Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXIV Szkole Matematyki Poglądowej „NIE w matematyce i okolicach”, styczeń 2005.

Dookoła nierówności Hilberta

Krzysztof OLESZKIEWICZ, Warszawa

O nierówności Hilberta napisano już wiele. Trudno byłoby w krótkim artykule rzetelnie opisać jej zastosowania i rozmaite warianty, zwłaszcza że zwykle wymaga to użycia dość skomplikowanych narzędzi matematyki wyższej; przyjrzymy się więc z bliska tylko niektórym, wybranym zagadnieniom. Zainteresowany Czytelnik zechce może przeczytać obszerniejsze, przeglądowe opracowanie [1].

Nierówność Hilberta. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_l$ oraz dowolnych liczb $c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, \ldots, d_l \ge 1$ takich, że $|c_i - c_j| \ge 1$ i $|d_i - d_j| \ge 1$ dla $i \ne j$, spełniona jest nierówność

$$\Big|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}\frac{a_m b_n}{c_m+d_n}\Big| \le \pi\cdot\Big(\sum_{m=1}^{k}a_m^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{l}b_n^2\Big)^{1/2}.$$

W dowodzie nierówności Hilberta wykorzystamy nierówność Buniakowskiego-Schwarza, w wersji znanej już Cauchy’emu (dalej będziemy ją nazywać, jak to jest dość powszechnie przyjęte, nierównością Schwarza). Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$ mamy

$$\Big|\sum_{j=1}^{N}x_j y_j\Big| \le \Big(\sum_{j=1}^{N}x_j^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{N}y_j^2\Big)^{1/2}.$$

Istotnie, jeśli na ciągach $t = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ i $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ określimy wzorem

$$t\circ u = \sum_{j=1}^{N} t_j u_j$$

działanie dwuargumentowe o wartościach rzeczywistych, to łatwo sprawdzić, że spełnia ono dla dowolnych ciągów t, u, v i dowolnej liczby rzeczywistej α następujące warunki: $t\circ u = u\circ t$, $(\alpha t)\circ u = \alpha(t\circ u)$, $t\circ(u+v) = (t\circ u)+(t\circ v)$, $t\circ t \ge 0$, przy czym $t\circ t = 0$ tylko wtedy, gdy $t = 0$. Działanie mające powyższe własności nazywamy rzeczywistym iloczynem skalarnym. Proste przekształcenia pokazują, że $(x\circ x)\alpha^2 + 2(x\circ y)\alpha + (y\circ y) = (\alpha x + y)\circ(\alpha x + y) \ge 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej α, a więc wyróżnik $\Delta = 4(x\circ y)^2 - 4(x\circ x)(y\circ y)$ jest niedodatni, stąd zaś natychmiast wynika, że $|x\circ y| \le (x\circ x)^{1/2}(y\circ y)^{1/2}$, co jest po prostu inną formą zapisu nierówności Schwarza.

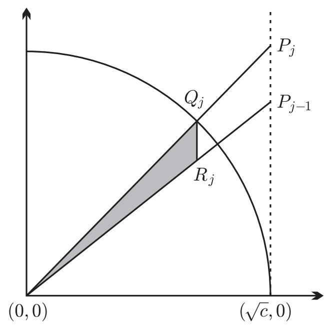
Wróćmy do nierówności Hilberta. Bez straty ogólności możemy założyć, że $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ i $d_1 < d_2 < \ldots < d_l$ – wystarczy bowiem przenumerować wyrazy ciągu (c_m) tak, by ustawić je w kolejności rosnącej i to samo przenumerowanie zastosować do wyrazów ciągu (a_m), aby otrzymać nierówność równoważną wyjściowej; podobnie rzecz się ma z ciągami (d_n) i (b_n). Wygodnie będzie też przyjąć, że $c_0 = d_0 = 0$. Niech $N = k\cdot l$ i potraktujmy sumę podwójną $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}$ jako sumę N składników. Wówczas, stosując nierówność Schwarza do $x_{m,n} = c_m^{1/4}(c_m+d_n)^{-1/2}d_n^{-1/4}a_m$ i $y_{m,n} = d_n^{1/4}(c_m+d_n)^{-1/2}c_m^{-1/4}b_n$, otrzymamy

$$\Big|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}\frac{a_m b_n}{c_m+d_n}\Big| = \Big|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}x_{m,n}y_{m,n}\Big| \le$$

$$\le \Big(\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}x_{m,n}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}y_{m,n}^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{m=1}^{k}a_m^2\sum_{n=1}^{l}\frac{\sqrt{c_m}}{(c_m+d_n)\sqrt{d_n}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{l}b_n^2\sum_{m=1}^{k}\frac{\sqrt{d_n}}{(c_m+d_n)\sqrt{c_m}}\Big)^{1/2},$$

nierówność Hilberta wynika więc natychmiast z następującego lematu.



Lemat. Dla każdego $c > 0$ i dowolnych liczb rzeczywistych $d_0 = 0, d_1, \ldots, d_l$ takich, że $d_j \geq d_{j-1} + 1$ dla $j = 1, 2, \ldots, l$, spełniona jest nierówność

$$\sum_{n=1}^{l} \frac{\sqrt{c}}{(c + d_n)\sqrt{d_n}} < \pi.$$

Lemat udowodnimy geometrycznie. Rozważmy w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie dodatnią ćwiartkę okręgu o promieniu $\sqrt{c}$ i środku $O = (0,0)$. Na prostej $x = \sqrt{c}$ wybieramy punkty P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_l$ tak, by punkt P_j miał współrzędne $(\sqrt{c}, \sqrt{d_j})$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, l$, zaś przez Q_j oznaczamy punkt przecięcia okręgu z odcinkiem OP_j. Niech R_j oznacza punkt wspólny odcinka OP_{j-1} i pionowej prostej przechodzącej przez Q_j. Łatwo zauważyć, że trójkąt OQ_jR_j jest obrazem trójkąta OP_jP_{j-1} w jednokładności o skali $\lambda = |OQ_j|/|OP_j| = \sqrt{c}/\sqrt{c + d_j}$. Zatem

$$\begin{aligned} S_{\Delta OQ_jR_j} &= \lambda^2 S_{\Delta OP_jP_{j-1}} = \lambda^2 \cdot |P_jP_{j-1}| \cdot |OP_0|/2 = \\ &= \frac{c}{c + d_j} \cdot \frac{(\sqrt{d_j} - \sqrt{d_{j-1}})\sqrt{c}}{2} = \\ &= \frac{c\sqrt{c}(d_j - d_{j-1})}{2(c + d_j)(\sqrt{d_j} + \sqrt{d_{j-1}})} \geq \frac{c\sqrt{c}}{4(c + d_j)\sqrt{d_j}}, \end{aligned}$$

z drugiej zaś strony oczywiście

$$\sum_{j=1}^{l} S_{\Delta OQ_jR_j} < \pi(\sqrt{c})^2/4 = \pi c/4,$$

bo trójkąty te mają parami rozłaczne wnętrza i wszystkie zawierają się w rozpatrywanej ćwiartce koła. Skracając o czynnik $c/4$ obie strony oszacowania kończymy dowód lematu i nierówności Hilberta.

Najczęściej rozważa się ciągi $c_m = m$, $d_n = n$ i wówczas nierówność Hilberta przyjmuje postać

$$\sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \frac{a_m b_n}{m + n} \leq \pi \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{l} b_n^2 \Big)^{1/2}.$$

Nawet w tym szczególnym przypadku stałej π nie da się zastąpić żadną mniejszą liczbą, jeśli nierówność ma być prawdziwa dla dowolnych k, l, i ciągów (a_m) i (b_n). Wystarczy rozważyć ciągi zadane wzorami $a_m = 1/\sqrt{m}$ i $b_n = 1/\sqrt{n}$ przy $k, l \to \infty$. Dociekliwy Czytelnik z pewnością zdoła wymyślić dowód geometryczny podobny do przedstawionego powyżej (tym razem trzeba skonstruować trójkąty **pokrywające** jedną ósmą koła) – można też znaleźć go w artykule [2].

Inna ciekawa nierówność, pokrewna nierówności Hilberta, mówi, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, $a_2, \ldots, a_k$ i dowolnych c_1, $c_2, \ldots, c_k > 0$ mamy

$$\sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_m a_n}{c_m + c_n} \geq 0.$$

Istotnie, gdy rozważymy funkcję zmiennej nieujemnej s zadaną wzorem

$$Q(s) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_m a_n}{c_m + c_n} s^{c_m + c_n},$$

łatwo sprawdzimy, iż dla $s > 0$

$$Q'(s) = s^{-1} \Big(\sum_{m=1}^{k} a_m s^{c_m} \Big)^2 \geq 0,$$

że zaś $Q(0) = 0$, mamy stąd $Q(1) \geq 0$, co kończy dowód.

Nieco trudniej wykazać (przy takich samych założeniach), że

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_m a_n}{(c_m+c_n)^\beta}\geq 0,$$

gdzie β jest pewną liczbą dodatnią.

Przenikliwy Czytelnik bez trudu znajdzie odpowiednią modyfikację poprzedniego rozumowania, jeśli β jest liczbą naturalną – wystarczy przeprowadzić indukcję naturalną względem parametru β, przy czym rozumowanie uprości się nieco, jeśli zamiast $s^{c_m+c_n}$ różniczkować $e^{-(c_m+c_n)s}$ dla $s\in[0,\infty)$. Jednakże dla niecałkowitych wartości parametru β potrzebny jest odrobinę subtelniejszy argument.

Dzięki liniowej zamianie zmiennych $w=cs$ dla $\beta>0$ i $c>0$ mamy

$$\int_0^\infty s^{\beta-1}e^{-cs}ds=c^{-\beta}\int_0^\infty w^{\beta-1}e^{-w}dw=c^{-\beta}\Gamma(\beta).$$

Z licznych własności funkcji gamma Eulera Γ dla nas ważne jest jedynie, że $\Gamma(\beta)$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, a to Czytelnik z pewnością uzasadni samodzielnie. Dalej jest już łatwo:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_m a_n}{(c_m+c_n)^\beta}&=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}a_m a_n\int_0^\infty s^{\beta-1}e^{-(c_m+c_n)s}=\\&=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}a_m e^{-c_m s}\cdot a_n e^{-c_n s}\,ds=\\&=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}\Big(\sum_{m=1}^{k}a_m e^{-c_m s}\Big)^2 ds\geq 0.\end{aligned}$$

Na koniec udowodnimy, że dla dowolnych $\beta>0$, $c_1,\,c_2,\ldots,c_k>0$ i ciągów liczb rzeczywistych $a=(a_1,\,a_2,\ldots,a_k)$, $b=(b_1,\,b_2,\ldots,b_k)$ spełniona jest nierówność

$$\Big|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_m b_n}{(c_m+c_n)^\beta}\Big|\leq\Big(\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_m a_n}{(c_m+c_n)^\beta}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{b_m b_n}{(c_m+c_n)^\beta}\Big)^{1/2}.$$

Rzeczywiście, jest to po prostu nierówność Schwarza $|a\circ b|\leq(a\circ a)^{1/2}(b\circ b)^{1/2}$ dla iloczynu skalarnego określonego wzorem

$$a\circ b=\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_m b_n}{(c_m+c_n)^\beta},$$

a że jest to iloczyn skalarny, sprawdzić łatwo – powyżej wykazaliśmy, iż dla każdego ciągu a mamy $a\circ a\geq 0$, zaś udowodnienie pozostałych własności nie powinno sprawić Czytelnikowi kłopotu.

[1] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press and the Mathematical Association of America, Cambridge UK and Washington DC, 2004 (rozdział 10); dostępne także w formie elektronicznej pod adresem www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Publications/Books/CSMC/CSMC_HilbertandCompensatingDifficulties.pdf

[2] K. Oleszkiewicz, *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality*, Amer. Math. Monthly 100 (1993), 276–280.