Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXIV Szkole Matematyki Poglądowej „NIE w matematyce i okolicach", styczeń 2005.

Struktury niewygładzalne

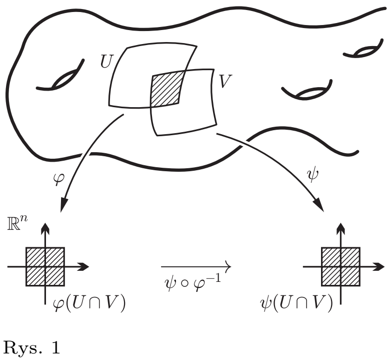
Zdzisław POGODA, Kraków

Podstawowym zadaniem topologii jest stwierdzenie, czy dwie dane przestrzenie są homeomorficzne, czy też nie. Zazwyczaj nie jest to zadanie łatwe, gdyż pojęcie homeomorfizmu jest bardzo ogólne i umyka naszej geometrycznej intuicji. Dlatego szuka się takich cech badanych obiektów, które nie zmieniają się przy przekształceniach homeomorficznych. I to też nie jest łatwe, trzeba bowiem sięgnąć do bardzo głębokich własności przestrzeni i samych homeomorfizmów. Z podstawowego kursu topologii wiadomo, że takimi najprostszymi cechami są: zwartość, spójność, liczba składowych spójnych zbioru oraz liczba składowych spójnych brzegu. One nie ulegają zmianie, gdy zbiory przekształcamy homeomorficznie. Jednak łatwo można podać przykłady takich obiektów, które mają takie same wszystkie wymienione cechy, a jednak nie są topologicznie równoważne. Należy szukać dalej. Marzeniem topologów jest znalezienie takiego zestawu cech, które pozwoliłyby jednoznacznie odróżnić z punktu widzenia homeomorfizmu dwie zadane przestrzenie. W tym celu konstruuje się rozmaite zestawy wymyślnych niezmienników, które pomagają rozróżnić badane przestrzenie. Zazwyczaj otrzymane niezmienniki pozwalają na „negatywną selekcję" – jeśli niezmienniki lub ich zestawy są różne, to przestrzenie nie są homeomorficzne. Gdy natomiast niezmienniki będą takie same, to jeszcze wcale nie znaczy, że przestrzenie są homeomorficzne.

Oprócz konstrukcji nowych niezmienników dobiera się też bardziej specjalne klasy przestrzeni poddające się łatwiej analizie. W praktyce pojęcie przestrzeni topologicznej jest zbyt ogólne i trudniej do niego stosować rozmaite techniki. Bardzo ważnym i łatwiej poddającym się badaniom przykładem są przestrzenie lokalnie przypominające przestrzeń euklidesową, czyli rozmaitości. Ale i wśród nich można wyróżnić rozmaite klasy. Najogólniejszą stanowią rozmaitości topologiczne. Przestrzeń topologiczną nazwiemy rozmaitością topologiczną n wymiarową, gdy każdy jej punkt ma otwarte otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$. Jednak rozmaitości topologiczne pojawiły się historycznie najpóźniej. Wcześniej badano, będące uogólnieniem powierzchni, rozmaitości różniczkowe i kawałkami liniowe (PL-rozmaitości). Definicje obu tych typów zaczynają się podobnie jak w przypadku rozmaitości topologicznej: zadana jest rodzina otoczeń otwartych homeomorficznych z odpowiednią przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$. Wybrane otoczenia powinny pokrywać całą przestrzeń i wraz z odpowiadającymi homeomorfizmami nazywane są **mapami**. Zbiór wszystkich map tworzy **atlas**. Dochodzi jeszcze warunek zgodności. Jeśli dane są dwie mapy (U, ϕ) oraz (V, ψ) z warunkiem $U \cap V \neq \emptyset$, to odwzorowanie

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

powinno być gładkim (albo odpowiedniej klasy C^k) dyfeomorfizmem w przypadku rozmaitości różniczkowej, względnie kawałkami liniowym izomorfizmem, gdy chcemy mieć PL-rozmaitość. Kawałkami liniowość rozmaitości i odwzorowań ściśle związana jest z możliwością lokalnej triangulacji przestrzeni; mówiąc niezbyt precyzyjnie taka rozmaitość lokalnie przypomina uogólniony wielościan. Jak już wspomnieliśmy, rozmaitości są uogólnieniem koncepcji powierzchni i krzywych na wyższe wymiary. Rozmaitości różniczkowe są uogólnieniem powierzchni gładkich – „bez kantów", a rozmaitości kawałkami liniowe są uogólnieniem powierzchni wielościennych – tu kanty są dopuszczalne. Najmniej intuicyjne są rozmaitości topologiczne. Jeśli wyobrazimy sobie sferę rogatą z nieskończoną ilością rogów, a na każdym z nich znów rogi i do tego nawzajem zaplecione, to mamy jeden z „naturalnych" przykładów dwuwymiarowej rozmaitości topologicznej.



Rys. 1

Na każdej rozmaitości gładkiej lub kawałkami liniowej można zadać wiele różnych atlasów, jednak atlasy te mogą opisywać tę samą strukturę. Wprowadza się mianowicie relację równoważności w rodzinie atlasów na danej rozmaitości: dwa atlasy są w relacji, gdy ich suma znów jest atlasem, czyli mapy badanych atlasów muszą spełniać warunek zgodności. W ten sposób każdy atlas wyznacza pewien atlas maksymalny nazywany strukturą – różniczkową lub kawałkami liniową (PL-strukturą). A może dowolne dwa atlasy są równoważne? Nie, tak nie musi być. Wystarczy rozważyć rozmaitość $M_1 = \mathbb{R}$ z jedną mapą $\varphi : x \to x$ oraz M_2 ten sam zbiór $\mathbb{R}$ z inną mapą $\psi : x \to x^3$. Wtedy $\varphi \circ \psi^{-1} : x \to \sqrt[3]{x}$ nie jest dyfeomorfizmem; oba atlasy jednomapowe nie są równoważne. Można jednak wskazać homeomorfizm z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, który w zadanych mapach jest dyfeomorfizmem. Tym odwzorowaniem jest $h : M_2 \to M_1$ zadane wzorem $h(x) = x^3$, które w mapach $\varphi \circ h \circ \psi^{-1}$staje się dyfeomorfizmem $x \to x$. W takiej sytuacji mówimy, że struktury są równoważne. Czyli, atlasy nie były równoważne, ale struktury już tak. Pojawia się dość naturalne przypuszczenie, że dwie struktury (różniczkowe albo typu PL) na danej rozmaitości są zawsze równoważne. Okazało się to jednak nieprawdą. W 1957 roku John Milnor udowodnił ([4]), że na sferze siedmiowymiarowej S^7 istnieje aż 28 nierównoważnych struktur różniczkowych. Było to duże zaskoczenie dla specjalistów, lecz był to dopiero początek niespodzianek. Pojawiły się bowiem dalsze pytania: czy są jakieś zależności pomiędzy różnymi typami struktur? Czy zadanie struktury kawałkami liniowej pociąga za sobą zadanie struktury gładkiej? Czy na rozmaitości topologicznej zawsze można określić zgodną z topologią strukturę gładką albo kawałkami liniową? Udowodniono wiele ciekawych twierdzeń. Na przykład, wiadomo, że jeśli na rozmaitości zadana jest struktura klasy C^1, to istnieje też struktura klasy C^n. Każda dwuwymiarowa i trójwymiarowa rozmaitość topologiczna ma również jednoznacznie wyznaczoną strukturę różniczkową i kawałkami liniową. Może więc są jakieś regularności w „ubieraniu" rozmaitości w struktury. Jednak Milnor i Krvaire w 1961 roku skonstruowali przykład niewygładzalnej rozmaitości topologicznej, czyli takiej rozmaitości topologicznej, która nie dopuszcza zgodnej struktury różniczkowej. Był to przykład dość wyszukany i do tego „wysoko wymiarowy" (dokładniej jedenastowymiarowy), wiec przypuszczano, że w niskich wymiarach i dla „porządnych" rozmaitości takie ekstrawagancje nie będą miały miejsca. Przypuszczenia wydawały się to potwierdzać. Udowodniono ([3]), nie bez wysiłku jednak, że zwykła przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ ma tylko jedną strukturę różniczkową z jednym drobnym wyjątkiem $n = 4$; sądzono, że jest to tylko szczegół związany z techniką i szybko zostanie pokonany. Podano precyzyjne warunki, kiedy rozmaitość topologiczna dopuszcza strukturę typu PL oraz ilu takich nierównoważnych struktur należy się spodziewać ([3]). Wiadomo też, że gdy $n \leq 7$, to struktura kawałkami liniowa gwarantuje istnienie struktury gładkiej (odwrotnie jest dla dowolnego n), a dla $n \leq 6$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy strukturami gładkimi i typu PL. Pytanie, czy istnieją czterowymiarowe rozmaitości topologiczne niewygładzalne pozostawało otwarte.

Problemy ze strukturami pojawiły się raczej dość niespodziewanie, bo nie spodziewano się istnienia struktur nierównoważnych. Wcześniejszym i ważniejszym zagadnieniem nurtujących specjalistów był, jak wspomnieliśmy na początku, problem klasyfikacji. To przecież w tym celu konstruowano rozmaite niezmienniki. Rozmaitości jedno i dwuwymiarowe udało się sklasyfikować. W przypadku rozmaitości trójwymiarowych problem jest, jak dotychczas, otwarty. Udowodniono natomiast, że rozmaitości cztero i wyżej wymiarowych nie da się sklasyfikować. Dokładniej, pokazano, że dla dowolnego algorytmu rozróżniającego czterowymiarowe rozmaitości z dokładnością do homeomorfizmu, zawsze można znaleźć takie dwie rozmaitości, które się nie poddają temu algorytmowi. Nie przeszkadza to jednak w podejmowaniu prób klasyfikacji pewnych specjalnych rodzin rozmaitości.

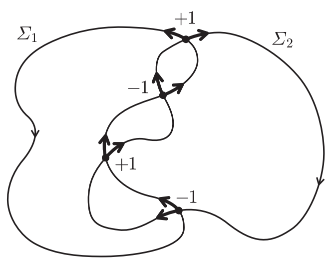
Taką wyróżnioną rodzinę stanowią rozmaitości jednospójne, czyli takie, w których każdą pętlę można ściągnąć do punktu. W przypadku jedno i dwuwymiarowym nie ma tego wiele: prosta, sfera i płaszczyzna. Być może również wśród rozmaitości trójwymiarowych też nie ma zbyt wielu jednospójnych – takie są przestrzeń $\mathbb{R}^3$ i sfera trójwymiarowa. A jeśli prawdziwa jest klasyczna hipoteza Poincarégo (dzięki pracom Perelmana wygląda na to, że jest prawdziwa), to więcej trójwymiarowych rozmaitości jednospójnych nie ma. Za to w przypadku czterowymiarowym mamy już ich całe zatrzęsienie. Oprócz bowiem przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i sfery czterowymiarowej S^4 jest jeszcze $S^2 \times S^2$, zespolona płaszczyzna rzutowa $\mathbb{C}P^2$ i wiele innych, jak choćby obiekt nazywany powierzchnią Kummera, którą definiuje się następująco

$$K = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$$

Podjęto próby sklasyfikowania czterowymiarowych rozmaitości jednospójnych zwartych i bez brzegu (nazywanych także zamkniętymi). Problem, o dziwo, okazał się niełatwy, gdyż dla czterech wymiarów rozmaitości jednospójnych jest zadziwiająco dużo. Jakimi narzędziami dysponują topolodzy w tym przypadku? Do badania rozmaitości czterowymiarowych w ogóle można wykorzystać grupę podstawową, grupy homologii oraz grupy kohomologii. Grupa podstawowa $\pi_1(M)$ nazywana też pierwszą grupą homotopii związana jest z pętlami i mówiąc bardzo nieściśle zlicza typy pętli nie dające ściągnąć się do punktu. Dla rozmaitości jednospójnych jest to, zgodnie z definicją, grupa trywialna, nie daje więc konkretnych informacji. Grupy homologii jednowymiarowych dla rozmaitości M ($H_1(M)$ albo dokładniej $H_1(M, \mathbb{Z})$) wyszukują typy krzywych zamkniętych nie będących brzegami obszarów. Grupy homologii dwuwymiarowych ($H_2(M, \mathbb{Z})$) wskazują typy powierzchni zamkniętych nie ograniczających kawałka przestrzeni itd. Grupy kohomologii są to jakby dualne odpowiedniki grup homologii, podobnie jak przestrzenie sprzężone do danych w przypadku przestrzeni wektorowych. Wykorzystując pewne dobrze znane w topologii algebraicznej zależności zauważono, że dla rozmaitości czterowymiarowych jednospójnych (zamkniętych) ważne są właśnie homologie dwuwymiarowe i związana z nimi tak zwana forma przecięcia. Opiszemy ją może nieco dokładniej, choć z konieczności musimy pozostać przy dość ogólnych intuicjach. Formalnie forma przecięcia I jest odwzorowaniem

$$I : H_2(M, \mathbb{Z}) \times H_2(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

które jest kuzynem iloczynu skalarnego; jest to jakby całkowitoliczbowy iloczyn skalarny na $H_2(M, \mathbb{Z})$. Można je zdefiniować na wiele sposobów odwołując się do struktury rozmaitości M. Przyjmijmy, że od tej pory rozmaitość M będzie rozmaitością zamkniętą – czyli zwartą i bez brzegu – oraz jednospójną. Wybierzmy dwie klasy $[\Sigma_1]$ i $[\Sigma_2]$ w $H_2(M, \mathbb{Z})$ reprezentowane przez powierzchnie Σ_1 i Σ_2 gładko zanurzone w rozmaitości M znajdujące się w położeniu ogólnym, to znaczy mające skończoną liczbę punktów przecięcia (w przestrzeni czterowymiarowej to jest możliwe!). Każdemu takiemu punktowi przecięcia przypisujemy liczby $+1$ albo -1 w zależności od tego, czy wektory bazowe styczne do powierzchni mają orientację zgodną albo przeciwną z wektorami bazowymi stycznymi do całej rozmaitości. Teraz $I([\Sigma_1], [\Sigma_2])$ jest sumą wszystkich znaków przypisanych punktom przecięcia.



Rys. 2

Po sprawdzeniu poprawności określenia dostajemy formę symetryczną i unimodularną. Wykorzystując techniki topologii algebraicznej, definicję formy można przenieść na rozmaitości topologiczne. Analogicznie jak w przypadku iloczynu skalarnego z formą przecięcia związana jest macierz (tu o współczynnikach całkowitych), można więc mówić o **rzędzie** formy i jej **sygnaturze**. Rozważa się też pojęcie **typu** formy. Mówimy, że forma ma typ parzysty, gdy na przekątnej jej macierzy znajdują się same liczby parzyste, w przeciwnym przypadku forma ma typ nieparzysty. Ważną rolę odgrywa też fakt, czy forma jest określona (dodatnio lub ujemnie), czy też jest nieokreślona.

Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

1. $M = S^4$. Ponieważ $H_2(S^4) = \{0\}$, więc $I_M = 0$.
2. $M = \mathbb{C}P^2$. Tu forma przecięcia reprezentowana jest przez macierz [1]. Piszemy w skrócie $I_M = [1]$.
3. Niech M będzie zespoloną płaszczyzną rzutową z przeciwną orientacją. Oznaczmy ją $-\mathbb{C}P^2$. To jest inna rozmaitość niż $\mathbb{C}P^2$, gdyż nie istnieje dyfeomorfizm $\mathbb{C}P^2$ na siebie zmieniający orientację. Dla tej inaczej zorientowanej zespolonej płaszczyzny rzutowej $I_M = [-1]$.
4. $M = S^2 \times S^2$. W tym przypadku
$$I_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Formę tę oznaczmy przez U.
5. Jeśli M jest sumą spójną rozmaitości M_1 i M_2, to $I_M = I_{M_1} \oplus I_{M_2}$ czyli
$$I_M = \begin{bmatrix} I_{M_1} & 0 \\ 0 & I_{M_2} \end{bmatrix}$$

Przypomnijmy pokrótce, że tworzenie sumy spójnej dwóch rozmaitości polega na tym, iż z każdej rozmaitości wycinamy odpowiednie kule (w tym przypadku czterowymiarowe) i sklejamy „wzdłuż” powstałych sfer. Piszemy wtedy: $M = M_1 \# M_2$.

6. Dla powierzchni Kummera K forma jest rzędu 22 i ma postać

$$I_K = E_8 \oplus E_8 \oplus 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Opisane przykłady odgrywają ważna rolę w klasyfikacji czterowymiarowych rozmaitości jednospójnych. Okazało się bowiem, że forma przecięcia jest wymarzonym niezmiennikiem dla tychże rozmaitości.

W 1982 roku Michael H. Freedman ([2]) udowodnił twierdzenie o wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między czterowymiarowymi jednospójnymi rozmaitościami a całkowitoliczbowymi, symetrycznymi i unimodularnymi formami dwuliniowymi.

Dokładniej: jest tak, że każdej formie z powyższymi cechami odpowiada czterowymiarowa jednospójna rozmaitość topologiczna, dla której ta forma jest formą przecięcia. Jeśli forma jest parzysta, to odpowiedniość jest wzajemnie jednoznaczna. Jeśli natomiast forma jest nieparzysta, to istnieją dokładnie dwie czterowymiarowe jednospójne rozmaitości topologiczne realizujące tę formę przecięcia. Jedna z tych rozmaitości ma tę własność, że pomnożona po kartezjańsku przez S^1 dopuszcza strukturę gładką, dla drugiej $M \times S^1$ jest niewygładzalna.

Powraca zatem problem wygładzalności. Z twierdzenia Freedmana wynika, że wśród jednospójnych czterowymiarowych rozmaitości topologicznych jest wiele niewygładzalnych. Należy tylko jeszcze przypomnieć znacznie wcześniejszy wynik Rohlina pochodzący z 1952 roku: jeśli czterowymiarowa rozmaitość jest gładka z parzystą formą przecięcia, to jej sygnatura jest podzielna przez 16.

Czyli przez kontrapozycję: jeśli sygnatura formy parzystej nie dzieli się przez 16, to odpowiadająca jej rozmaitość czterowymiarowa jest niewygładzalna (przypominamy, że rozważamy rozmaitości zamknięte).

Powołując się teraz na twierdzenie Rohlina i Freedmana możemy stwierdzić, że jedyna rozmaitość odpowiadająca formie E_8 jest niewygładzalna. Jeśli teraz zaznaczymy, że istnieją 24 nierównoważne formy rzędu 24 oraz, że liczba form parzystych (określonych) wyższych rzędów rośnie lawinowo (form rzędu 40 jest więcej niż 10^{51} [5]), to widzimy, że niewygładzalność wśród czterowymiarowych rozmaitości topologicznych jest wręcz czymś pospolitym. Jeśli jednak opuścimy założenie zwartości to można pokazać, że rozmaitość dopuszcza zawsze strukturę różniczkową.

Dowód twierdzenia klasyfikacyjnego Freedmana jest skomplikowany i wymaga zastosowania wymyślnych technik i konstrukcji. Warto jednak zwrócić uwagę choćby na zarys idei realizacji dla form tym bardziej, że nie ma pełnej klasyfikacji dla wszystkich form ([1]).

Najpierw konstruuje się rozmaitość odpowiadającą formie E_8. Następnie zauważamy, że jeśli dla pewnej rozmaitości M zachodzi zależność $I_M = I \oplus U$, to istnieje taka rozmaitość N, że $M = N \# (S^2 \times S^2)$ oraz $I = I_N$. Ten fakt nazywany jest regułą wycinania.

Nie ma klasyfikacji wszystkich form, lecz na szczęście formy nieokreślone podlegają klasyfikacji: dowolna nieokreślona forma parzysta ma postać

$kE_8 \oplus mU$, a nieokreślona forma nieparzysta musi być postaci $k[1] \oplus m[-1]$. Co teraz należy zrobić z dowolną formą I? Rozważamy nową formę $I \oplus U$. Jest to już forma nieokreślona, może więc być realizowana i jeśli zastosujemy regułę wycinania, to dostaniemy realizację formy I.

Wypada jeszcze wspomnieć, że trzeba podać konstrukcję rozmaitości „bliźniaczej" do $\mathbb{C}P^2$, tak zwanej „fałszywej" zespolonej płaszczyzny rzutowej, to znaczy takiej rozmaitości, która ma taką samą formę przecięcia jak zwykła zespolona płaszczyzna rzutowa, tylko przemnożona po kartezjańsku przez okrąg nie dopuszcza struktury gładkiej.

Zobaczmy jeszcze, jak wygląda realizacja form za pomocą rozmaitości gładkich. Mamy tu cztery podstawowe przypadki:

a) Jeśli forma jest parzysta i określona, to nie może być realizowana przez rozmaitość gładką. Podstawą takiego stwierdzenia jest twierdzenie Donaldsona. Głosi ono, że jeśli M jest gładką jednospójną czterowymiarową rozmaitością z określoną (dodatnio lub ujemnie) formą przecięcia, to forma ta musi być diagonalna nad $\mathbb{Z}$, czyli ma macierz jednostkową. Ilość gładkich rozmaitości (zamkniętych) w przypadku czterowymiarowym znów została dramatycznie zawężona.

b) Gdy forma jest nieparzysta i określona, to, na podstawie uwagi w poprzednim punkcie, może być realizowana przez rozmaitość gładką tylko wtedy, gdy ma macierz jednostkową.

c) Jeśli forma jest parzysta i nieokreślona, to w niektórych przypadkach może być realizowana przez rozmaitości gładkie. Forma powierzchni Kummera $E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U$ ma tę własność. Wiadomo, że gdy liczba składowych U jest nie mniejsza niż $3/5$ liczby składowych E_8, a liczba składowych E_8 jest parzysta, to daje się realizować przez rozmaitość gładką. W przeciwnym przypadku jej sygnatura nie dzieli się przez 16.

d) Wreszcie, gdy forma jest nieparzysta i nieokreślona, to zawsze daje się realizować przez rozmaitość gładką. Wtedy forma ma postać $k[1] \oplus m[-1]$ i na podstawie reguły wycinania może być realizowana przez sumy spójne zespolonych płaszczyzn rzutowych $k\mathbb{C}P^2 \# m(-\mathbb{C}P^2)$.

Po raz kolejny okazało się, że to, co wydawało się niezwykłe i wyjątkowe, tak naprawdę jest bardzo częste i powinno być uznane za zwyczajne.

Na koniec zauważmy jeszcze, że z twierdzenia Freedmana wynika czterowymiarowa topologiczna hipoteza Poincarégo: czterowymiarowa rozmaitość topologiczna homotopijnie równoważna ze sferą czterowymiarową jest homeomorficzna z tą sferą; sfera S^4 jest jedyną rozmaitością czterowymiarową i jednospójną z zerową formą przecięcia, a rozmaitości homotopijnie równoważne mają jednakowe formy przecięcia. Nierozstrzygnięty pozostaje natomiast problem struktur egzotycznych na S^4, czyli jakby gładki odpowiednik hipotezy Poincarégo.

Nie wiadomo też, czy niejednospójne czterowymiarowe rozmaitości topologiczne dadzą się jakoś scharakteryzować. Może specjalistom uda się znaleźć nowe ciekawe niezmienniki. Wszystko się może zdarzyć.

Literatura

[1] A.T. Fomenko, *Topologiczeskije wariacjonnyje zadaczi* (ros.) Izd. Moskowskowo Uniwersiteta 1984.

[2] M.H. Freedman, *The topology of four dimensional manifolds*, J.Diff. Geom. 17, 1982, pp. 357–454.

[3] R.Kirby, L. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations.* Ann. of Math. Studies 88, Princeton Univ. Press 1977.

[4] J. Milnor, O*n manifolds homeomorfic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64, 1957 pp. 399–405.

[5] J. Milnor, G. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973.

[6] R.J. Stern, *Instantons and the topology of 4-manifolds*, The Math. Intelligencer vol. 5, no. 3, 1983, pp. 39–44.