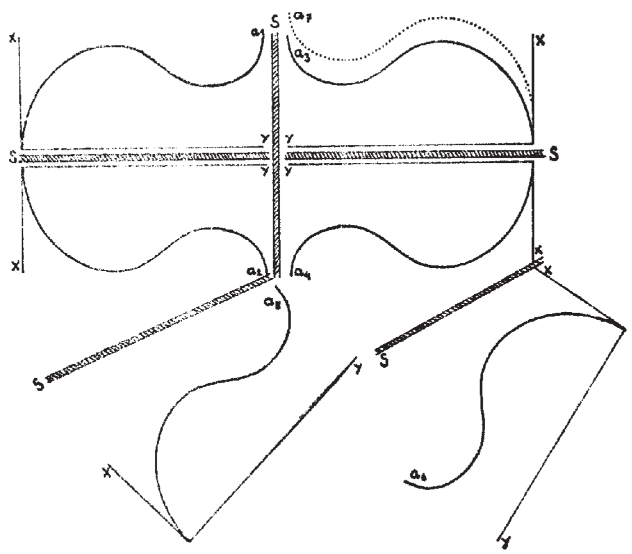
Jeśli seria podstawowa **P** wyrażona jest szeregiem:

Odbicie jej w pionie tworzy **I** inwersję – serię lustrzaną: *inwersja serii polega na zachowaniu porządku interwałów przy zmianie ich kierunku. Tym samym wprowadza inne uporządkowanie materiału wysokości dźwiękowych* [ibidem].

Odczytanie serii od końca tworzy raka **R** – serię retrogradalną: *postać retrogradalna (rak) jest uformowana z dźwięków wstecznie odczytywanej serii w postaci zasadniczej* [ibidem].

Przez poddanie jej obu tym transformacjom otrzymamy **RI** czyli serię inwersyjno-retragonalną (wsteczno retragonalną).

Między serią podstawową a rakiem oraz inwersją i jej postacią retrogradalną oś symetrii przebiega pionowo, między postacią zasadniczą serii a jej inwersją oraz rakiem i jego inwersją – poziomo [ibidem]. Oto rysunki Greisslego i Schönberga przedstawiające jedność form zwierciadlanych:



Zasadę korespondencji warstwy wertykalnej z horyzontalną porównywał kompozytor do zasady kwadratu magicznego [ibidem, s. 92.], która miała obrazować zasadę jedności przestrzeni muzycznej, równouprawnienie wszystkich form zwierciadlanych. I tak np. używając P, I, R i RI można stworzyć następujące kwadraty:

P	**I**	**R**	**RI**
R	**RI**	**P**	**I**
RI	**R**	**I**	**P**
I	**P**	**RI**	**R**

P	**RI**	**R**	**I**
R	**I**	**P**	**RI**
I	**R**	**RI**	**P**
RI	**P**	**I**	**R**

P	**R**	**RI**	**I**
RI	**I**	**P**	**R**
I	**RI**	**R**	**P**
R	**P**	**I**	**RI**

P	**I**	**RI**	**R**
RI	**R**	**P**	**I**
R	**RI**	**I**	**P**
I	**P**	**R**	**RI**

P	**RI**	**I**	**R**
I	**R**	**P**	**RI**
R	**I**	**RI**	**P**
RI	**P**	**R**	**I**

P	**R**	**I**	**RI**
I	**RI**	**P**	**R**
RI	**I**	**R**	**P**
R	**P**	**RI**	**I**

Każda kolumna, rząd i przekątna każdego kwadratu zawiera wszystkie cztery warianty serii. Wybierając je w założonym porządku, tworzy się pełną kompozycję linii melodycznej.

Podobną zasadę można zastosować dla dowolnej liczby wariantów serii podstawowej.

Dla muzyki dodekafonicznej tradycyjna notacja muzyczna oparta na pięciolinii i znakach chromatycznych stała się niewystarczająca. Z czasem wykształcono wiele systemów zapisu muzycznego opartego na liczbach. Do najczęstszych należą następujące systemy:

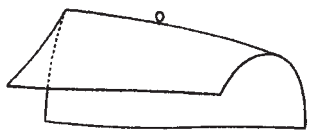
a. przyporządkowanie kolejnych dźwięków serii liczbom naturalnym,
b. przyporządkowanie konkretnych dźwięków skali liczbom np. his/c/des=0, cis/d=1. dis/es=3 itd.
c. notacja interwałów zamiast dźwięków według następującego schematu:
   1 – sekunda mała,
   2 – sekunda wielka,
   3 – tercja mała,
   4 – tercja wielka,
   5 – kwarta,
   6 – tryton,
   7 – kwinta,
   8 – seksta mała,
   9 – seksta wielka,
   10 – septyma mała,
   11 – septyma wielka.
d. notacja interwałów ze znakiem + gdy jest on wznoszący lub – gdy jest opadający.

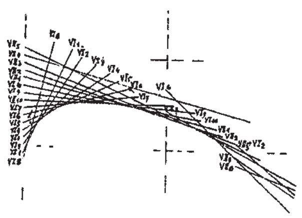
3.

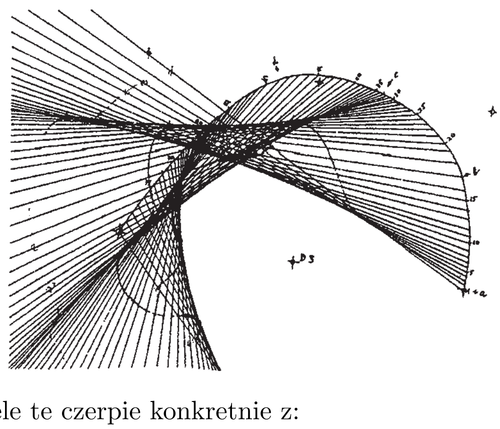
Zastosowanie liczbowego zapisu oraz odkrycie matematycznej i geometrycznej struktury muzyki nasunęło niektórym teoretykom muzyki koncepcję, że jest ona tworem czysto matematycznym i to, co się najbardziej w niej liczy, to wewnętrzna spójność i „matematyczne piękno". Zepchnęło to tradycyjnie pojętą estetykę muzyczną na drugi plan, uznając ją za produkt uboczny wewnętrznej spójności, a w skrajnych przypadkach odrzuciło ją całkowicie jako niepotrzebny balast [źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/Dodekafonia.]. Przedstawicielem tego rodzaju podejścia do muzyki, kompozytorem wyciągającym konsekwencje z przełomu, jaki się dokonał za sprawą dodekafonii, jest Iannis Xenakis. Urodził się w 1922 r. w Rumunii. Był synem greckiego biznesmena. Skończył politechnikę (w 1946 r.), a gdy po studiach został wcielony do wojska, zdezerterował i wyemigrował do Francji (1947 r.). Tam od roku 1959 pracował jako inżynier i projektant w pracowni Le Corbusiera. Później całkowicie poświęcił się twórczości kompozytorskiej. Postać Xenakisa jest bardzo interesująca zwłaszcza, gdy chcemy zobaczyć powiązania matematyki z muzyką, ponieważ w przypadku tego francuskiego kompozytora owe dwie dziedziny i relacja między nimi tkwiły w centrum jego zainteresowań, były przedmiotem artystycznych dociekań. Interesowały go na tyle, że problemom scjentyzmu ludzkiej wiedzy i mistycyzmu sztuki poświęcił swoją pracę doktorską. Ceniony jest właśnie za umiejętność łączenia aparatu stricte naukowego z artystyczną inspiracją, za tworzenie utworów z architektoniczną solidnością przy jednoczesnym zachowaniu siły ekspresji. Warto w tym miejscu przywołać wypowiedź samego Xenakisa:

Otóż każdą muzykę można w końcu rozłożyć na szereg operacji i układów o charakterze czysto logicznym. Dźwięki lub struktury dźwiękowe należy traktować jako znaki, jako dźwiękowe symbole stanowiące swoiste elementy obszernego zbioru, w którym i do którego stosować można teorię zbiorów, rozmaite systemy logiczne i algebraiczne zwłaszcza Boole'a... [Iannis Xenakis: *Debussy a sformalizowanie muzyki*, „Ruch muzyczny" 1962, nr 16, s. 7.]

W jednym z pierwszych swoich utworów Pithopracta (1956 r.) wyłącznym elementem formotwórczym staje się faktura dźwięków, a do *generowania złożonych brzmień o zmiennej gęstości* wykorzystał funkcje prawdopodobieństwa i funkcje „stochastyczne". [James Harley: *Iannis Xenakis: Racjonalny mistyk, architekt dźwięku*, „Muzyka. Kwartalnik Instytutu Sztuki Polskiej Akademii Nauk", rocznik XLIII, 1998, nr 4, s. 20.] Stochastyka z biegiem czasu zaczęła wchodzić coraz głębiej w samą strukturę jego utworów (wcześniej wykorzystywana tylko na poziomie wierzchniej warstwy), stając się regułą rządzącą całością. W utworze *Nomos Alpha* Xenakis zaproponował nowe podejście do kombinatoryki zaczerpnięte z teorii grup: *technika, którą wykształcił, umożliwia połączenie szeregów faktur lub innego materiału muzycznego z uporządkowanymi wariantami parametrycznych elementów, takich jak trwanie, dynamika, rejestr* [ibidem]. Kwestię linii melodycznej ten francuski kompozytor rozwiązał tworząc tzw. sita i skale - zamiast wybierać dźwięki z pełnego pola chromatycznego, tworzy wstępny zbiór określonych wartości, z którego wybierane są później poszczególne dźwięki. Potem doszła do tego jeszcze koncepcja arborescencji, polegająca na tym, że pierwotny kształt melodyczny ma wypuszczać podobne sobie odnogi, linie „melodyczne". [Zapis takiego utworu przypomina swoim kształtem rozgałęziające się drzewo, stąd nazwa tej techniki.] Ale u Xenakisa trudno mówić o liniach, ponieważ, jak już wyżej wspomniałam, formę jego utworów tworzą faktury, czyli płaszczyzny (tworzone w praktyce np. z glissand), figury i bryły – podobnie jak Lutosławski Xenakis podczas komponowania posługiwał się geometrycznymi schematami formalnymi w relacjach wysokości dźwięku do czasu muzycznego. [Warto w tym miejscu wspomnieć, że Xenakis zapisywał swoje utwory na papierze kreślarskim i na kalce technicznej. Nie komponował przy fortepianie. Informację tę podaje Maria Anna Harley w artykule *Dlaczego Xenakis? Wprowadzenie*, „Muzyka. Kwartalnik Instytutu Sztuki Polskiej Akademii Nauk", rocznik XLIII, 1998, nr 4.] Podejście Xenakisa do brył, czy w ogóle do form przypomina teorię brył platońskich – opiera się na przeświadczeniu, że *niesłychane rozprzestrzenienie form we wszechświecie [być może] sprowadza się do kilku jedynie archetypów, od których pochodziłyby wszystkie inne*. [Iannis Xenakis: *Kéleütha: Écrits*, Paris 1994, s. 137.] Xenakis postulował nawet stworzenie nowej gałęzi nauki, tzw. „morfologii ogólnej", która by porównywała kształty i figury z różnych, odległych czasem od siebie dziedzin: matematyki, logiki, fizyki, chemii, biologii, paleontologii, czy z nauk humanistycznych. Natomiast *piękno* [wytworzone przez muzykę] *powinno pozwolić wznieść się do świata poznawalnego rozumowo, który złożony jest z „modeli"* [Mihu Iliescu: *Xenakis i Thom. Problemy morfodynamiki dźwiękowej*, „Muzyka. Kwartalnik Instytutu Sztuki Polskiej Akademii Nauk", rocznik XLIII, 1998, nr 4, s. 104.]. Na początku Xenakis zapożycza takie modele z matematyki i fizyki, stosując je do kształtowania figur dźwiękowych. Poniżej przedstawiam szkic takiego modelu (rys. a.) nazwanego przez René Thoma „pępkiem hiperbolicznym schematycznym". [René Thom (ur. 1923 r.) – matematyk i epistemolog francuski. W latach 60. stworzył zespół modeli matematycznych mających na celu opisanie nieciągłych zjawisk w procesach morfogenezy. Tzw. „teoria katastrof", którą stworzył, znalazła zastosowanie w wielu dyscyplinach: biologii, językoznawstwie, fizyce, ekonomii, estetyce. Myślą przewodnią tej teorii jest założenie, że każde znaczenie daje się interpretować jako forma geometryczna. *Rozumieć znaczy geometryzować* (zdanie to pochodzi z: René Thom: *Parabole et catastrophes*, Paris 1983, s. 6). Wspólną cechą Thoma i Xenakisa jest to, że obaj przykładali wielką wagę do figur geometrycznych i kształtów, widząc w nich elementy budujące rzeczywistość.] Na rys. b. i c. znajdują się wykresy do fragmentów dwóch utworów Xenakisa [rysunki zaczerpnęłam z artykułu Mihu Iliescu, op.cit., s. 106].


a)


b)


c)

Modele te czerpie konkretnie z:
- rachunku prawdopodobieństwa z procesami losowymi (utwór *Pithoprakta*),
- teorii gier (utwór *Pojedynek*),
- teorii zbiorów (utwór *Herm*),
- matematycznej teorii grup (utwór *Nomos Alpha*).

Później Xenakis przestaje zapożyczać modele z innych dziedzin, a zaczyna tworzyć własne. Muzyka przez to staje się dla niego zjawiskiem autonomicznym, którego język matematyki nie jest już w stanie do końca opisać. Dochodzi do wniosku, że *sztuka świadomie „zadaje" problemy, dla rozwiązania których matematycy muszą i będą musieli stworzyć nowe teorie* [Iannis Xenakis: *Arts/Sciences. Alliages*, Tournai 1979, s. 13.] i że powołaniem muzyki jest kierowanie nauki drogą *tworzenia kondensacji i konkretyzacji inteligencji* [ibidem, s. 18].

Podsumowując Iannis Xenakis wyszedł od równorzędnej relacji matematyki i muzyki, od spojrzenia na muzykę jako na swoistego rodzaju działanie matematyczne, ale z biegiem czasu punkt ciężkości zostaje przez niego przesunięty na metafizyczny, czy metaartystyczny aspekt albo zadanie muzyki, jakim jest dotarcie do *prawdy rzadkiej, ogromnej i doskonałej* [Iannis Xenakis: *Musiqes formelles*, Paris 1963, s. 15], leżącej poza muzyką. *Sztuka może dążyć poprzez swoje utrwalone w tradycji formy, czyli dzieła szczególnej wartości, do wprawienia swych odbiorców w stan całkowitego uniesienia, w którym człowiek zatraca samoświadomość w obliczu bezpośredniej, wyjątkowej, przytłaczającej i doskonałej prawdy. Jeśli dzieło sztuki zbliży się do tego ideału choćby na jeden moment, osiągnie swój cel* [Iannis Xenakis: *Formalised Music*, Bloomington 1971, Indiana University Press, s. 24.]. Poszukiwanie prawdy natomiast nie wyklucza, a może nawet obliguje do sięgania po teorie i konstrukty z różnych dziedzin nauk ścisłych, a szczególnie z matematyki, jednocześnie nie ograniczając się tylko do nich. Muzyka Xenakisa może być zatem przykładem symbiozy dwóch z pozoru nieprzystawalnych do siebie dziedzin, porządków.

Bibliografia

1. Gołąb Maciej: *Dodekafonia*, wyd. Pomorze, Bydgoszcz 1987.
2. Harley James: *Iannis Xenakis: Racjonalny mistyk, architekt dźwięku*, „Muzyka. Kwartalnik Instytutu Sztuki Polskiej Akademii Nauk", rocznik XLIII, 1998, nr 4.
3. Harley Maria Anna: *Dlaczego Xenakis? Wprowadzenie*, „Muzyka. Kwartalnik Instytutu Sztuki Polskiej Akademii Nauk", rocznik XLIII, 1998, nr 4.
4. Iliescu Mihu: *Xenakis i Thom. Problemy morfodynamiki dźwiękowej*, „Muzyka. Kwartalnik Instytutu Sztuki Polskiej Akademii Nauk", rocznik XLIII, 1998, nr 4.
5. Kordos Marek: *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.
6. Xenakis Iannis: *Debussy a sformalizowanie muzyki*, „Ruch muzyczny", 1962, nr 16.