Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw

Joanna JASZUŃSKA, Warszawa

Odczyt ten został nagrodzony medalem Filca.

Tematem XXXV Szkoły Matematyki Poglądowej, która odbyła się pod koniec sierpnia 2005 w podwarszawskich Grzegorzewicach, był „Porządek”. Mój odczyt dotyczył porządkowania w pary, a konkretniej twierdzenia Halla. Celem było zaprezentowanie tego twierdzenia, jego dowodu oraz – przede wszystkim – rozmaitych, często zaskakujących zastosowań, na przykładach różnorodnych i niezbyt skomplikowanych problemów. Niniejszy tekst powstał na podstawie tego odczytu.

Wyobraźmy sobie przyjęcie, na którym jest n chłopców i n dziewcząt, przy czym niektórzy z obecnych się znają (relacja znajomości jest symetryczna). Załóżmy, że chcemy podczas tego przyjęcia zeswatać n par znajomych. Oczywiście, jeśli istnieje chłopiec, który nie zna żadnej dziewczyny, to nie uda nam się znaleźć mu partnerki. Problemem jest też dwóch chłopców, z których każdy zna tylko jedną dziewczynkę i jest to – niestety – ta sama dziewczynka. Ogólniej, nietrudno zauważyć, że abyśmy mogli zeswatać wszystkich, musi zachodzić

Warunek Halla (H): *dla dowolnej grupy k chłopców, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, znają oni wspólnie co najmniej k dziewcząt.*

Znacznie mniej oczywiste jest

Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw (Philip Hall, 1935):

Warunek (H) *jest nie tylko konieczny, ale też dostateczny.*

Ze względu na różnorodność problemów, w których twierdzenie to występuje, ma ono wiele sformułowań, na przykład w terminologii

– *systemów różnych reprezentantów (SRR)*: dla każdego chłopca mamy zbiór jego znajomych dziewcząt i chcemy wskazać różne reprezentantki tych zbiorów;

– *skojarzeń w grafach dwudzielnych*: mamy graf o $2n$ wierzchołkach, n z nich odpowiada chłopcom, pozostałych n – dziewczętom, krawędzie oznaczają znajomości i szukamy n krawędzi odpowiadających małżeństwom.

Często jednak problem nie jest sformułowany w żadnej z wyżej wymienionych terminologii i trzeba samemu określić, co jest dla nas „chłopcami”, co „dziewczętami”, a co będziemy rozumieć przez „znajomość” oraz „małżeństwo”. Przydatna przy tym bywa poniższa, nietrudna do sprawdzenia,

Uwaga: *Warunek Halla jest – wbrew pozorom – symetryczny ze względu na płeć. Innymi słowy, jest on równoważny warunkowi*

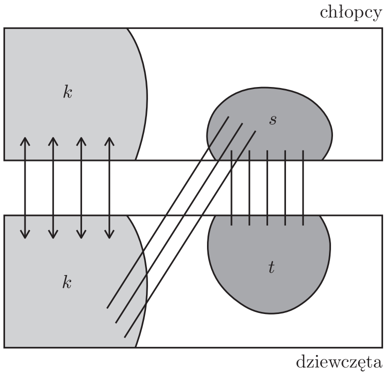
(H′) *dla dowolnej grupy k dziewcząt, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, one wspólnie znają co najmniej k chłopców.*

Zanim przejdziemy do przykładów zastosowań twierdzenia Halla, przyjrzyjmy się dwóm spośród kilku jego dowodów.

Dowód 1. (indukcja) Dla $n = 1$ mamy jednego chłopca, jedną dziewczynkę i oni się znają, więc tworzą dobraną parę. Przyjmijmy zatem, że dla wszystkich liczb mniejszych od n twierdzenie Halla jest prawdziwe i udowodnijmy je dla n.

1) Załóżmy, że dla dowolnej grupy k chłopców, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, znają oni wspólnie **więcej** niż k dziewcząt. Ożeńmy dowolnego chłopca z którąkolwiek znaną mu dziewczynką. Dowolna grupa s spośród pozostałych $n-1$ chłopców zna co najmniej s z pozostałych dziewcząt, bo z wszystkich znali więcej niż s, w tym być może tę jedną już wydaną za mąż. Mamy zatem spełniony warunek (H) w zbiorze $n-1 < n$ chłopców, więc na mocy zasady indukcji umiemy ich pożenić.

2) W przeciwnym przypadku istnieje podzbiór k chłopców, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, taki, że oni znają **dokładnie** k dziewcząt. Musimy ich zatem pożenić właśnie z tymi dziewczętami. Ponieważ $k < n$, z założenia indukcyjnego umiemy to zrobić.



Rys. 1

Sprawdźmy, czy w gronie pozostałych $n-k$ chłopców i $n-k$ dziewcząt jest spełniony warunek (H). Jeśli tak, to z założenia indukcyjnego ich też umiemy pożenić (bo $n-k<n$). Weźmy dowolną grupę s chłopców spośród tych $n-k$ nieżonatych. Mogą oni znać niektóre spośród niezamężnych dziewcząt i niektóre spośród k zamężnych. Niech t oznacza liczbę znanych im niezamężnych dziewcząt, $t \in \{0,1,\ldots,n-k\}$. Czy $t \geq s$?

Dołączmy do tych chłopców grupę k żonatych, którzy znają w sumie tylko swoich k żon. Otrzymana grupa $s+k$ chłopców zna $t+k$ dziewcząt. Jednocześnie z założenia znają oni co najmniej $s+k$ dziewcząt. Stąd $t+k \geq s+k$, więc $t \geq s$. Zatem w gronie $n-k$ kawalerów zachodzi warunek (H) i umiemy ich pożenić z $n-k$ pannami.

W każdym przypadku potrafimy więc zeswatać wszystkie n par, co było do udowodnienia. ■

Warto zwrócić uwagę, że problemu Halla na ogół nie ma tylko jednego rozwiązania, często jest dużo różnych możliwości pożenienia.

Wniosek: *Jeśli zachodzi warunek* (H) *i dodatkowo każdy chłopiec zna co najmniej* t *dziewcząt,* $t \in \{2,3,\ldots,n\}$*, to istnieje co najmniej* $t!$ *różnych skojarzeń.*

Dowód jest analogiczny do indukcyjnego dowodu twierdzenia Halla. ■

W przedstawionym powyżej dowodzie 1. wykazujemy niekonstruktywnie, że dobranie n par jest możliwe. Zobaczmy teraz konkretny algorytm zeswatania ich.

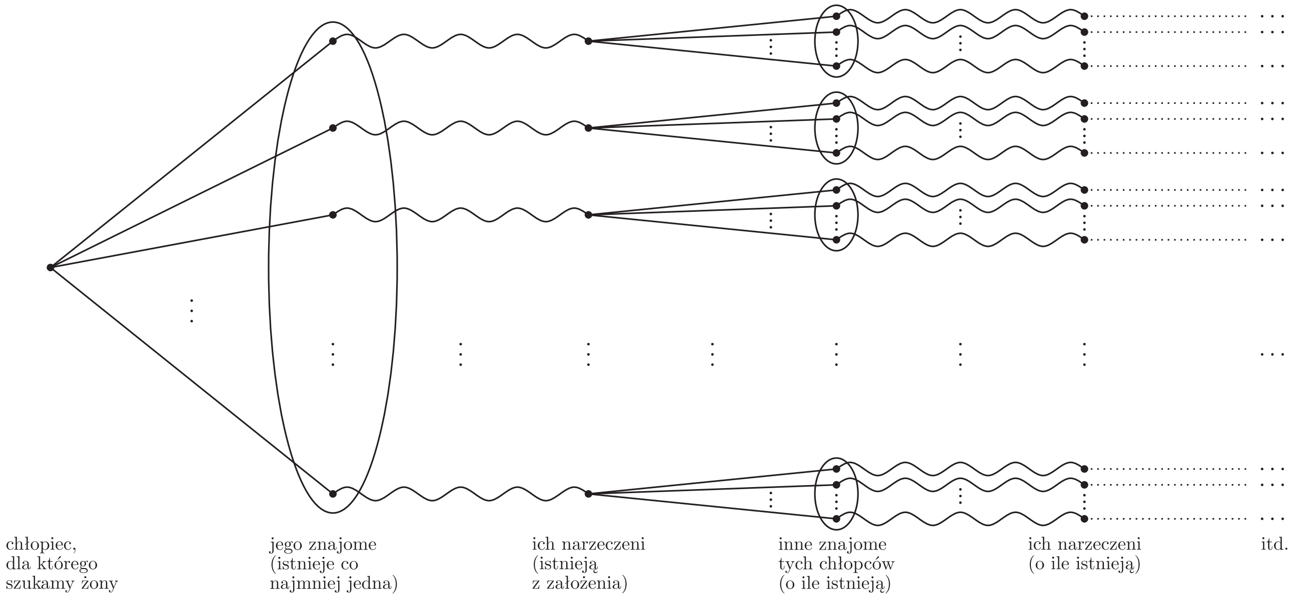
Dowód 2. (algorytm) Spróbujmy zeswatać chłopców z dziewczętami naiwnie prostą metodą. Przydzielmy pierwszemu chłopcu dowolną znaną mu dziewczynkę. Pozostałym chłopcom też, po kolei, przydzielajmy – dopóki się da – narzeczone, spośród znanych im i jeszcze niezajętych dziewcząt. Jeśli uda nam się w ten sposób zeswatać wszystkich, to wspaniale, o to właśnie chodziło. Niestety nasz naiwny algorytm może się zaciąć, jeśli w pewnym momencie któremuś chłopcu nie możemy przydzielić narzeczonej, bo wszystkie znane mu dziewczęta są już zajęte. Co wtedy robimy?

Ustawmy tego chłopca na środku sali i niech on rozmawia jednocześnie ze wszystkimi znajomymi dziewczętami. Z naszego założenia każda z nich ma narzeczonego – niech pary trzymają się za ręce. Każdy z tych chłopców niech zagaduje wszystkie znajome dziewczęta, które jeszcze z nikim nie rozmawiają (jeśli dziewczynę zagaduje więcej niż jeden chłopak, wybiera ona pierwszego z nich i tylko z nim rozmawia). One z kolei, jeśli mają narzeczonych, niech trzymają się z nimi za ręce, a ci z kolei niech zagadują znajome dziewczęta, które z nikim jeszcze nie rozmawiają itd.

W pewnym momencie tak budowane „drzewko znajomości i narzeczeństwa” się skończy (niekoniecznie wszyscy w nim wystąpili).

1) Załóżmy, że każda z rozmawiających dziewczynek ma narzeczonego. To oznacza, że jest grupa „końcowych” chłopców, trzymanych za ręce przez swoje narzeczone, którzy nie mają kogo zagadywać, bo wszystkie ich znajome już z kimś rozmawiają. Całe nasze drzewko składa się zatem z kawalera, któremu szukamy żony, oraz z pewnej liczby par, a więc liczba chłopców jest w nim większa (o 1) od liczby dziewcząt. Jednocześnie ci chłopcy znają tylko te dziewczęta – sprzeczność z warunkiem (H).

2) Wobec tego musi istnieć rozmawiająca i niezaręczona dziewczynka. Niech zaręczy się z zagadującym ją chłopcem. On z kolei niech się rozstanie z trzymającą go za rękę dziewczyną, ona zaś niech zaręczy się z tym, który ją zagadywał itd. – wzdłuż gałęzi łączącej wolną dziewczynę z naszym kawalerem zamieniamy narzeczeństwa ze znajomościami. W ten sposób znaleźliśmy partnerkę dla problematycznego chłopca i zwiększyliśmy liczbę zaręczonych par o 1. Możemy zatem stosować dalej nasz algorytm i ostatecznie skojarzymy w ten sposób wszystkie n par. ■



Rys. 2

Najprostszy typ zagadnień, w których przydaje się twierdzenie Halla, ilustruje

Przykład 1. Duża firma zatrudnia n pracowników o rozmaitych kwalifikacjach, niektórzy z nich posiadają wiele umiejętności jednocześnie. Szef chce rozdzielić pomiędzy nich n zadań tak, by każdy otrzymał jedno zadanie i umiał je wykonać. Aby przekonać się, czy taki przydział jest możliwy, wystarczy sprawdzić, czy zachodzi warunek (H) – czy dowolnych k pracowników wspólnymi siłami umie wykonać co najmniej k różnych zadań. ■

Większość dalszych przykładów opisuje problemy, w których trudniej jest „odnaleźć" twierdzenie Halla.

Przykład 2. Pewien obszar leśny podzielono na 100 działek rekreacyjnych o tej samej powierzchni. Jednocześnie strażacy podzielili ten obszar inaczej na 100 sektorów o tej samej powierzchni. Chcemy wykopać studnie tak, by na każdej działce i w każdym sektorze była jedna z nich (studnia jest punktem i nie może znajdować się na żadnej linii podziału). Oczywiście musimy w tym celu wykopać co najmniej 100 studni. Czy można rozmieścić je tak, by 100 wystarczyło?

Rozwiązanie: Tak. Niech działki będą chłopcami, sektory strażackie dziewczętami, a posiadanie punktów wspólnych uznajmy za znajomość. Jeśli dobierzemy działki z sektorami w pary, to następnie na częściach wspólnych będzie można wybudować studnie i 100 studni wystarczy.

Sprawdźmy zatem, czy jest spełniony warunek (H). Niech cały nasz obszar ma pole 100. Wtedy dowolny podzbiór k działek (chłopców) ma pole k i musi wobec tego mieć punkty wspólne z co najmniej k sektorami (znać co najmniej k dziewcząt). Tego właśnie nam potrzeba! Wobec tego z twierdzenia Halla żenimy działki z sektorami i na częściach wspólnych budujemy studnie. ■

Przykład 3. Układamy pasjans. Talię 52 kart rozkładamy w 13 kupkach po 4 karty. Następnie staramy się tak wybrać po jednej karcie z każdej kupki, by w rezultacie mieć w ręku *zestaw*, czyli po jednej karcie każdej wysokości $(2, 3, \ldots, 10, W, D, K, A$, kolory są nieistotne). Czy dla dowolnego układu kart jesteśmy w stanie taki zestaw wybrać? Czy zawsze można z pozostałych na stole kart wybrać kolejny taki zestaw, potem trzeci i w rezultacie mieć po jednej karcie w każdej kupce, co stanowi czwarty zestaw?

Rozwiązanie: Zawsze można uzyskać cztery zestawy. Niech każda z 13 wysokości kart zna te spośród 13 kupek, na których leży któraś z 4 kart o takiej właśnie wysokości. Aby wybrać zestaw kart, wystarczy umieć pożenić wysokości z numerami kupek – wtedy będziemy wiedzieć, którą wysokość brać z której kupki. Sprawdźmy, czy takie skojarzenie jest możliwe. Zauważmy, że dla ustalonych k wysokości mamy $4k$ kart o tej wysokości. Kupki zawierają po 4 karty, zatem naszych $4k$ kart musi leżeć w co najmniej k kupkach. Jest zatem spełniony warunek (H), więc umiemy wybrać zestaw. Analogicznie z pozostałych kupek po 3 karty umiemy wybrać kolejny zestaw i tak dalej. ■

Przykład 4. *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Prostokątem łacińskim nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński można uzupełnić do kwadratu łacińskiego?

Rozwiązanie: Tak. Chcemy dopisać $n - m$ wierszy spełniających odpowiednie warunki. Wystarczy pokazać, że umiemy dopisać jeden wiersz, wtedy kolejne dopiszemy analogicznie.

Zauważmy, że jeśli każdej kolumnie przypiszemy „kupkę” brakujących w niej liczb, to zadanie sprowadzi się do poprzedniego – szukany wiersz to odpowiednio wybrany zestaw wartości. ■

Wniosek: Istnieje co najmniej $n! \cdot (n-1)! \cdot \ldots \cdot 2! \cdot 1!$ kwadratów łacińskich $n \times n$.

Dowód: Istnieje $n!$ permutacji liczb $1, 2, \ldots, n$, czyli możliwych pierwszych wierszy kwadratu łacińskiego. Dopisujmy kolejno brakujące wiersze.
Z powyższego przykładu oraz z wniosku po indukcyjnym dowodzie twierdzenia Halla wynika, że do kwadratu, któremu brakuje t wierszy, umiemy dopisać kolejny na co najmniej $t!$ sposobów. Stąd wszystkich kwadratów łacińskich $n \times n$ jest co najmniej $n! \cdot (n-1)! \cdot \ldots \cdot 2! \cdot 1!$. ■

Przykład 5. *Kwadratem magicznym* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu suma liczb jest taka sama (oznaczmy ją S).

Gra w kamyki jest jednoosobowa. Planszę stanowi dowolny kwadrat magiczny $n \times n$. Na każdym polu z dodatnią liczbą kładziemy odpowiadającą tej wartości liczbę kamyków (na całej planszy mamy więc $S \cdot n$ kamyków, niektóre pola mogą być puste). Ruch polega na zdjęciu z planszy garści n kamyków, z których każdy podnieśliśmy z innego wiersza i jednocześnie każdy z innej kolumny. Chcemy wykonać S ruchów, zdejmując w rezultacie wszystkie kamyki. Czy zawsze jest to możliwe? Czy zawsze możliwe jest wykonanie choćby jednego ruchu (pustych pól może być dużo!)?

Rozwiązanie: Analogicznie do dwóch poprzednich przykładów: niech wiersz zna te kolumny, na przecięciu z którymi ma niezerową liczbę. W dowolnych k wierszach suma liczb jest równa $k \cdot S$, zatem wiersze te muszą znać co najmniej k kolumn. Możemy zatem pożenić wiersze z kolumnami i z pól „małżeńskich” podnieść po jednym kamyku. ■

Wniosek: Dowolny kwadrat magiczny $n \times n$ można przedstawić jako sumę n kwadratów zero-jedynkowych $n \times n$ o stałej $S = 1$ (dodając dwa kwadraty, dodajemy wartości w odpowiednich kratkach).

Przykład 6. Załóżmy, że każdy z n chłopców zna dokładnie t spośród n dziewcząt ($t \leq n$) i każda z dziewcząt zna dokładnie t chłopców. Czy można urządzić dyskotekę, w czasie której odbędzie się t tańców i każdy zatańczy dokładnie raz z każdą znajomą osobą przeciwnej płci?

Rozwiązanie: Można. Stwórzmy zero-jedynkową macierz (tabelę) $n \times n$, kodującą znajomości między chłopcami i dziewczętami: jedynka na przecięciu k-tego wiersza i l-tej kolumny oznacza, że chłopiec numer k zna dziewczę numer l, zaś zero – że nie zna. Jeśli każda z osób zna dokładnie t osób płci przeciwnej, to nasza macierz jest kwadratem magicznym o stałej t. Na mocy wniosku z przykładu 5., umiemy taki kwadrat rozłożyć na sumę t kwadratów magicznych o stałej 1, czyli macierzy permutacji. Te kwadraty kodują tańce! ■

Sprawdzanie warunku Halla bywa uciążliwe – wszak trzeba skontrolować wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego. Dlatego przydatne bywają kryteria pozwalające łatwiej stwierdzić, czy warunek ten jest spełniony. Wykorzystują one na przykład dodatkowe założenia dotyczące liczby znajomości, choćby takie, jak w powyższym przykładzie. Tego typu kryterium, silniejszym od warunku (H), jest następujący

Lemat: *Jeśli każdy z n chłopców zna co najmniej t spośród n dziewcząt ($1 \leq t \leq n$) oraz każda z dziewcząt zna co najwyżej t chłopców, to zachodzi warunek* (H).

Dowód, analogiczny do wcześniejszych rozumowań, pozostawmy jako ćwiczenie. ■

Przykład 7. Dwóch magików pokazuje sztuczkę. Jeden z nich podaje komuś z publiczności talię 124 różnych kart i prosi o wybranie dowolnych pięciu. Następnie pokazuje drugiemu magikowi kolejno pewne cztery spośród tych kart, a on na tej podstawie określa piątą kartę. Jak to możliwe?

Rozwiązanie: Na pierwszy rzut oka sztuczka jest niemożliwa – pierwszy magik, permutując 4 karty, może zakodować $4! = 24$ różne informacje, a drugi ma na tej podstawie wymienić jedną z aż $124 - 4 = 120$ „podejrzanych” kart. Zauważmy jednak, że pierwszemu magikowi pozostaje jeszcze wybór, którą kartę chce schować.

Spróbujmy pożenić pięciokartowe zbiory kart z ciągami 4 kart, przy czym zbiór zna te ciągi, które z jego kart można utworzyć. Zbiorów 5 kart jest $\binom{124}{5}$; ciągów 4 kart jest $124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121 = \binom{124}{5}$, czyli tyle samo. Jest zatem szansa, aby każdy zbiór zakodować innym ciągiem.

Każdy zbiór 5 kart zna $5 \cdot 4! = 120$ ciągów 4 kart, bo na 5 sposobów można wybrać kartę, która będzie schowana, oraz na $4!$ sposobów ustawić w ciąg pozostałe karty. Każdy ciąg 4 kart zna 120 zbiorów, bo na tyle sposobów można dołączyć do jego zbioru czterech kart piątą.

Niech zbiory będą dla nas chłopcami, ciągi – dziewczętami, oraz niech $t = 120$. Na mocy lematu zachodzi warunek (H), więc – z twierdzenia Halla – można naszych chłopców pożenić z dziewczętami. Innymi słowy, da się każdy zbiór 5 kart jednoznacznie zakodować ciągiem 4 spośród nich, czyli można wykonać naszą sztuczkę karcianą. ■

W powyższym rozumowaniu każda z „osób” zna 120 „osób” przeciwnej płci, zatem, na mocy wniosku z indukcyjnego dowodu twierdzenia Halla, jest co najmniej $120!$ różnych skojarzeń. Konkretną, możliwą do zapamiętania i wyćwiczenia metodę prezentowania opisanej sztuczki, można znaleźć w artykule [BCT] (spis dodatkowej literatury na końcu).

Warto zauważyć, że sztuczki tej nie można wykonać dla więcej niż 124 kart, bowiem wtedy wszystkich ciągów 4 kart jest za mało – mniej niż zbiorów 5 kart. Natomiast dla mniejszej liczby kart twierdzenie Halla nie zawsze jest konieczne, a algorytm kodowania ukrytej karty bywa znacznie łatwiejszy do zapamiętania i wyćwiczenia. Polecam następujące, niewymagające żadnej wiedzy matematycznej,

Zadanie: Wskazać konkretny, prosty algorytm pokazywania tej samej sztuczki dla talii 52 kart.

Twierdzenie Halla ma zastosowania – wbrew pozorom – nie tylko w matematyce „rozrywkowej”. Zresztą wśród powyższych przykładów kryło się trochę „poważnej” matematyki – choćby wniosek po przykładzie 5. to tak naprawdę twierdzenie Birkhoffa–von Neumanna o rozkładzie macierzy bistochastycznej na skończoną kombinację wypukłą macierzy permutacyjnych. Jest sporo twierdzeń o kwadratach łacińskich (dalsze fakty o uzupełnianiu niekompletnych kwadratów, wraz z innym zastosowaniem twierdzenia Halla, znaleźć można na przykład w [UKŁ]), a o teorii skojarzeń w grafach dwudzielnych i o związanych z nimi przepływach w sieciach napisano niejedną grubą książkę. Twierdzenia Halla używa się też przy konstruowaniu miary Haara („są to takie miary głupie na lokalnie zwartej grupie", jak wyjaśnia *Hymn Matematyków*), a w teorii mnogości występuje ono w wersji dla nieskończenie wielu chłopców i dziewcząt.

Wśród wielu przykładów pojawiają się też liczne modyfikacje, jak choćby zagadnienie kompletowania przez chłopców swoich haremów (dobrym tego przykładem są uczelnie opisane w artykule [CASM]). Czasami, by taki problem rozwiązać, wystarczy chłopców sklonować, ale często bywa trudniej.
W prawdziwym życiu bowiem chłopcom na ogół nie jest obojętne, którą ze znajomych dziewcząt poślubią, a i dziewczęta miewają swoje preferencje. Ponadto małżeństwa niestety czasem się rozpadają, zwłaszcza jeśli któraś ze stron znajdzie sobie lepszą partię. Dlatego w zagadnieniach bardziej praktycznych, zamiast twierdzenia Halla mówiącego tylko o istnieniu małżeństw, rozważa się często algorytmy kojarzenia par uwzględniające preferencje obu stron. Dąży się przy tym do tak zwanych przydziałów stabilnych, i to jak najlepszych dla wszystkich zainteresowanych. Godny odnotowania jest optymistyczny fakt, że – przy odpowiednio zdefiniowanych pojęciach – zawsze istnieje optymalne skojarzenie stabilne. Ale to już jest temat na osobną historię.

Dodatkowa literatura:

[BCT] *The Best Card Trick*; M. Kleber; *Mathematical Intelligencer* 24, nr 1 (zima 2002); tekst dostępny również na stronie internetowej autora: http://people.brandeis.edu/~kleber/Papers/card.pdf

[UKŁ] *Dowody z Księgi*; M. Aigner, G.M. Ziegler; Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002; rozdział 25: *Uzupełnianie kwadratów łacińskich.*

[CASM] *College admissions and the stability of marriage*; D. Gale, L.S. Shapley; *American Mathematical Monthly* 69 (1962), str. 9–15.