Artykuł powstał na podstawie zajęć konwersatoryjnych „Metodologia odkrywania” prowadzonych dla studentów specjalności nauczycielskiej w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, jest też zapisem odczytu wygłoszonego na XXXIII Szkole Matematyki Poglądowej „Metody klasyczne i współczesne”.

Metody klasyczne i współczesne w nauczaniu matematyki?

Małgorzata MIKOŁAJCZYK, Wrocław

Metody podawcze i heurystyczne

Tematem pierwszej części artykułu jest porównanie podawczych i heurystycznych metod nauczania matematyki. Trudno tu mówić o jakimś zderzeniu metod klasycznych ze współczesnymi, gdyż jedne i drugie są równie klasyczne (wszak Sokratesa – ojca metody heurystycznej w nauczaniu matematyki – i Euklidesa, który w swoich „Elementach” zawarł niedościgniony wzorzec uporządkowanego dedukcyjnie wykładu, dzieli zaledwie stulecie), a jednocześnie równie współczesne (by przywołać tu chociażby XX-wieczne przykłady z jednej strony heurezy Polyi [5] czy Lakatosa [2], a z drugiej bourbakistów, kładących nacisk na to, by matematykę prezentować w sposób logiczny, uporządkowany, zaczynając od aksjomatów i zasad podstawowych).

Jednak powyższe spostrzeżenia odnoszą się do teorii nauczania. Jeśli zaś przyjrzeć się praktyce, to nie ma wątpliwości, że heureza uprawiana była w czasach starożytnych Greków, gdy do kanonu nauczania należały dysputy mistrza z uczniami, podczas których przekazywał on im swoją wiedzę. Dowody na to można znaleźć choćby w spisanych przez Platona dialogach Sokratesa [4]. Tekst ten zasługuje na osobne i obszerne omówienie, gdyż jest kopalnią informacji o stosowaniu metod heurystycznych w praktyce. Pomijam je, zachęcając do uważnej lektury wspomnianego tekstu. Dziś w nauczaniu dominują metody podawcze, co wnosić można ze stylu pisania podręczników tak szkolnych, jak i akademickich, który nie pozostawia złudzeń co do ich podawczego charakteru.

Agitacja

Jestem głęboko przekonana, że metody heurystyczne stanowią właściwe podejście do nauczania w ogóle, a zwłaszcza do nauczania matematyki. Matematyka nie jest bowiem sportem dla widzów. Jest mało efektowna podobnie jak chód na 50 km, w którym precyzyjnie powtarzane ruchy mogą śmiertelnie widza znudzić. Matematyka jest tajemnicza i ekscytująca tylko wtedy, gdy się ją uprawia, nie ogląda. Każdy matematyk wie, że tekst matematyczny czyta się z ołówkiem w ręku, samodzielnie wykonując opisane w nim operacje, bo „zrobić” znaczy w tym przypadku „zrozumieć”. Niestety podręczniki od czasów Euklidesa uczyniły z matematyki spektakl, a z ucznia – biernego widza. To prawda, że piękno i prostota wielu matematycznych rozumowań może wzbudzać silne emocje estetyczne podczas ich prezentacji, są one jednak dostępne tylko niewielu uczniom – tym najlepszym. Dla ucznia przeciętnego i słabego formalna i abstrakcyjna matematyka jest za trudna w odbiorze i nienaturalna. Dlatego heureza, wbrew potocznym opiniom, jest przede wszystkim metodą pracy z uczniami słabymi (czyli niestety [albo właśnie stety] z większością). Uczeń słaby powinien się z matematyką zaprzyjaźnić, traktować jej obiekty tak, jakby istniały w świecie rzeczywistym (dały się narysować, dotknąć, ulepić, zmierzyć, policzyć, odgadnąć). Nie ma w tym nic niematematycznego. Wszak metody przyrodnicze są podstawowym narzędziem pracy matematyka (vide Archimedes odwołujący się w poszukiwaniu twierdzeń matematycznych do intuicji fizycznej – myślę tu o odkryciu wzoru na pole odcinka paraboli przez zastosowanie eksperymentów myślowych z zakresu mechaniki – ważenie kształtów geometrycznych).

W matematyce najważniejsze jest dokonanie odkrycia, zaś ubranie go w elegancką szatę dedukcyjną to tylko kosmetyka, którą potrafi wykonać przeciętnie uzdolniony matematyczny rzemieślnik, w odkryciu zaś drzemie cały matematyczny geniusz. Trzeba tylko uczniom uświadomić, że jeśli używamy metod przyrodniczych, to nie mamy pewności, czy otrzymane wyniki są prawdziwe. Tę pewność możemy posiąść tylko na drodze formalnego rozumowania. Ale i tak odkrywanie wyniku jest pasjonujące dla większości uczniów. Może więc brak pewności jest niewielką ceną, jaką trzeba za to zapłacić?!

Cechy dobrej heurezy

Popularność zagadek logicznych w gazetach to hołd złożony matematyce. Ludzie potrzebują takiego intelektualnego pobudzenia (w granicach rozsądku). Naturalna jest u nich skłonność do odczuwania przyjemności z rozwikłania zagadki, wyjaśnienia paradoksu. Jest to równie naturalne, jak odczuwanie przyjemności ze słuchania muzyki. Tajemnica zawsze budzi emocje. W nauczaniu dedukcyjnym dowcip zdradzony jest na początku – zdefiniowane są wszystkie obiekty występujące w rozumowaniu i sformułowana dotycząca ich teza. Nie sprzyja to emocjonalnemu zaangażowaniu uczniów (poza wspomnianymi emocjami estetycznymi występującymi u nielicznej elity). W nauczaniu heurystycznym cel nie jest jasno określony, w poszukiwaniach sprawdzamy różne możliwości, nie wiadomo z góry, do jakich wniosków doprowadzi prowadzone rozumowanie. Poniżej zebrałam najważniejsze cechy metody heurystycznej, które skontrastowałam z odpowiednikami dla metody podawczej.

Dedukcjny tok podawczy	**Tok heurystyczny**
szybkie tempo przerabiania materiału	wolne tempo przerabiania materiału
chłód i porządek klasyki	emocje i chaos romantyzmu
pytania precyzyjne i sformalizowane	pytania celowo nieprecyzyjne
teza znana od początku	stawianie i weryfikowanie hipotez, poszukiwanie tezy
poszukiwania ukierunkowane na jeden cel (myślenie konwergencyjne)	szukanie po omacku w wielu kierunkach dające się przedłużać (myślenie dywergencyjne)
myślenie formalne	myślenie intuicyjne
język formalny, matematyczny, symboliczny	język nieformalny, tworzony „na gorąco” przez ucznia
dowodzenie twierdzeń	dokonywanie odkryć
eliminacja błędów	prowokowanie błędów
wiedza pewna (udowodniona)	wiedza wątpliwa (często odgadnięta)
uczy faktów	uczy metody postępowania
obiekty abstrakcyjne	obiekty traktowane, jakby istniały w rzeczywistości
przekaz trudny w odbiorze	przekaz atrakcyjny, przyjazny uczniowi
emocje estetyczne (podziwianie piękna i finezji dowodu) dostępne niewielu	duża dramaturgia zajęć, wykorzystanie emocji rozwiązywania zagadek dostępnych każdemu
bierne śledzenie	aktywne uprawianie

Sztuczki heurystyczne

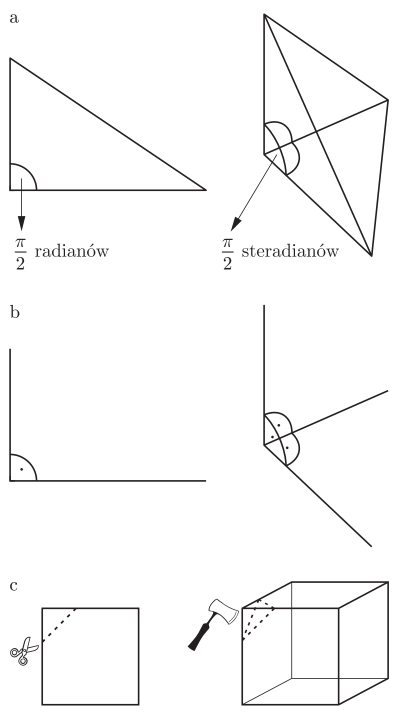
Poniżej zebrałam listę chwytów dydaktycznych, które w naturalny sposób dają pretekst do działań heurystycznych. Każdy z nich ilustruję przykładem pokazującym, na czym dany chwyt polega.

ANALOGIE MIĘDZY ŚWIATAMI

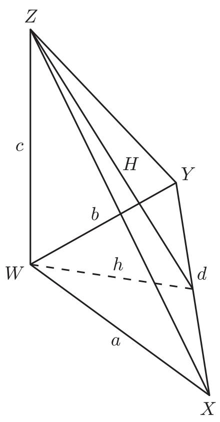
Chodzi tu o analogie między problemami łatwiejszymi i bliskimi uczniowi, a trudniejszymi i zupełnie nowymi. Wśród tych pierwszych uczeń potrafi się w miarę swobodnie poruszać i może ekstrapolować swoją wiedzę na nowe sytuacje. W szczególności będą to analogie między światem płaskim i przestrzennym, prostym i zakrzywionym, z metryką inną niż euklidesowa itp.

Przykład 1. Twierdzenie Pitagorasa 3D

Jak sformułować przestrzenne twierdzenie Pitagorasa? Jeśli uznać, że trójwymiarowym odpowiednikiem trójkąta jest czworościan (dlaczego?), to twierdzenie powinno mówić coś o czworościanach prostokątnych. Czym



Rys. 1. Różne pomysły na czworościan prostokątny.



Rys. 2. Dowód twierdzenia Pitagorasa 3D.

jest jednak *czworościan prostokątny*? Myślimy przez analogię. W trójkącie prostokątnym *kąt przy jednym wierzchołku jest prosty*. Podobnie w czworościanie prostokątnym – *kąt przy jednym z wierzchołków powinien być prosty*. Pojawia się potrzeba wprowadzenia definicji kąta bryłowego (w analogii do definicji płaskiej oczywiście). Inne możliwe podejście: *bokami trójkąta prostokątnego są dwa prostopadłe odcinki*, niech *krawędziami czworościanu prostokątnego będą trzy wzajemnie prostopadłe odcinki*. Można jeszcze inaczej: trójkąt prostokątny jest *„odciętym narożnikiem” kwadratu*, czworościan prostokątny może być *„odciętym narożnikiem” sześcianu* (brak formalizmu tych sformułowań jest całkowicie zamierzony). Można jeszcze inaczej... Ostatnie dwa określenia definiują ten sam obiekt, ale czy są to wszystkie czworościany prostokątne w sensie pierwszego określenia?

Te rozważania dotyczyły na razie tylko założeń „twierdzenia Pitagorasa 3D”, a co z tezą? W sposób naturalny możemy w naszym prostokątnym czworościanie wskazać trzy ściany przyprostokątne i jedna przeciwprostokątną. Można więc próbować tak: *suma objętości sześcianów zbudowanych na przyprostokątnych czworościanu prostokątnego jest równa...* Ale jak zbudować sześcian na trójkątnej ścianie? Może jednak odwołać się do postaci algebraicznej. W wersji 2D suma kwadratów długości boków przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości boku przeciwprostokątnego. W wersji 3D może być: *suma kwadratów (a może sześcianów?) pól ścian przyprostokątnych jest równa kwadratowi (sześcianowi?) pola ściany przyprostokątnej.* A może jeszcze inaczej? Czy w ogóle któraś z tych tez jest prawdziwa? Te nieprawdziwe łatwo obalić, rozważając przykład czworościanu prostokątnego o prostopadłych krawędziach długości jeden (rachunki są wtedy bardzo łatwe). Dowód prawdziwej przedstawia rys. 2. Jednak ważniejszy od jego przeprowadzenia jest tu sam proces poszukiwania sformułowania twierdzenia. A czy zachodzi twierdzenie odwrotne?

$$\begin{aligned} P^2_{\triangle WXZ} + P^2_{\triangle WXY} + P^2_{\triangle WYZ} &= \frac{a^2c^2}{4} + \frac{d^2h^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} = \frac{(a^2+b^2)c^2}{4} + \frac{d^2h^2}{4} \\ &= \frac{d^2c^2}{4} + \frac{d^2h^2}{4} = \frac{d^2(c^2+h^2)}{4} = \frac{d^2H^2}{4} = P^2_{\triangle XYZ} \end{aligned}$$

Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Liczba przekątnych wielościanu.
- Gdzie jest środek czworościanu?
- Suma kątów czworościanu / trójkąta sferycznego.
- Punkty szczególne czworościanu / trójkąta sferycznego.
- Twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym 3D.

ANALOGIE MIĘDZY POJĘCIAMI

To chwyt podobny do poprzedniego. Tym razem wykorzystujemy analogie między pojęciem znanymi uczniowi wcześniej, na bazie którego tworzy on pojęcie pokrewne, formułuje jego definicję i bada własności.

Przykład 2. Liczby trojacze

Odwołujemy się tu do znanego pojęcia liczb bliźniaczych, czyli *par liczb pierwszych odległych o* 2, np. $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$. Liczby trojacze mogłyby być zatem *trójkami liczb pierwszych odległych o* 2, np. $(3,5,7)$. Trudność ze znalezieniem innych przykładów nasuwa podejrzenie, że być może ich nie ma. I rzeczywiście, nietrudno wykazać, że jest to jedyna trójka liczb o podanej własności (dlaczego?). Widać, że taka definicja liczb trojaczych nie byłaby ciekawa, opisywałaby tylko jeden obiekt. Czy można ją poprawić? Może trzeba brać *trójki liczb pierwszych odległych o* 3? Szybko można jednak stwierdzić, że to także nie najlepszy pomysł (dlaczego?). A może zamiast brać *trójki liczb pierwszych, dla których ciąg różnic jest stały*, wziąć *trójki liczb pierwszych, dla których ciąg różnic jest arytmetyczny*. Szukalibyśmy więc liczb postaci $(p, p+r, p+2r)$. Oczywiście r musi być parzyste (dlaczego?). Przykładów można znaleźć wystarczająco wiele, aby sensownym wydało się badanie tak zdefiniowanego pojęcia [$r=4:(3,7,11)$, $r=6:(5,11,17),(11,17,23),(17,23,29)$, $r=8:(3,11,19), r=10:(3,13,23)$, $r=12:(5,17,29),(17,29,41),(29,41,53)$, $r=14:(3,17,31)$].

Nasze rozumowanie może jednak pójść zupełnie inną drogą. Wróćmy do punktu wyjścia, czyli do liczb bliźniaczych. Można myśleć, że są to *pary liczb pierwszych leżących możliwie najbliżej siebie* (mogłyby to być zatem *pary kolejnych liczb naturalnych, które są pierwsze*, ale taka definicja znowu opisywałaby tylko jeden obiekt, więc najmniejszą sensowną odległością jest 2). Jeśli rozważymy trójki liczb pierwszych, to (poza nieciekawymi przykładami) najmniejsze odległości między nimi uzyskamy w konfiguracji

$$p_1 \xrightarrow{+2} p_2 \xrightarrow{+4} p_3 \quad \text{lub} \quad p_1 \xrightarrow{+4} p_2 \xrightarrow{+2} p_3.$$

I tym razem znajdujemy sporo przykładów: $(5,7,11)$, $(7,11,13)$, $(11,13,17)$, $(13,17,19)$, $(17,19,23)$ i in., więc tak zdefiniowane pojęcie wydaje się być interesujące i możemy przystąpić do badania własności tych liczb. Zauważmy też, że podobnie można wprowadzić definicję liczb czworaczych jako czwórek liczb pierwszych w układzie:

$$p_1 \xrightarrow{+2} p_2 \xrightarrow{+4} p_3 \xrightarrow{+2} p_4.$$

Są to po prostu możliwie najbliżej położone pary liczb bliźniaczych. Teraz oprócz badania własności tych nowo zdefiniowanych zbiorów liczb możemy także badać związki zachodzące między nimi, np. czy istnieją liczby trojacze niebędące czworaczkami.

Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Czwórki pitagorejskie.
- Trójkąt Pascala „modulo”/Dirichleta.
- Czworościan Pascala.

LUŹNE SKOJARZENIA

Poprzednie chwyty dawały początkującemu badaczowi wsparcie w postaci analogii do znanych obiektów i metod. Tym razem dajemy uczniowi pełną swobodę definiowania i badania nowych pojęć. Odwołujemy się do skojarzeń, jakie budzi ich nazwa (dlatego powinny być to „nazwy mówiące”, co prawda zawsze można odwołać się do uczniowskiej próżności i formułować np. twierdzenie Janka Kosa, ale to już wyższa szkoła jazdy). Uczeń opracowuje definicję pojęcia, podaje przykłady i kontrprzykłady, bada własności.

Przykład 3. Liczby Szymborskiej

W tym przykładzie odwołujemy się do znanego wiersza W. Szymborskiej *Liczba Pi*, w którym poetka stawia hipotezę, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby π występują wszystkie liczby naturalne (”mój numer telefonu”, „twój numer koszuli”, „ilość mieszkańców”, „obwód w biodrach” – odczytanie tej hipotezy z wiersza samo w sobie wydaje się ciekawym zadaniem). Poprzez naturalne skojarzenie możemy nazwać liczbami Szymborskiej te liczby, które zawierają w swoim rozwinięciu wszystkie liczby naturalne. Aby wygodniej było się tym pojęciem posługiwać, warto dodać, że rozważamy tylko liczby z przedziału $[0,1]$. Najprostszym przykładem takiej liczby jest 0,123456789101112131415... O co można teraz zapytać? Na jakich miejscach w tej liczbie występuje pierwszych pięć razy cyfra 7? Jaka cyfra jest na 33. miejscu po przecinku? A na 333.? Ile razy występuje w tej liczbie 13? Czy są inne przykłady liczb Szymborskiej? Czy istnieją takie liczby wymierne? Czy można podać przykład liczby Szymborskiej z przedziału [0,234; 0,235]? A z przedziału $[\pi/5, \pi/4]$?

Kłopot w tym, że na powyższe pytania bardzo łatwo znaleźć odpowiedź, a tym samym stworzone pojęcie wydaje się mało interesujące. Spróbujmy podejść do problemu subtelniej. Nazwijmy liczbami Szymborskiej stopnia k liczby, w których zapisie dziesiętnym można odnaleźć liczby naturalne $1, 2, \ldots, k$ i które mają najmniejszą możliwą liczbę cyfr. Teraz jest znacznie ciekawiej. Ile cyfr mają liczby Szymborskiej stopnia 5? A stopnia 12? Ile jest liczb Szymborskiej stopnia 10? 11? 12? 13? 19? Jaka jest najmniejsza liczba Szymborskiej stopnia 100? Czy suma cyfr każdej liczby Szymborskiej danego stopnia jest taka sama? Jakie jest najlepsze oszacowanie dla liczby cyfr liczby Szymborskiej stopnia k?

Liczba Pi
Podziwu godna liczba Pi
trzy koma jeden cztery jeden.
Wszystkie jej dalsze cyfry też
są początkowe
pięć dziewięć dwa, ponieważ nigdy się
nie kończy.
Nie pozwala się objąć sześć pięć trzy
pięć spojrzeniem,
osiem dziewięć obliczeniem,
siedem dziewięć wyobraźnią,
a nawet trzy dwa trzy osiem żartem,
czyli porównaniem
cztery sześć do czegokolwiek
dwa sześć cztery trzy na świecie.
Najdłuższy ziemski wąż
po kilkunastu metrach się urywa.
Podobnie, choć trochę później,
czynią węże bajeczne.
Korowód cyfr składających się
na liczbę Pi
nie zatrzymuje się na brzegu kartki,
potrafi ciągnąc się po stole,
przez powietrze,
przez mur, liść, gniazdo ptasie, chmury,
prosto w niebo,
przez całą nieba wzdętość i bezdenność.
O, jak krótki, wprost mysi,
jest warkocz komety!
Jak wątły promień gwiazdy,
że zakrzywia się w lada przestrzeni!
A tu dwa trzy piętnaście
trzysta dziewiętnaście
mój numer telefonu twój numer koszuli
rok tysiąc dziewięćset siedemdziesiąty
trzeci szóste piętro
ilość mieszkańców sześćdziesiąt pięć
groszy
obwód w biodrach dwa palce szarada
i szyfr,
w którym słowiczku mój a leć, a piej
oraz uprasza się zachować spokój,
a także ziemia i niebo przeminą,
ale nie liczba Pi, co to to nie,
ona wciąż swoje niezłe jeszcze pięć,
nie byle jakie osiem,
nie ostatnie siedem,
przynaglając,
ach przynaglając gnuśną wieczność
do trwania.
Wisława Szymborska

Przykłady do samodzielnego zbadania:
• Operator leniwy – [8].
• Liczby bezkwadratowe.
• Liczby oszczędne.
• Palindromy zaprzyjaźnione.
• Wielościany/ wielokąty półforemne.
• Wielokąty równoległoboczne/wielościany równoległokrawędziowe / równoległościenne.

PYTANIE Z INWERSJĄ

Jest to niemal mechaniczny sposób tworzenia otwartych zadań poszukiwawczych z zamkniętych zadań standardowych. Często wystarczy jedynie odwrócić kierunek zadawanego pytania, aby zamiast myślenia konwergencyjnego uruchomić u ucznia myślenie dywergencyjne. Na przykład
- zamiast pytać: *Ilu cyfr potrzeba do ponumerowania 720 stron „Słownika wyrazów obcych”?* pytamy: *Ile stron liczy „Mała encyklopedia powszechna”, jeśli do ich ponumerowania użyto 3388 cyfr?*,
- zamiast pytać: *Jakie pole ma kwadrat powstający przez połączenie odcinkami środków kolejnych boków danego kwadratu?* pytamy: *Jak skonstruować kwadrat o polu dwa razy większym niż pole danego kwadratu?*,
- zamiast pytać: *Jaki zbiór jest dziedziną funkcji* $2x + 3$*, jaki funkcji* $1/x$*?* pytamy: *Dziedziną jakiej funkcji jest zbiór* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$*, a jakiej zbiór* $\{2\}$*?*.

Zauważmy, że pytania poddane takiemu zabiegowi „inwersji” stają się głębsze, może trudniejsze, ale i ciekawsze, gdyż nie narzuca się żaden oczywisty sposób rozwiązania problemu. Poniższe przykłady pokazują, jak szerokie są możliwości skutecznego stosowania tej metody do różnych typów standardowych zadań na wszystkich poziomach edukacji.

Przykład 4. Rachunki

W nauczaniu wczesnoszkolnym dużo miejsca zajmują ćwiczenia biegłości rachunkowej. Mimo urozmaicenia formy, właściwie zawsze sprowadzają się do suchych rachunków. Zobaczmy kilka takich ćwiczeń w standardowej wersji podręcznikowej (A) oraz po zastosowaniu zabiegu inwersji (B).

wersja A.
Wypełnij puste pola tabliczki dodawania.

+	**12**	**35**
17		
21		

+	**7**	**32**
24		
18		

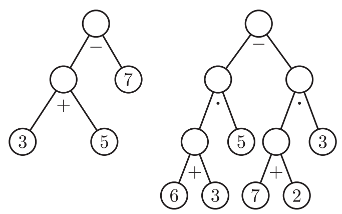
wersja A.
Wypełnij puste pola tabliczki dodawania.

+		
	26	**34**
	40	**48**

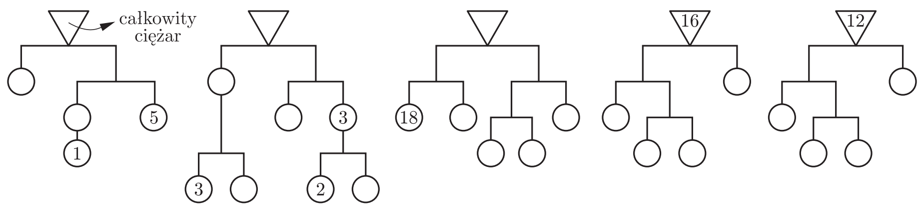
+		
	2	**10**

+		
	42	
		35

wersja A.
Uzupełnij drzewa działań.



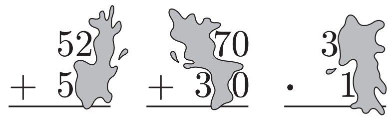
wersja B. Uzupełnij ciężary na wagach.



wersja A. Oblicz wyniki działań.

$$\begin{array}{r}524\\ +575\\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{r}270\\ +354\\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{r}342\\ \cdot\ 15\\ \hline\end{array}$$

wersja B.
Która z liczb może być wynikiem działania? Dlaczego inne nie mogą?



a) 10	a) 700	a) 3663
b) 105	b) 400	b) 2336
c) 150	c) 1090	c) 9999

Do rozwiązania zadań w wersji B nie wystarcza już sama biegłość rachunkowa. Trzeba jeszcze opracować strategię poszukania rozwiązania. Sam wynik może być niejednoznaczny albo wcale nie istnieć. Powstają naturalne pytania: *Od czego zacząć? Jak rozpoznawać niemożliwe tabliczki czy wagi?* itp. Zadania nabierają otwartego charakteru.

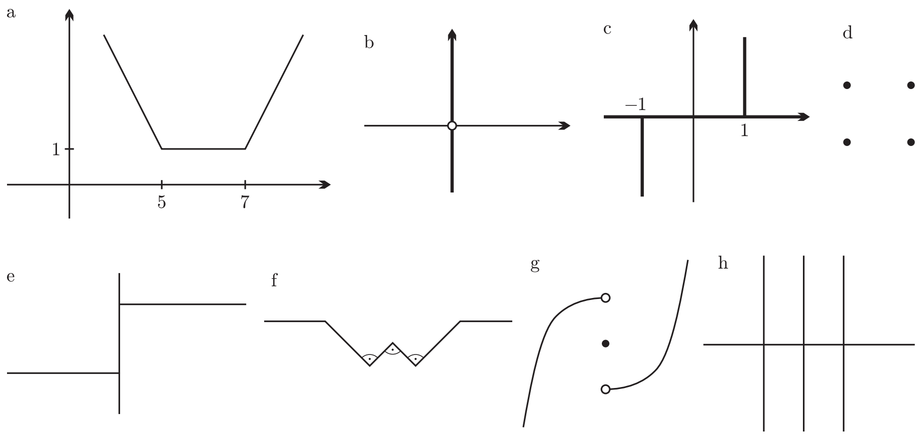
Przykład 5. Równania

wersja A. Rozwiąż równania a) $3x - 7 = 0$, b) $2x^2 - 6x + 4 = 0$, c) $2x^2 + 2y^2 = 0$, d) $2ax + 4 = 0$

wersja B. Podaj równanie, którego rozwiązaniem jest zbiór:
a) $\{2, 3\}$, b) $\{(0, 0)\}$, c) $[2, 3]$, d) $\begin{cases} \{\frac{5}{a}\}, & \text{gdy } a \neq 0 \\ \emptyset, & \text{gdy } a = 0 \end{cases}$.

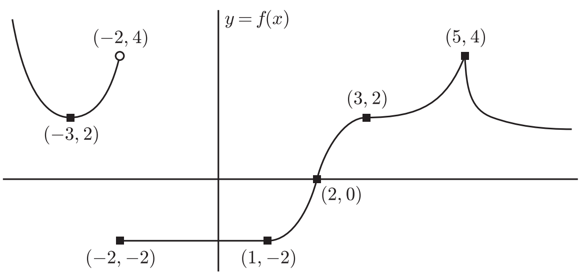
wersja A. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:
a) $y = \operatorname{sgn}(-x^2 + 5) \cdot | - x^2 + 5|$, b) $y = \operatorname{sgn} \sin x$,
c) $y = |5 - x| + 5 - x + |x - 7| + x - 7 + 1$,
d) $\frac{|x|}{|y|} = 0$, e) $y = |y| \cdot x$.

wersja B. Podaj równanie, które opisuje zaznaczony zbiór punktów.



Przykład 6. Funkcje

wersja A. Opisz słowami „co robi" dana funkcja z liczbą x lub parą liczb x, y.
a) $f(x) = x - [x]$, b) $f(x) = [\log 10x] + 1$,
c) $f(x, y) = 1/2(x + y - -|x - -y|)$



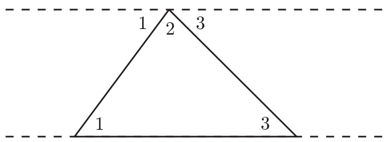
wersja B. Zapisz wzorem funkcje opisane słowami.
$f(x)$ to odległość liczby x od najbliższej liczby całkowitej,
$f(x)$ to obcięcie liczby x do dwóch miejsc po przecinku,
$f(x)$ to zaokrąglenie liczby x do pierwszego miejsca po przecinku,
$f(x)$ to cyfra dziesiątek liczby x,
$f(x)$ to reszta z dzielenia x przez 3.

wersja A. Na podstawie wykresu uzupełnij tabelę zmienności funkcji f.

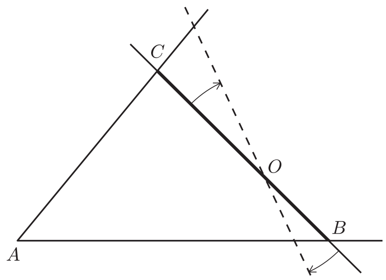
X	$-\infty$	...	-3	...	-2	...	1	...	2	...	3	...	5	...	∞
$f(x)$															
$f'(x)$															

wersja B. Uzupełnij tabelkę zmienności i naszkicuj wykres funkcji.

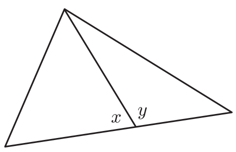
X	$-\infty$	...	-1	...	1	...	2	...	∞
$f(x)$		$\searrow$	0.5	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	



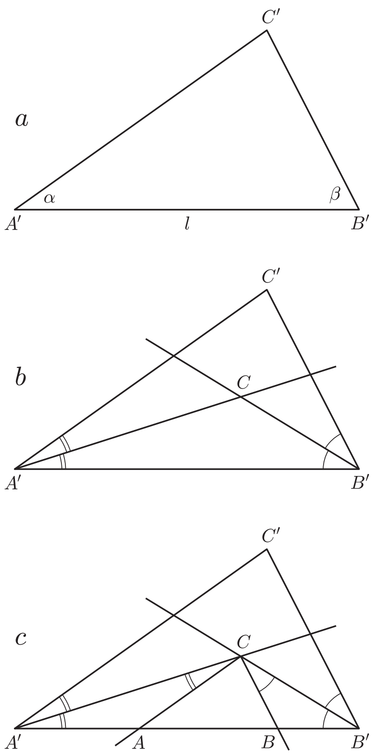
Rys. 3.



Rys. 4



Rys. 5. Dowód twierdzenia: *Jeżeli suma kątów trójkąta jest stała, to wynosi 180°.*



Rys. 6

OD TYŁU

Ten chwyt jest zastosowaniem metody inwersji do heurystycznego wprowadzania dowodów w geometrii (dowody typu „Patrz!") oraz nauki o konstrukcjach geometrycznych. Inwersja polega tu na postawieniu pytania typu: *Czego dowodzi to rozumowanie?, Jakie było polecenie do przedstawionego rozwiązania zadania konstrukcyjnego?.*

Przykład 7. Co to za dowód?

Dowód jakiego faktu przedstawiono na rysunku 3?

Przykład 8. Na czym polega ten dowód?

Opierając się na intuicji fizycznej (rys. 4) możemy postawić hipotezę, że *suma kątów w dowolnym trójkącie jest taka sama.* Hipotezę tę potwierdzają wyniki pomiarów, a nawet pozwalają na jej wzmocnienie, zauważamy bowiem, że *suma kątów w dowolnym trójkącie wynosi* $180°$.

W trójkącie ABC jeden bok BC może obracać się wokół punktu O. Po takim ruchu kąt A pozostaje niezmieniony, kąt B maleje, a C – rośnie. Intuicja podpowiada, że jeden z nich maleje o tyle, o ile drugi rośnie (bo jest to ten sam obrót), zatem suma kątów trójkąta pozostaje bez zmian.

Wyposażeni w taką hipotezę z łatwością odczytamy z rys. 5 dowód twierdzenia. Jak?

Przykład 9. Co to za konstrukcja?

Rysunek 6a, b, c przedstawia kolejne etapy rozwiązania pewnego zadania konstrukcyjnego. Jak brzmiała jego treść? Co było dane, a co należało skonstruować?

Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Suma kątów n-kąta.
- Wzór na pole trójkąta/innych wielokątów.

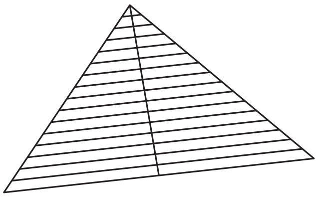
INTUICJA

Ważną cechą nauczania heurystycznego jest rezygnacja z formalnie poprawnych dowodów na rzecz dowodów intuicyjnych, niewchodzących w szczegóły techniczne rozumowań, ale przedstawiających ich główne idee.

Przykład 10. Środek ciężkości trójkąta

Zgodnie z zasadami sztuki nauczania heurystycznego możemy zadać pytanie bardzo ogólne i nieprecyzyjne: *Gdzie jest środek trójkąta?.* O jaki punkt chodzi? Może o ten znajdujący się w jednakowych odległościach od wierzchołków? Niestety może on leżeć na zewnątrz trójkąta, a trudno uznać za środek figury punkt leżący poza nią. Tę samą wadę ma ortocentrum trójkąta, czyli punkt przecięcia się prostych zawierających jego wysokości. Natomiast już punkt leżący w jednakowych odległościach od boków trójkąta lub punkt o najmniejszej sumie odległości od wierzchołków tej wady nie mają i są dobrymi kandydatami na środek trójkąta. Podobnie jest nim środek ciężkości trójkąta, którym się teraz zajmiemy.

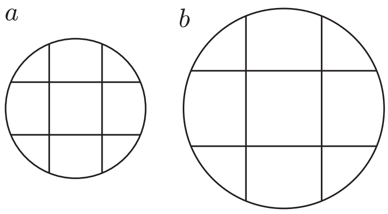
Intuicja fizyczna podpowiada, że w trójkącie istnieje taki punkt, że jeśli podeprzemy tam figurę, to pozostanie ona w równowadze. Ma on tę własność, że jeśli umieścimy w nim punktowo masę całej figury, to nie zmienią się jej własności grawitacyjne. Ale jak taki punkt znaleźć? Nie ma żadnych wątpliwości, że w przypadku trójkąta równobocznego własność tę ma jego środek. A jak jest dla innych trójkątów? Nie widać tego od razu. Pozostańmy więc przy figurach, dla których potrafimy określić położenie środka ciężkości. Niewątpliwie będą wśród nich: odcinek, koło, kwadrat czy prostokąt. Wykorzystajmy to. Wypełnijmy trójkąt odcinkami równoległymi do jednego z boków i na każdym z nich zaznaczmy środek ciężkości, leżący oczywiście w środku geometrycznym. Można myśleć obrazowo, że masa każdego z tych odcinków jest „rozsmarowana" wzdłuż jego całej długości, a my „zbieramy" ją w środku ciężkości odcinka. W ten sposób masę całego trójkąta „zbierzemy" na „odcinku środków", czyli odcinku łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. (Dlaczego środki układają się wzdłuż odcinka?) Wystarczy teraz znaleźć środek ciężkości tego odcinka. Nietrudno dojść do przekonania, że nasuwająca się natychmiast odpowiedź, że jest to środek tego odcinka, jest błędna. Nie jest to bowiem taki zwykły odcinek. Masa jest na nim rozłożona nierównomiernie (wskazuje to lukę w naszym rozumowaniu – brak założenia o jednorodności figur). Jeden jego koniec jest lekki, a drugi ciężki. Jasne jest, że środek ciężkości przesunie się w tym przypadku w stronę końca cięższego (czyli wypadnie poniżej połowy, bliżej boku trójkąta, na który była opuszczona środkowa). Ale jak bardzo się obniży? Do 1/3? 1/4? A może zależy to od rodzaju trójkąta? W każdym razie na pewno będzie nadal leżał na środkowej. Powtarzając to samo rozumowanie dla podziału na odcinki równoległe do innego boku zauważamy, że szukany punkt leży na każdej ze środkowych. Teraz znowu musimy odwołać się do intuicji, że środek ciężkości w trójkącie jest tylko jeden. Musi być nim więc punkt przecięcia środkowych.



Rys. 7

Przykład 11. Skąd się biorą wzory z π?

Większość uczniów zapytana: *co to jest π?* odpowie, że to pole koła jednostkowego lub długość półokręgu jednostkowego. Jednak tylko jedno z tych określeń możemy przyjąć za definicję π, a to drugie należy wykazać jako jej własność. Przyjmijmy więc, że π to pole koła jednostkowego, tzn. liczba sztuk (niekoniecznie całkowita, a nawet niekoniecznie wymierna) kwadratów jednostkowych, jakie się w nim mieszczą i wypełniają je dokładnie. Przy takim określeniu „uzasadnimy" poprawność różnych wzorów, w których występuje π. Zacznijmy od pola koła o promieniu r. Takie koło wygląda tak samo, jak koło jednostkowe, jest tylko trochę (dokładnie r razy) większe (lub mniejsze). Można myśleć, że jest to koło jednostkowe oglądane przez r-krotnie powiększające szkiełko. Co zmieni się na rysunku 8a, jeśli popatrzymy nań przez takie szkiełko? W zasadzie nic. Koło będzie wypełnione w identyczny sposób przez kwadraty (przypomnijmy – jest ich π), tyle że nie będą one już jednostkowe. Jakie jest pole jednostkowego kwadratu, oglądanego przez r-krotnie powiększające szkiełko? Bok takiego kwadratu rośnie r razy, więc ma długość r, a pole kwadratu wynosi r^2. Zatem pole koła z rys. 8b obliczymy biorąc π kwadratów o polu r^2 każdy. Razem będą miały pole πr^2.



Rys. 8. Koło jednostkowe przed powiększeniem i po.

A skąd się bierze wzór na obwód koła? Umieśćmy współśrodkowo dwa koła o promieniach R i r, tak aby powstał pierścień o grubości h. Pole tego pierścienia możemy łatwo obliczyć na podstawie odkrytego wzoru na pole koła:

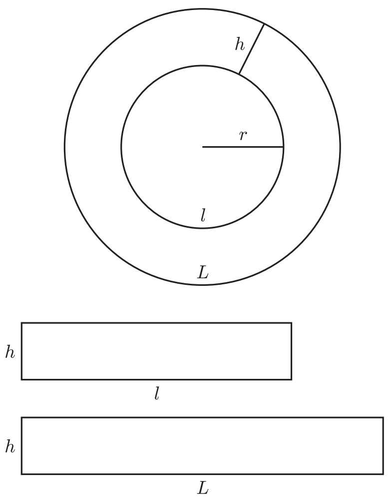
$$P_{PIERŚCIENIA} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(r+h) - \pi r^2 = 2\pi rh + \pi h^2.$$

Pomyślmy teraz o dwóch prostokątnych kawałkach jedwabiu o szerokości h. Długość jednego z nich jest taka, jak obwód wewnętrznego koła, a drugiego – jak obwód koła zewnętrznego. Bierzemy teraz dłuższy pasek i przykładamy go od wewnątrz do brzegu większego koła. Co się dzieje? Pasek układa się w pierścień, ale marszczy się w pobliżu mniejszego koła. To że się marszczy oznacza, że jest go za dużo. Zatem pole prostokąta $h \times L$ jest większe niż pole pierścienia. Jeśli krótszy pasek przyłożymy od zewnątrz do brzegu mniejszego koła, to w pobliżu większego koła zacznie się on rozrywać – będzie go za mało. Więc pole prostokąta $h \times l$ jest mniejsze niż pole pierścienia. Otrzymujemy zatem podwójną nierówność: $hL < 2\pi rh + \pi h^2 < hl$, którą upraszczamy dzieląc wszystkie strony przez h. Otrzymujemy:

$$l < 2\pi r + \pi h < L$$

zaciskanie

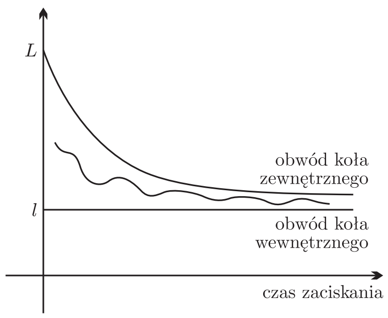
$$l \quad = \quad 2\pi r$$



Rys.9

Wyobraźmy sobie teraz, że większe koło zaczyna zaciskać się na mniejszym. Co dzieje się z wielkościami w nierówności? Obwód mniejszego koła l pozostaje bez zmian, L coraz bardziej zbliża się do l, a wielkość, która zawsze jest pomiędzy nimi nie ma innego wyjścia, jak tylko też zbliżać się do l, co ilustruje rys. 9.

Co oznacza proces „zaciskania się" większego koła na mniejszym dla wyrażenia w środku nierówności? Podczas zaciskania h staje się coraz mniejsze, zatem coraz bliższy zera staje się drugi składnik tego wyrażenia, a całość zbliża się do liczby $2\pi r$. Ponieważ wcześniej stwierdziliśmy, że wielkość ta zbliża się do l (czyli obwodu koła o promieniu r), więc liczby te są równe i mamy: $l = 2\pi r$.

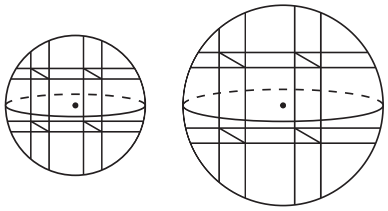


Rys. 10

Teraz wystarczy zastosować analogiczne rozumowanie w przypadku przestrzennym. Do tego potrzebna jest jednak informacja, ile wynosi objętość kuli jednostkowej. Jeżeli uda się odkryć, że jest to $4\pi/3$, to dalej jest już łatwo. Można myśleć, że kula o promieniu r, to kula jednostkowa oglądana przez takie trójwymiarowe r-krotnie powiększające szkiełko. Skoro w kuli jednostkowej zmieściło się dokładnie $4\pi/3$ sztuk sześcianów jednostkowych, to po powiększeniu jest ich nadal tyle samo, ale teraz każdy z nich ma objętość r^3 (bo ma krawędź r).

Podobnie jak w przypadku płaskim umieszczamy współśrodkowo dwie kule o promieniach R i r. Pomiędzy nimi powstaje skorupa o grubości h i objętości:

$$V_{SKORUPY} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2h + 3rh^2 + h^3).$$


Rys. 11 (a, b). Kula jednostkowa przed powiększeniem i po.

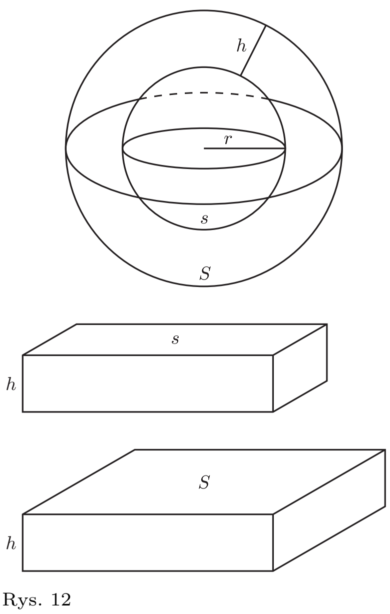
Wyobraźmy sobie teraz, że mamy dwie warstwy gąbki o grubości h, powierzchnia (podstawy) jednej jest taka, jak powierzchnia mniejszej, a drugiej – jak powierzchnia większej kuli. Większą gąbką wyściełamy od wewnątrz dużą kulę, a mniejszą – otulamy małą. W pierwszym przypadku gąbka się marszczy, w drugim – rozciąga. Daje to nierówność: $hs < \frac{4}{3}\pi(3r^2h + 3rh^2 + h^3) < hS$, a po podzieleniu stronami przez h:

$$s < \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rh + h^2) < S$$

zaciskanie

$$s \quad = \quad 4\pi r^2$$

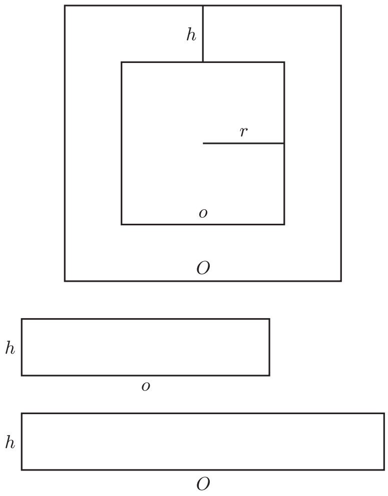
Teraz następuje „zaciskanie się" większej kuli na mniejszej. Powierzchnia małej kuli się nie zmienia, powierzchnia dużej zaczyna się do niej zbliżać wraz z wielkością leżącą pomiędzy nimi, która jednocześnie (wobec h malejącego do zera) zbliża się do liczby $4\pi r^2$. Tyle zatem wynosi powierzchnia sfery o promieniu r.



Rys. 12

Takie rozumowanie można przeprowadzić już z uczniami gimnazjum. Licealiści powinni zauważyć, że pole pierścienia (objętość skorupy) to przyrost funkcji pola (objętości) w zależności od promienia, zaś h jest przyrostem argumentu (promienia), zatem po podzieleniu tych wielkości proces zaciskania nie jest niczym innym, jak obliczaniem pochodnej. Rzeczywiście, jeśli $f(r) = \pi r^2$, to $f'(r) = 2\pi r$, a jeśli $f(r) = 4/3\pi r^3$, to $f'(r) = 4\pi r^2$. Te obserwacje są dość zaskakujące, by stały się punktem wyjściowym do powyższych rozumowań.

Można też stawiać dalsze pytania. *Czy dla wyższych wymiarów jest podobnie? Co to jest 4-wymiarowa kula? Czym jest jej objętość?* Można też, idąc w innym



Rys. 13. $P_{PIER\acute{S}CIENIA} = 8rh + 4h^2$; $P_{\square} = 4r^2$, $O_{\square} = 8r$

$$o \cdot h < 8rh + 4h^2 < O \cdot h$$
$$o < 8r + 4h < O$$

zaciskanie

$$o = 8r$$

kierunku, zastanawiać się, czy jakieś inne figury mają tę własność, że ich obwód (powierzchnia) jest pochodną pola (objętości). Wykonując sprawdzenie dla kwadratu uczniowie przekonują się, że tak nie jest, przecież pole to a^2, a obwód to $4a$, nie zaś $2a$. Jednak próba przeprowadzenia analogicznego rozumowania pozwala poprawić błąd i wszystko się zgadza. Czy dla sześcianu też? A dla innych figur?

Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Twierdzenie Cevy (fizycznie).
- Punkt Torricellego (fizycznie).
- Objętość walca/stożka o dowolnej podstawie/kuli jednostkowej.
- Pole elipsy/objętość elipsoidy.
- Paradoksy probabilistyczne.

NA KLAWISZACH

Kalkulator lub komputer pełni czysto techniczną rolę w kreowaniu matematycznej heurezy. Służy do wykonywania wielu doświadczeń numerycznych, daje łatwość obserwowania regularności, stawiania i weryfikowania hipotez. Bez użycia kalkulatora byłby to trud przewyższający satysfakcję z możliwości dokonania odkrycia i nie dałoby się na takie zadanie uczniów namówić.

Przykład 12. Regularne liczby

Zacznijmy od prostych obliczeń:

$4 \cdot 4 = 16$
$34 \cdot 34 = 1156$
$334 \cdot 334 = 111556$

Następny wynik możemy odgadnąć już bez rachunków 11115556. Sprawdzamy i… zgadza się. Zauważona regularność powtarza się w kolejnych krokach. Zacznijmy od innej liczby i wykonajmy analogiczne (to znaczy jakie?) rachunki.

$7 \cdot 7 = 49$
$67 \cdot 67 = 4489$
$667 \cdot 667 = 444889$

Regularność jest ta sama (to znaczy jaka?). Sformułowanie tego problemu i postawienie zauważonej hipotezy to dobre ćwiczenie języka matematycznego. Zauważamy, że w każdym kroku w środek poprzedniego wyniku wstawiamy liczbę o jeden mniejszą niż pierwszy wynik. Zbadajmy jeszcze inne przypadki.

$2 \cdot 2 = 4$
$12 \cdot 12 = 144$
$112 \cdot 112 = 12544$
$1112 \cdot 1112 = 1236544$

Tu poprzednia reguła się psuje, ale regularność nadal jest zauważalna. Obstawiamy, że następnym wynikiem będzie 123496544 (w środek poprzedniego wyniku wpisujemy kolejne kwadraty). Jednak tym razem hipoteza się nie potwierdza (kolejny wynik to 1234765544), więc trzeba spróbować ją poprawić. Łatwo zauważyć, że wstawiane w środek liczby rosną o 11.

$9 \cdot 9 = 81$
$89 \cdot 89 = 7921$
$889 \cdot 889 = 790321$
$8889 \cdot 8889 = 79014321$

Potwierdza to kolejny przykład, choć początkowo nic na to nie wskazuje. Te regularności są na tyle magiczne i zadziwiające, że pojawia się naturalna chęć dogłębnego zbadania tej tajemnicy i wyjaśnienia, dlaczego tak się dzieje. Uczeń może samodzielnie przedłużać zadanie, stawiając dalsze naturalne pytania: *Co będzie się działo dla jednakowych cyfr? A jeśli powtórzymy cyfrę z prawej strony? A jeśli powtarzać będziemy obie cyfry? A jeśli różnica między cyframi będzie większa? …*

Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Różnice kwadratów liczb trójkątnych.
- Wzór na liczby pierwsze: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i!$.
- Liczby pierwsze różnią się o 1 od pewnych wielokrotności szóstki i na odwrót.

OGRANICZENIE METODY

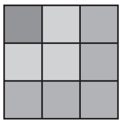
Otrzymywanie problemów otwartych polega na zmianie typowej metody podejścia do problemu i poszukiwaniu rozwiązania przy wykorzystaniu określonych, lecz nietypowych środków, np. geometrycznie zamiast algebraicznie, syntetycznie zamiast analitycznie, numerycznie zamiast analitycznie itp.

Przykład 13. Udawanie Greka

Wzory na sumę kolejnych liczb nieparzystych lub sześcianów liczb naturalnych są typowymi ćwiczeniami na indukcję matematyczną. Spróbujmy uzasadnić je środkami geometrycznymi, jakimi dysponowali starożytni matematycy greccy. Czy mieli szanse na odkrycie takich zależności? Zacznijmy od eksperymentów rachunkowych i postawienia hipotezy.

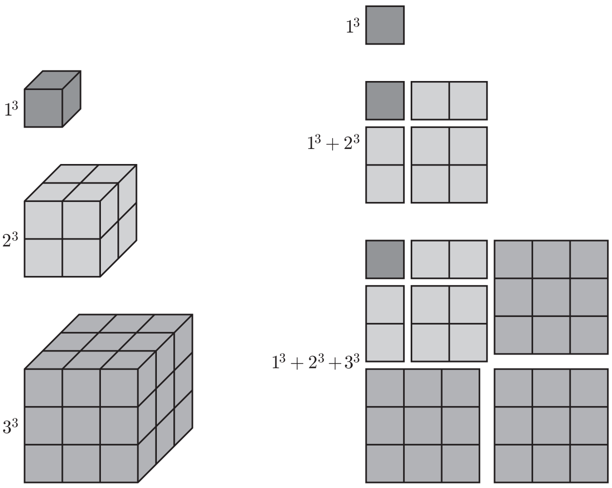
$$\begin{array}{llll} 1 & = 1 & 1^3 & = 1 \\ 1+3 & = 4 & 1^3+2^3 & = 9 \\ 1+3+5 & = 9 & 1^3+2^3+3^3 & = 36 \end{array}$$

Widać od razu, że za każdym razem mamy do czynienia z kwadratami, w pierwszym przypadku kolejnymi, w drugim – wybranymi dość nieregularnie. Można kontynuować obliczenia i dokładniej je analizować, ale nam wystarczy wskazówka, że wynik ma być kwadratem.



Rys. 14. $1+3+5+\cdots+17 =$ $=(\text{liczba składników})^2 =$ $=(18/2)^2$; $1+3+5+\cdots+2n-1=(2n/2)^2=n^2$

Zacznijmy od pierwszego problemu. Wyobraźmy sobie, że mamy do dyspozycji kwadratowe płytki w nieskończenie wielu kolorach (którym zamiast nazw nadamy numery). Mamy 1 płytkę w kolorze nr 1, 2 płytki w kolorze nr 2, 3 w kolorze nr 3 itd. Bierzemy wszystkie płytki w kolorach od 1 do n (stopniowo zwiększając n) i próbujemy układać z nich kwadraty. Dość szybko można odkryć zasadę dającą rozwiązanie problemu.



Rys. 15. $1^3+2^3+3^3+\cdots+17^3=(1+2+3+\cdots+17)^2$; $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

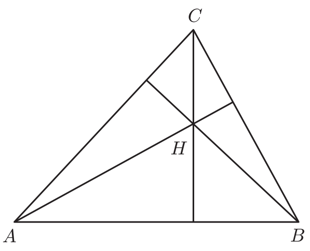
Analogicznie postępujemy w zadaniu drugim. Teraz mamy sześcian rozmiaru $1\times1\times1$ w kolorze nr 1, sześcian rozmiaru $2\times2\times2$ złożony z kostek jednostkowych w kolorze 2 itd. Znowu bierzemy kostki w kolorach od 1 do n i próbujemy układać z nich kwadrat. Tym razem jest trochę trudniej, ale po kilku próbach znajdujemy regułę układania. Rozcinamy sześciany na poziome warstwy, a w przypadku rozmiarów parzystych jedną warstwę dodatkowo kroimy na połowy. Sposób układania kwadratu pokazuje rysunek.

W obydwu przypadkach na podstawie rysunków można formalnie uzasadnić, że operacja układania kwadratu w określony sposób jest wykonalna dla dowolnego n.

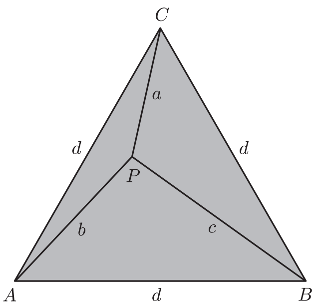
Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Liczby trójkątne a kwadratowe – arytmetycznie i geometrycznie.
- Różnice kwadratów liczb trójkątnych – arytmetycznie i geometrycznie.
- Ośmiokrotności liczb trójkątnych a liczby kwadratowe – arytmetycznie i geometrycznie.
- Zasadnicze twierdzenie analizy – klasycznie, numerycznie i geometrycznie.

ZADZIWIAJĄCA SYMETRIA

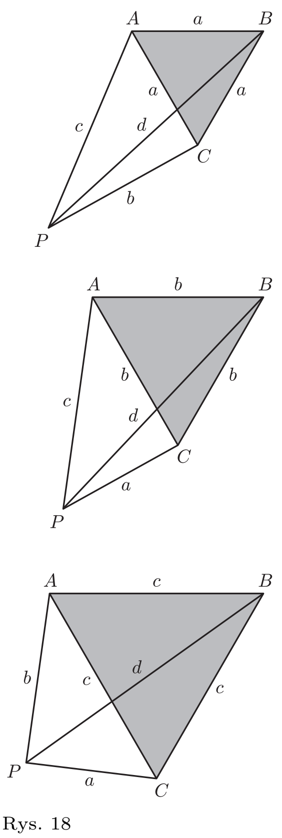
Tym razem nie ma tu żadnej szczególnej wskazówki, w jaki sposób wprowadzać rozumowanie heurystyczne, jest natomiast zaskoczenie i motywacja do poszukiwań. Bierze się ona z zauważenia symetrii w sytuacjach, które pozornie wcale nie są symetryczne. Na ogół kryją jednak jakieś „drugie dno”, którego warto poszukać.



Rys. 16



Rys. 17. $3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$



Rys. 18

Przykład 14. Ortocentryczna czwórka punktów

Wybierzmy dowolnie trzy punkty A, B, C. Tworzą one trójkąt, którego wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w zdeterminowanym przez wybór punktów A, B i C punkcie H, zwanym ortocentrum trójkąta. Na tak otrzymanym rysunku wymażmy teraz wszystkie linie, pozostawiając same punkty. Jak wybrać spośród tych czterech punktów trzy wierzchołki trójkąta tak, by czwarty był jego ortocentrum?

Okazuje się, że byle jak. Przy dowolnym wyborze trzech punktów z rysunku i utworzeniu trójkąta o wierzchołkach w tych punktach, czwarty okazuje się być ortocentrum tego trójkąta. Dlaczego?

Przykład 15. Podejrzany wzór

Istnieje wzór wiążący odległości pewnego punktu trójkąta równobocznego od jego wierzchołków z długością boku tego trójkąta.

Symetria tego wzoru jest zadziwiająca, gdyż punkt P możemy wybrać w trójkącie dowolnie, a długość boku jest ustalona. Wydaje się, że jeśli dane są cztery liczby, spełniające powyższe równanie, to łatwo zorientować się, która oznacza długość boku trójkąta (jak?). Algebraiczna symetria wzoru nie wyróżnia jednak żadnej z wielkości. Czyżby istniały więc cztery różne trójkąty, spełniające warunki zadania? Okazuje się, że tak. Każda z liczb a, b, c i d może być długością boku szukanego trójkąta, a pozostałe trzy – odległościami pewnego punktu od jego wierzchołków. Nigdzie przecież nie zakładaliśmy, że punkt o zadanych odległościach leży wewnątrz trójkąta. Oto trzy pozostałe przypadki dla sytuacji z rys. 17.

A co się dzieje, jeśli niektóre z liczb a, b, c i d są równe?

Przykłady do samodzielnego zbadania:
- Harmoniczna czwórka punktów.

Bibliografia

Pozycje zawierające dialogi heurystyczne

[1] P. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki*, PWN, Warszawa 1994, str. 257-261.
[2] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge 1976.
[3] S. Lang, *Młodzi i matematyka. Rozmowy profesora z uczniami*, GWO, Gdańsk 1995.
[4] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, WN UAM, Poznań1986, str. 22-28.
[5] George Pólya, *Odkrycie matematyczne*, WNT, Warszawa 1975.

Pozycje zawierające rozszerzenie omawianych przykładów

[1] W. Bednarek, M. Mikołajczyk, *Liczbowe rodzeństwa*, MMM 1/05 (22–24).
[2] P. Kumor, B. Lichowska, M. Mikołajczyk, A. Szendera, *Zagubiony w lesie*, MMM 4/04 (13-16).
[3] M. Mikołajczyk, K. Omiljanowski, *Obalanie twierdzenie Pitagorasa*, Delta 1/94, (8-12).
[4] M. Mikołajczyk, K. Omiljanowski, *Wędrówki*, Delta 11/92, (10-15).
[5] M. Mikołajczyk, M.Śliwiński, *Wypijmy za zdrowie pi*, MMM 2/04, (14-17).
[6] K. Omiljanowski, *Liczby gościnne*, NiM 23, 1997, (10-11).
[7] D. Wells, *I ty zostaniesz matematykiem*, Zysk i S-ka, Poznań 2000.
[8] M. Szurek, *Po co myśleć – eksperymentuj*, Delta 7/90 (6–7).