Jest to skrót odczytu wygłoszonego na XXXV Szkole Matematyki Poglądowej, *Porządek*, sierpień 2005.

Bałagan w zbiorze liczb naturalnych

Wojciech GUZICKI, Warszawa

Jednym z możliwych określeń bałaganu jest stwierdzenie, że bałagan jest to stan, w którym nic nie jest na swoim miejscu. Inaczej mówiąc, bałaganem w zbiorze uporządkowanym $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, w którym

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n,$$

byłby taki porządek

$$a_{i_1} \prec a_{i_2} \prec \ldots \prec a_{i_n},$$

że $i_k \neq k$ dla każdego k. Chwila zastanowienia pokazuje, że tak naprawdę ta definicja nie odwołuje się do porządku. Istotne jest tylko to, że permutacja $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ nie ma punktów stałych. Ze względu na temat tej Szkoły, poszukajmy takiej definicji bałaganu, w której pojęcie porządku byłoby naprawdę istotne.

Przyjmijmy więc, że bałagan jest to porządek bardzo różny od naturalnego, przy czym różnica polega na tym, że to, co powinno być „po kolei”, nie jest „po kolei”.

Przykłady porządków zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, które nie są bałaganami:

$$7 \prec 1 \prec 5 \prec 4 \prec 2 \prec 0 \prec 6 \prec 9 \prec 3 \prec 8$$

$$6 \prec 8 \prec 1 \prec 4 \prec 5 \prec 0 \prec 9 \prec 7 \prec 3 \prec 2$$

W pierwszym z nich kolejne liczby 1,2,3 występują w tej samej kolejności (a także liczby 3,4,5 w kolejności przeciwnej). W drugim liczby 2,4,6 występują w kolejności przeciwnej. W każdym z tych porządków można znaleźć jeszcze inne takie trójki liczb.

Definicja. Niech $\preceq$ będzie liniowym porządkiem w podzbiorze A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Niech $k \geq 3$. Porządek $\preceq$ nazywamy **k-bałaganem**, jeśli nie istnieje ciąg arytmetyczny $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (o różnicy $r \neq 0$) elementów zbioru A taki, że

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_k.$$

Pytanie o to, czy istnieją bałagany w zbiorze liczb naturalnych (lub w jego skończonych podzbiorach), pojawiło się w [1]. Odpowiedź pozytywna znalazła się w [2]. Praca [3] była w całości poświęcona temu zagadnieniu. W zasadzie wszystkie wyniki przedstawione w tym wykładzie pochodzą z pracy [3].

W dalszym ciągu przyjmijmy następujące oznaczenia:

Oznaczenie 1. Symbolem $\leq$ będziemy oznaczać zwykły porządek w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ (lub w jego dowolnym podzbiorze). Symbolami $\preceq$ i $\prec$ oznaczmy inne porządki liniowe w tych zbiorach.

Oznaczenie 2. Jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$, to dla $k, l \in \mathbb{Z}$ symbolem $kA + l$ oznaczamy zbiór

$$kA + l = \{ka + l : \ a \in A\}.$$

W szczególności

$$2A = \{2a : \ a \in A\}, \quad 2A + 1 = \{2a + 1 : \ a \in A\}$$
$$\text{oraz} \quad 2A - 1 = \{2a - 1 : \ a \in A\}.$$

Twierdzenie 1. Jeśli A jest skończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$, to istnieje 3-bałagan w zbiorze A.

Dowód. Skonstruujemy przez indukcję 3-bałagan $\preceq$ w zbiorze $A_n = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Dla $n = 0$ mamy $A_0 = \{0\}$ i w tym zbiorze jest tylko jeden porządek liniowy, będący oczywiście 3-bałaganem. Dla $n = 1$ mamy $A_1 = \{0, 1\}$ i przyjmujemy, że $0 \preceq 1$. Oczywiście ten porządek jest też 3-bałaganem.

Przypuśćmy teraz, że w zbiorze $A_n = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ jest dany 3-bałagan $\preceq$. Wtedy w zbiorze

$$A_{n+1} = \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\} = (2A_n) \cup (2A_n + 1)$$

definiujemy porządek $\preceq'$ w następujący sposób:

- jeśli $a \in 2A_n$ i $b \in 2A_n + 1$, to przyjmujemy $a \preceq' b$;
- jeśli $2a, 2b \in 2A_n$ oraz $a \preceq b$, to przyjmujemy $2a \preceq' 2b$;
- jeśli $2a+1, 2b+1 \in 2A_n + 1$ oraz $a \preceq b$, to przyjmujemy $2a+1 \preceq' 2b+1$.

Inaczej mówiąc

$$\begin{aligned} a \preceq' b \Leftrightarrow & (a \in 2A_n \ \wedge \ b \in 2A_n + 1) \vee \\ \vee & (a \in 2A_n \ \wedge \ b \in 2A_n \ \wedge \ \tfrac{a}{2} \preceq \tfrac{b}{2}) \vee \\ \vee & (a \in 2A_n + 1 \ \wedge \ b \in 2A_n + 1 \ \wedge \ \tfrac{a-1}{2} \preceq \tfrac{b-1}{2}). \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że porządek $\preceq'$ jest 3-bałaganem. Przypuśćmy bowiem, że dany jest ciąg arytmetyczny a_1, a_2, a_3 taki, że $a_1 \preceq' a_2 \preceq' a_3$. Ale wtedy a_1 i a_3 są tej samej parzystości (bo $a_1 + a_3 = 2a_2$). Mamy więc dwa przypadki:

Przypadek 1. $a_1, a_3 \in 2A_n$. Wtedy także $a_2 \in 2A_n$. Niech $a_1 = 2b_1$, $a_2 = 2b_2$ oraz $a_3 = 2b_3$. Ponieważ $2b_1 \preceq' 2b_2 \preceq' 2b_3$, więc $b_1 \preceq b_2 \preceq b_3$, co przeczy temu, że porządek $\preceq$ jest 3-bałaganem w zbiorze A_n.

Przypadek 2. $a_1, a_3 \in 2A_n + 1$. Wtedy także $a_2 \in 2A_n + 1$. Niech $a_1 = 2b_1 + 1$, $a_2 = 2b_2 + 1$ oraz $a_3 = 2b_3 + 1$. Ponieważ $2b_1 + 1 \preceq' 2b_2 + 1 \preceq' 2b_3 + 1$, więc $b_1 \preceq b_2 \preceq b_3$, co znów przeczy temu, że porządek $\preceq$ jest 3-bałaganem w zbiorze A_n.

To kończy dowód twierdzenia.

Przykłady. Oto przykłady 3-bałaganów w zbiorach A_1, A_2, A_3, A_4:

$A_1:\quad 0 \prec 1$

$A_2:\quad 0 \prec 2 \prec 1 \prec 3$

$A_3:\quad 0 \prec 4 \prec 2 \prec 6 \prec 1 \prec 5 \prec 3 \prec 7$

$A_4:\quad 0 \prec 8 \prec 4 \prec 12 \prec 2 \prec 10 \prec 6 \prec 14 \prec 1 \prec 9 \prec 5 \prec 13 \prec 3 \prec 11 \prec 7 \prec 15$

Istnieje wiele 3-bałaganów zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Można pokazać, że liczba $B(n)$ tych 3-bałaganów spełnia nierówność $B(n) \geq 2^n$. Oto kilka początkowych wartości $B(n)$:

n	$B(n)$	n	$B(n)$	n	$B(n)$	n	$B(n)$
1	1	6	48	11	2460	16	212728
2	2	7	104	12	6128	17	368016
3	4	8	282	13	12840	18	659296
4	10	9	496	14	29380	19	1371056
5	20	10	1066	15	74904	20	2937136

3-bałagany zdefiniowane w dowodzie twierdzenia 1 można również opisać w inny sposób. Popatrzmy na przykład na rozwinięcia dwójkowe liczb ze zbioru A_4 i odwróćmy te rozwinięcia (tzn. przeczytajmy każde z nich od końca):

0	0000	0000	0
1	0001	1000	8
2	0010	0100	4
3	0011	1100	12
4	0100	0010	2
5	0101	1010	10
6	0110	0110	6
7	0111	1110	14
8	1000	0001	1
9	1001	1001	9
10	1010	0101	5
11	1011	1101	13
12	1100	0011	3
13	1101	1011	11
14	1110	0111	7
15	1111	1111	15

W ten sposób można uporządkować cały zbiór liczb naturalnych.

Twierdzenie 2. Istnieje 3-bałagan zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

Dowód. Każdą liczbę naturalną możemy zapisać jednoznacznie w systemie pozycyjnym o podstawie 2:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 2^k,$$

gdzie $a_k \in \{0,1\}$ dla $k = 0,1,2,\ldots$ oraz prawie wszystkie współczynniki a_k są zerami. Przypuśćmy teraz, że mamy podobne przedstawienie liczby m:

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 2^k.$$

Przyjmujemy wówczas

$$n \preceq m \Leftrightarrow (n = m) \ \vee \ \exists k \ \big(a_k < b_k \ \wedge \ \forall l < k \ (a_l = b_l)\big).$$

Inaczej mówiąc, ciągi

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \quad \text{oraz} \quad (b_0, b_1, b_2, \ldots)$$

porządkujemy leksykograficznie.

Pokażemy teraz, że tak zdefiniowany porządek zbioru $\mathbb{N}$ jest 3-bałaganem. Przypuśćmy zatem, że dane są liczby $a, b, c \in \mathbb{N}$ takie, że $a \prec b \prec c$. Niech

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 2^k, \quad b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 2^k \quad \text{oraz} \quad c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot 2^k.$$

Niech k będzie najmniejszą liczbą taką, że $a_k \neq b_k$ i niech l będzie najmniejszą liczbą taką, że $b_l \neq c_l$. Wtedy $b - a = 2^k + p$, przy czym $2^{k+1} \mid p$. Zatem 2^k jest najwyższą potęgą dwójki dzielącą różnicę $b - a$. Ponadto $b_k = 1$. Podobnie 2^l jest najwyższą potęgą dwójki dzielącą $c - b$. Ponadto $b_l = 0$. Stąd wynika, że $k \neq l$. Ponieważ najwyższe potęgi dwójki dzielące $b - a$ i $c - b$ są różne, więc $b - a \neq c - b$, czyli trójka liczb a, b, c nie tworzy ciągu arytmetycznego. To kończy dowód twierdzenia.

Porządek zdefiniowany w dowodzie twierdzenia 2 jest dość skomplikowany. Można łatwo zauważyć, że jest on gęsty, nie ma elementu największego i ma element najmniejszy. Modyfikując nieznacznie ten porządek, można zdefiniować 3-bałagan zbioru $\mathbb{N}$, który nie będzie gęsty; jednak będą istniały liczby a i b, dla których istnieje nieskończenie wiele liczb c takich, że $a \prec c \prec b$. Powstaje naturalne pytanie o to, jak proste mogą być bałagany zbioru liczb naturalnych.

Twierdzenie 3. Nie istnieje dobry porządek zbioru liczb naturalnych będący 3-bałaganem.

Dowód. Niech $\preceq$ będzie dobrym porządkiem zbioru $\mathbb{N}$. Niech a będzie najmniejszą (w sensie porządku $\preceq$) liczbą w zbiorze $\mathbb{N}$. Niech następnie k będzie taką liczbą naturalną, że $a + 2^k$ jest najmniejszą (znów w sensie porządku $\preceq$) liczbą należącą do zbioru $\{a + 2^n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Mamy wówczas

$$a \prec a + 2^k \prec a + 2^{k+1} = a + 2 \cdot 2^k.$$

Pokazaliśmy zatem trzy liczby tworzące ciąg arytmetyczny zgodny z porządkiem $\preceq$. To kończy dowód twierdzenia.

W taki sam sposób można udowodnić następujące wzmocnienie twierdzenia 3.

Twierdzenie 4. Niech relacja $\preceq$ będzie dobrym porządkiem zbioru $\{a + mr : \ m \in \mathbb{N}\}$ takim, że zbiór $\{m \in \mathbb{N} : \ a + mr \prec a\}$ jest skończony. Wtedy istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $a \preceq a + mr \preceq a + 2mr$.

Wniosek 5. Nie istnieje 3-bałagan porządkujący zbiór liczb naturalnych w typ ω.

Wniosek 6. Nie istnieje 3-bałagan porządkujący zbiór liczb parzystych w typ ω.

Okazuje się jednak, że pewne bałagany dobrze porządkujące zbiór liczb naturalnych istnieją.

Twierdzenie 7. Istnieje 6-bałagan porządkujący zbiór liczb naturalnych w typ ω.

Dowód. Zdefiniujmy następujący ciąg zbiorów:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \{0\},\\
&A_1 = \{1, 2, 3, 4\},\\
&A_3 = \{5, 6, \ldots, 24\},\\
&\ldots \quad \ldots\\
&A_n = \{5^{n-1}, 5^{n-1}+1, \ldots, 5^n - 1\},\\
&\ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Niech następnie porządek $\preceq_n$ będzie 3-bałaganem zbioru A_n. Definiujemy teraz porządek $\preceq$ zbioru $\mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$a \preceq b \Leftrightarrow \exists m, n \Big(a \in A_m \ \wedge \ b \in A_n \ \wedge \ \big(m < n \ \vee \ (m = n \ \wedge a \preceq_m b)\big)\Big).$$

Inaczej mówiąc, zbiór $\mathbb{N}$ porządkujemy w ten sposób, że najpierw porządkujemy każdy zbiór A_n (za pomocą pewnego 3-bałaganu), a następnie ustawiamy te zbiory jeden za drugim, w naturalnej kolejności:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$$

Oczywiście otrzymamy w ten sposób dobry porządek typu ω. Przypuśćmy następnie, że dany jest ciąg arytmetyczny sześciowyrazowy (o różnicy r) taki, że

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4 \prec a_5 \prec a_6.$$

Gdyby ten ciąg był malejący, to oczywiście wszystkie jego wyrazy musiałyby należeć do tego samego zbioru A_n, co jest niemożliwe. Przypuśćmy zatem, że ten ciąg jest rosnący oraz $a_2 \in A_n$ dla pewnego n. Z definicji zbioru A_n mamy zatem $a_2 < 5^n$. Stąd wynika, że

$$a_6 = a_1 + 5r \leq 5a_1 + 5r = 5(a_1 + r) = 5a_2 < 5 \cdot 5^n = 5^{n+1}.$$

Zatem $a_6 \in A_{n+1}$, a więc

$$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in A_n \cup A_{n+1}.$$

Jeśli $a_4 \in A_n$, to w zbiorze A_n mamy trzywyrazowy ciąg arytmetyczny a_2, a_3, a_4. Jeśli zaś $a_4 \in A_{n+1}$, to w zbiorze A_{n+1} mamy trzywyrazowy ciąg arytmetyczny a_4, a_5, a_6. W obu przypadkach otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że porządki zbiorów A_n były 3-bałaganami. To kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie to można wzmocnić. Zanim jednak to zrobimy, pokażemy inny dowód twierdzenia 7.

Dowód II. Definiujemy następujący ciąg zbiorów:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \{0\},\\
&A_1 = \{1, 2, 3, 4\},\\
&A_2 = \{5, 6, \ldots, 20\},\\
&A_3 = \{21, 22, \ldots, 84\},\\
&\ldots \quad \ldots\\
&A_n = \{1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1}, \ldots, 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} + (4^n - 1)\},\\
&\ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Nietrudno zauważyć, że $|A_n| = 4^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \mathbb{N}.$$

Ponadto liczby należące do dowolnego zbioru A_n poprzedzają (w porządku $\leq$) liczby należące do zbiorów A_m dla $n < m$. Następnie dla każdego n wybieramy 3-bałagan $\preceq_n$ zbioru A_n i definiujemy porządek $\preceq$ zbioru $\mathbb{N}$ podobnie jak w dowodzie poprzednim, tzn. porządkujemy zbiory A_n w naturalnej kolejności:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$$

Przypuśćmy następnie, że dany jest ciąg arytmetyczny sześciowyrazowy (o różnicy r) taki, że

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4 \prec a_5 \prec a_6.$$

Podobnie jak w poprzednim dowodzie ten ciąg nie może być malejący. Przypuśćmy zatem, że ten ciąg jest rosnący oraz $a_2 \in A_n$ dla pewnego n. Mamy teraz kilka przypadków.

Przypadek 1. $a_1 \in A_n$. Wtedy oczywiście $a_3 \notin A_n$. Ponieważ $a_1, a_2 \in A_n$, więc $r < 4^n$. Teraz nietrudno zauważyć, że $a_3, a_4, a_5 \in A_{n+1}$, co daje sprzeczność.

Przypadek 2. $a_1 \notin A_n$ oraz $a_3 \in A_n$. Wtedy, rozumując tak jak w przypadku 1, pokazujemy, że $a_2, a_3, a_4 \in A_n$ lub $a_4, a_5, a_6 \in A_{n+1}$, co jest niemożliwe.

Przypadek 3. $a_1 \notin A_n$ oraz $a_3 \notin A_n$. Wtedy

$$a_1, a_2 \in A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n,$$

skąd wynika, że

$$r < 1 + 4 + \ldots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Zatem $3r < 4^{n+1}$, a więc $a_3, a_4, a_5 \in A_{n+1}$. Ta sprzeczność ostatecznie dowodzi twierdzenia.

Modyfikując powyższy dowód udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. Istnieje 5-bałagan porządkujący zbiór liczb naturalnych w typ ω.

Dowód. Definiujemy następujące ciągi zbiorów:

$$\begin{aligned}
&A_0 = \{0\}, && B_0 = \{1\},\\
&A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}, && B_1 = \{7, 8, 9, 10, 11\},\\
&A_2 = \{12, 13, \ldots, 36\}, && B_2 = \{37, 38, \ldots, 61\},\\
&\ldots && \ldots
\end{aligned}$$

Ciągi te są zdefiniowane tak, by spełnione były następujące warunki:
- $\big(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots\big) \cup \big(B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots\big) = \mathbb{N}$,
- $|A_n| = |B_n| = 5^n$,
- $k \in A_n \ \wedge\ l \in B_n \ \Rightarrow\ k < l$,
- $k \in A_n \cup B_n \ \wedge\ l \in A_{n+1} \cup B_{n+1} \ \Rightarrow\ k < l$.

Następnie porządkujemy każdy z tych zbiorów za pomocą pewnego 3-bałaganu i porządek $\preceq$ całego zbioru liczb naturalnych otrzymujemy, ustawiając zbiory A_n i B_n w następującej kolejności:

$$B_0, A_0, B_1, A_1, B_2, A_2, \ldots, B_n, A_n, B_{n+1}, A_{n+1}, \ldots$$

Oczywiście tak zdefiniowany porządek zbioru $\mathbb{N}$ ma typ ω. Pokażemy, że ten porządek jest 5-bałaganem. Wprost z konstrukcji porządku $\preceq$ wynika, że nie istnieje malejący ciąg arytmetyczny

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4 \prec a_5$$

długości 5. Gdyby bowiem taki ciąg istniał, to

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in A_n \cup B_n$$

dla pewnego n, skąd wynikałoby, że w jednym ze zbiorów A_n lub B_n istniałby trzywyrazowy ciąg arytmetyczny; to jednak jest sprzeczne z konstrukcją porządku $\preceq$. Przypuśćmy zatem, że istnieje pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$ taki, że

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4 \prec a_5.$$

Możliwe są następujące przypadki:

Przypadek 1. $a_1, a_2 \in A_n$ dla pewnego n. Wtedy oczywiście $a_3 \notin A_n$. Ale $r = a_2 - a_1 < 5^n$, skąd wynika, że $a_3 = a_2 + r \in B_n$. To jednak jest niemożliwe, gdyż $a_2 \prec a_3$.

Przypadek 2. $a_1, a_2 \in B_n$ dla pewnego n. Wtedy $a_3 \notin B_n$. Ponieważ $r = a_2 - a_1 < 5^n$, więc $a_5 = a_2 + 3r \in A_{n+1}$. Ale wtedy $a_3, a_4, a_5 \in A_{n+1}$, co jest sprzeczne z konstrukcją porządku $\preceq$.

Przypadek 3. $a_2 \in A_n$ oraz $a_1 \in A_0 \cup B_0 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup B_{n-1}$ dla pewnego n. Jeśli $a_3 \in A_n$, to podobnie jak w przypadku 1 dochodzimy do sprzeczności.

Zatem $a_3 \notin A_n$. Ponieważ $a_2 \prec a_3$, więc $a_3 \notin B_n$. Ale wtedy

$$\begin{aligned} r = a_2 - a_1 &< |A_0 \cup B_0 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup B_{n-1} \cup A_n| = \\ &= 2(1 + 5 + \ldots + 5^{n-1}) + 5^n = \frac{5^{n+1} + 5^n - 10}{4} < \frac{6 \cdot 5^n}{4} = \\ &= \frac{3 \cdot 5^n}{2} < \frac{5 \cdot 5^n}{3} = \frac{5^{n+1}}{3}. \end{aligned}$$

Zatem $3r < 5^{n+1}$, skąd wynika, że $a_3, a_4, a_5 \in A_{n+1}$, co jest sprzeczne z konstrukcją porządku $\preceq$.

Przypadek 4. $a_2 \in B_n$ oraz $a_1 \in A_0 \cup B_0 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup B_{n-1}$ dla pewnego n (zauważmy tu, że $a_1 \prec a_2$, więc $a_1 \notin A_n$). Zauważmy najpierw, że jeśli $a_3 \in B_n$, to $r = a_3 - a_2 < 5^n$. Z drugiej strony, wszystkie elementy zbioru A_n są mniejsze od a_3 i większe od a_1, skąd wynika, że $r > 5^n$. Zatem $a_3 \notin B_n$. Wtedy podobnie jak w przypadku 3 pokazujemy, że $3r < 5^{n+1}$, skąd wynika, że $a_3, a_4, a_5 \in A_{n+1}$, co znów jest sprzeczne z konstrukcją porządku $\preceq$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

Pytanie, czy istnieje 4-bałagan dobrze porządkujący zbiór $\mathbb{N}$ w typ ω, jest problemem otwartym.

Naturalnym pytaniem jest teraz pytanie o to, dla jakich porządków zbioru $\mathbb{N}$ kwestia istnienia n-bałaganów jest rozstrzygnięta dla wszystkich n. Pokażemy, że tak jest dla porządków zbioru $\mathbb{N}$ w typ $\omega^* + \omega$ (czyli dla porządków izomorficznych z porządkiem zbioru liczb całkowitych).

Twierdzenie 9. Nie istnieje 3-bałagan porządkujący zbiór liczb naturalnych w typ $\omega^* + \omega$.

Dowód. Przypuśćmy, że relacja $\preceq$ jest 3-bałaganem zbioru liczb naturalnych, porządkującym ten zbiór w typ $\omega^* + \omega$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $1 \prec 0$. Wtedy oczywiście

$$1 \prec 2, \quad 3 \prec 2, \quad 3 \prec 4, \quad 5 \prec 4, \quad 5 \prec 6, \ldots$$

i ogólnie

$$2m - 1 \prec 2m \quad \text{oraz} \quad 2m - 1 \prec 2m - 2$$

dla $m = 1, 2, 3, \ldots$

Podobnie, dla dowolnego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a i różnicy r mamy:

$$a + r \prec a \;\Rightarrow\; \big(a + (2m-1)r \prec a + 2mr \;\wedge\; a + (2m-1)r \prec a + (2m-2)r\big).$$

Pokażemy teraz, że 1 poprzedza (w porządku $\preceq$) wszystkie liczby parzyste. Popatrzmy najpierw na przykład. Pokażemy, że $1 \prec 6$. Przypuśćmy zatem, że $6 \prec 1$. Wtedy otrzymamy kolejno:

$$6 \prec 1, \quad 6 \prec 11, \quad 16 \prec 11, \quad 16 \prec 21, \quad 26 \prec 21.$$

Ponieważ $1 \prec 2$, więc $6 \prec 2$ i stąd otrzymujemy kolejno:

$$6 \prec 2, \quad 6 \prec 10, \quad 14 \prec 10, \quad 14 \prec 18, \quad 22 \prec 18, \quad 22 \prec 26.$$

Ale $21 \prec 22$, skąd dostajemy sprzeczność $26 \prec 21 \prec 22 \prec 26$.

Przeprowadzimy teraz rozumowanie ogólne. Przypuśćmy zatem, że $2m \prec 1$ dla pewnego m. Wówczas $2m = 1 + (2m-1) \prec 1$, więc z własności ciągu arytmetycznego o różnicy $2m-1$ otrzymujemy

$$1 + (2m-1) \cdot (2m-1) \prec 1 + (2m-2) \cdot (2m-1),$$

czyli

$$4m^2 - 4m + 2 \prec 4m^2 - 6m + 3.$$

Ponieważ $2k - 1 \prec 2k$ dla każdego k, więc

$$4m^2 - 6m + 3 \prec 4m^2 - 6m + 4,$$

skąd dostajemy

$$4m^2 - 4m + 2 \prec 4m^2 - 6m + 4.$$

Z drugiej strony, $2m \prec 1 \prec 2$, czyli $2m = 2 + (2m-2) \prec 2$ i z własności ciągu arytmetycznego o różnicy $2m-2$ otrzymujemy

$$2 + (2m-1) \cdot (2m-2) \prec 2 + 2m \cdot (2m-2),$$

czyli

$$4m^2 - 6m + 4 \prec 4m^2 - 4m + 2.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że istotnie $1 \prec 2m$. Zatem relacja $\preceq$ dobrze porządkuje liczby parzyste w typ ω i z wniosku 6 wynika, że nie jest 3-bałaganem, wbrew założeniu. To kończy dowód twierdzenia.

Na zakończenie naszkicujemy dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 10. Istnieje 4-bałagan porządkujący zbiór liczb naturalnych w typ $\omega^* + \omega$.

Szkic dowodu. Wprowadźmy oznaczenie. Przypuśćmy, że B jest zbiorem uporządkowanym. Wtedy symbolem B' oznaczymy zbiór B z porządkiem odwrotnym. Wreszcie, jeśli B jest zbiorem uporządkowanym, to porządki w zbiorach $2B+1$ i $2B+2$ definiujemy w naturalny sposób z porządku zbioru B. Wreszcie dla dwóch rozłącznych zbiorów uporządkowanych A i B symbolem AB oznaczamy zbiór $A \cup B$ uporządkowany w taki sposób, że elementy zbioru A poprzedzają elementy zbioru B (a każdy z tych zbiorów jest uporządkowany swoim porządkiem).

Teraz definiujemy ciąg zbiorów uporządkowanych:

$B_0 = \{0\},\ B_{2n+1} = (2B_{2n}+1)'(2B_{2n}+2)',\ B_{2n+2} = (2B_{2n+1}+2)'(2B_{2n+1}+1)'.$

Zbiory B_n (z uwzględnieniem kolejności elementów wewnątrz nawiasów klamrowych) dla kilku początkowych wartości n wyglądają następująco:

$$\begin{aligned}
&B_0 = \{0\},\\
&B_1 = (\{1\})'(\{2\})' = \{1,2\},\\
&B_2 = (\{2,4\}+2)'(\{2,4\}+1)' = \{4,6\}'\{3,5\}' = \{6,4,5,3\},\\
&B_3 = (\{12,8,10,6\}+1)'(\{12,8,10,6\}+2)' = \{7,11,9,13,8,12,10,14\},\\
&B_4 = (\{14,22,18,26,18,24,20,28\}+2)'(\{14,22,18,26,18,24,20,28\}+1)' =\\
&\quad = \{30,22,26,18,28,20,24,16,29,21,25,17,27,19,23,15\}.
\end{aligned}$$

Następnie zbiory B_n porządkujemy w następujący sposób:

$$\ldots B_6 B_4 B_2 B_0 B_1 B_3 B_5 \ldots$$

Otrzymany porządek wygląda więc następująco:

$$\begin{aligned}
&\ldots 30,22,26,18,28,20,24,16,29,21,25,17,27,19,23,\\
&\qquad 15,6,4,5,3,0,1,2,7,11,9,13,8,12,10,14,\ldots
\end{aligned}$$

Można pokazać, że

$$B_n = \{2^n - 1, 2^n, \ldots, 2^{n+1} - 2\}$$

oraz porządek zbioru B_n jest 3-bałaganem. Udowodnienie, że zdefiniowany wyżej porządek zbioru $\mathbb{N}$ jest 4-bałaganem, pozostawimy jako nietrudne ćwiczenie, kończąc tym samym szkic dowodu.

Można oczywiście zapytać o istnienie k-bałaganów porządkujących zbiór liczb naturalnych w inny typ porządkowy (np. $\omega + \omega$) lub też o istnienie bałaganów w zbiorze liczb całkowitych. Nieliczne wiadomości na ten temat i listę podobnych pytań można znaleźć w pracy [3].

Literatura

[1] R.C. Entringer, D.E. Jackson, *Elementary Problem 2440*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 1058.

[2] Rozwiązania powyższego zadania, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 74–76.

[3] J.A. Davis, R.C. Entringer, R.L. Graham, G.J. Simmons, *On permutations containing no long arithmetic progressions*, Acta Arithmetica XXXIV (1977), 81–90.