Jest to skrócony zapis odczytu na XXXIII Szkole Matematyki Pogladowej „Metody klasyczne i współczesne". Nosił tytuł *Odczyt nie na temat.*

O dwóch, pozornie odległych, pytaniach

Zbigniew MARCINIAK, Warszawa

Wstęp

Zajmiemy się dwoma pytaniami, które pojawiają się w podstawowych kursach algebry liniowej i topologii.

Na wykładzie z algebry liniowej studenci dowiadują się, że płaszczyznę kartezjańską $\mathbb{R}^2$ można wyposażyć w dwuliniowe mnożenie tak, by stała się ciałem (liczb zespolonych). Można zapytać:

Pytanie 1. *Czy trójwymiarową przestrzeń kartezjańską $\mathbb{R}^3$ można analogicznie wyposażyć w dwuliniowe mnożenie tak, by stała się ciałem?*

Podobnie, na podstawowym wykładzie topologii, studenci poznają klasyfikację powierzchni zwartych. Jest jasne, że powierzchnie orientowalne, czyli sfery z uchami, są zanurzalne w przestrzeni trójwymiarowej. Dla powierzchni nieorientowalnych sprawa nie jest tak oczywista. Najprostszą z tych powierzchni jest płaszczyzna rzutowa. Można zapytać:

Pytanie 2. *Czy płaszczyznę rzutową można zanurzyć w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$?*

W dostępnych podręcznikach brakuje uzasadnień odpowiedzi na te pytania; zainteresowani są odsyłani do bardziej zaawansowanych kursów.

Celem tego artykułu jest podanie odpowiedzi na oba pytania, wraz z jak najprostszymi uzasadnieniami. Ponadto wykażemy, że pytania te tylko pozornie pozostają bez wzajemnego związku – w istocie obydwa są emanacjami tego samego problemu.

Czy $\mathbb{R}^3$ może być ciałem?

Wykażemy, że w przestrzeni trójwymiarowej nie można wprowadzić dwuliniowego mnożenia, które wraz z dodawaniem wektorów nada $\mathbb{R}^3$ strukturę ciała.

Przypuśćmy zatem, że takie mnożenie istnieje. Niech $a \in \mathbb{R}^3$ będzie dowolnym wektorem nie leżącym na prostej, zawierającej zero oraz jedynkę tego ciała. Łatwo zauważyć, że przekształcenie $L_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, zadane wzorem $L_a(x) = a \cdot x$, jest liniowe. Wielomian charakterystyczny przekształcenia L_a jest stopnia 3, zatem posiada pierwiastek rzeczywisty λ. Liczba λ jest wartością własną L_a, zatem istnieje niezerowy wektor $b \in \mathbb{R}^3$ taki, że $a \cdot b = \lambda \cdot b$. Wynika stąd, że $(a - \lambda \cdot 1) \cdot b = 0$. Ponieważ $b \neq 0$, musi zachodzić równość $a = \lambda \cdot 1$, wbrew sposobowi, w jaki wybraliśmy a. Ta sprzeczność kończy dowód – poszukiwane mnożenie nie istnieje.

Komentarze:

a) Kluczem do sukcesu była obserwacja, że wielomian stopnia 3 ma pierwiastek rzeczywisty. Ta sama własność przysługuje ogólniej wszystkim wielomianom nieparzystego stopnia, zatem żadna z przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$, $n \geq 1$, nie ma dwuliniowego mnożenia, prowadzącego do struktury ciała.

b) W dowodzie nie wykorzystaliśmy założenia, że mnożenie w ciele jest przemienne. Wykazaliśmy zatem, że przestrzenie $\mathbb{R}^{2n+1}$ nie posiadają także dwuliniowego mnożenia, prowadzącego do struktury pierścienia z dzieleniem, czyli nieprzemiennego ciała.

c) W istocie korzystaliśmy tylko z tego, że szukane mnożenie ma być dwuliniowe i bez dzielników zera: równość $a \cdot b = 0$ pociąga $a = 0$ lub $b = 0$.

Czy płaszczyzna rzutowa zanurza się w $\mathbb{R}^3$?

Wykażemy, ograniczając się do środków dostępnych studentom w podstawowym kursie topologii, że takiego zanurzenia nie ma, przynajmniej w zakresie zanurzeń „porządnych" (np. gładkich lub kawałkami liniowych).

Przypuśćmy zatem, że istnieje podzbiór $P \subset \mathbb{R}^3$, homeomorficzny z płaszczyzną rzutową $\mathbb{R}P^2$. Dla (małej) liczby $\varepsilon > 0$, niech P_ε oznacza zbiór punktów $\mathbb{R}^3$ leżących w odległości $\leq \varepsilon$ od podzbioru P. Dla „porządnych" zanurzeń można zmniejszyć wartość ε tak, by dla każdego punktu $x \in P_\varepsilon$ istniał jedyny, najbliższy mu punkt $r(x) \in P$. Wtedy brzeg ∂P_ε zbioru P_ε jest powierzchnią zwartą, będącą dwulistnym nakryciem płaszczyzny rzutowej P.

Płaszczyzna rzutowa ma tylko dwa nakrycia dwulistne: dwiema kopiami P albo sferą S^2. Gdyby zachodził pierwszy przypadek, moglibyśmy wybrać jedną ze składowych ∂P_ε i zbudować ciągłe pole niezerowych wektorów normalnych do P, wskazujących w jej stronę. Istnienie takiego pola jest jednak sprzeczne z nieorientowalnością płaszczyzny rzutowej.

Zatem brzeg ∂P_ε jest sferą. Rozważmy rozkład przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na dwa podzbiory domknięte: $\mathbb{R}^3 = P_\varepsilon \cup X$, gdzie $X = \overline{\mathbb{R}^3 \setminus P_\varepsilon}$. Używając tego rozkładu, wyznaczymy za pomocą twierdzenia van Kampena grupę podstawową $\mathbb{R}^3$:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3) = \pi_1(P_\varepsilon) *_{\pi_1(S^2)} \pi_1(X).$$

Ponieważ rzutowanie $r\colon \partial P_\varepsilon \to P$, $x \mapsto r(x)$, jest homotopijną równoważnością, mamy $\pi_1(P_\varepsilon) \approx \pi_1(P) = \mathbb{Z}_2$ oraz, oczywiście, $\pi_1(S^2) = 0$. Zatem $\pi_1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{Z}_2 * \pi_1(X)$, co niezależnie od $\pi_1(X)$, jest grupą nietrywialną. To jest sprzeczność, bo przecież przestrzeń euklidesowa jest ściągalna do punktu, więc $\pi_1(\mathbb{R}^3) = 0$. Sprzeczność ta dowodzi, że płaszczyzna rzutowa nie ma („porządnych") zanurzeń w $\mathbb{R}^3$.

Komentarze:

a) Znacznie łatwiej przekonać się, że płaszczyzna rzutowa ma zanurzenie w $\mathbb{R}^4$. W tym celu wykorzystamy fakt, że $\mathbb{R}P^2$ można przedstawić w postaci wstęgi Möbiusa, z dwuwymiarowym dyskiem dolepionym do jej brzegu. Samą wstęgę zanurzamy na podzbiór W w podprzestrzeni $\mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$. Środek dysku umieścimy w dowolnym punkcie p poza tą podprzestrzenią. Następnie łączymy punkt p odcinkami ze wszystkimi punktami brzegu wstęgi W. Suma tych odcinków utworzy dysk dwuwymiarowy, zanurzony w $\mathbb{R}^4$, a wraz z W da nam kopię $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}^4$.
Aby tak było, odcinki $[p,a]$ i $[p,b]$, prowadzące do różnych punktów $a, b \in \partial W$ powinny przecinać się tylko w punkcie p. Istotnie tak jest – w przeciwnym przypadku punkty a, b, p byłyby współliniowe, zatem punkt p należałby do prostej $\overline{ab} \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$, wbrew założeniu.

b) Odpowiednio modyfikując powyższe argumenty, można równie łatwo wykazać, że żadna zwarta powierzchnia nieorientowalna nie zanurza się w $\mathbb{R}^3$, choć bez trudu można ją zanurzyć w przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Szczegóły pozostawiamy dociekliwym Czytelnikom.

Wspólne uogólnienie

Pytania 1 i 2 mają następujące naturalne uogólnienia:

Pytanie 1′. *Dla jakich n można wyposażyć przestrzeń $\mathbb{R}^n$ w dwuliniowe mnożenie, które nie ma dzielników zera?*

Pytanie 2′. *Dla jakich n i k przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^n$ może być zanurzona w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+k}$?*

Przypomnijmy, że n-wymiarową przestrzeń rzutową $\mathbb{R}P^n$ otrzymujemy, utożsamiając pary $\{x, -x\}$ punktów antypodycznych n-wymiarowej sfery jednostkowej S^n. Konsekwentnie, wektor styczny do przestrzeni $\mathbb{R}P^n$ zaczepiony w punkcie $[x] = \{x, -x\}$ powstaje przez utożsamienie wektora v stycznego do sfery w punkcie x z wektorem $-v$ stycznym do sfery w punkcie $-x$. Wszystkie wektory styczne do $\mathbb{R}P^n$ w punkcie $[x]$ tworzą przestrzeń styczną $T_{[x]}\mathbb{R}P^n$, zaś rozłączna suma wszystkich takich przestrzeni tworzy wiązkę styczną $\tau_{\mathbb{R}P^n}$. Przypomnijmy, że wiązka styczna do n-wymiarowej rozmaitości jest trywialna, jeśli istnieje n ciągłych i w każdym punkcie liniowo niezależnych pól wektorów stycznych.

Okazuje się, że oba powyższe pytania są ściśle związane z własnościami wiązki stycznej $\tau_{\mathbb{R}P^n}$.

Stwierdzenie. *Jeżeli w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *istnieje dwuliniowe mnożenie bez dzielników zera, to wiązka styczna do przestrzeni* $\mathbb{R}P^{n-1}$ *jest trywialna.*

Istotnie, niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^n$. Ponieważ nasze mnożenie nie ma dzielników zera, przekształcenie liniowe $x \mapsto x \cdot e_1$ jest różnowartościowe, a zatem jest automorfizmem $\mathbb{R}^n$. Rozważmy pola wektorowe $v_i(x \cdot e_1) = x \cdot e_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy $v_1(x) = x$, zaś rzuty ortogonalne wektorów $v_i(x)$, $2 \leq i \leq n$, na przestrzeń styczną $T_x S^n$ wyznaczają $n-1$ liniowo niezależnych pól wektorowych stycznych do $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Jeśli mamy zanurzenie $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, to w każdym punkcie $[x] \in \mathbb{R}P^n$ można rozważyć przestrzeń wektorów normalnych $N_{[x]}\mathbb{R}P^n$, tj. k-wymiarową przestrzeń liniową wektorów prostopadłych do $T_{[x]}\mathbb{R}P^n$ względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^{n+k}$. Rozłączna suma wszystkich przestrzeni normalnych tworzy wiązkę normalną $\nu_{\mathbb{R}P^n}$.

Zatem, jeśli istnieje zanurzenie $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, to wiązka styczna $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ ma k-wymiarowe dopełnienie do wiązki trywialnej: istotnie, wiązki styczna $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ i normalna $\nu_{\mathbb{R}P^n}$ sumują się do wiązki stycznej do $\mathbb{R}^{n+k}$, która jest oczywiście trywialna.

Widzimy zatem, że Pytanie $1'$ jest ściśle związane z trywialnością wiązki $\tau_{\mathbb{R}P^n}$, zaś Pytanie $2'$ – z istnieniem jej k-wymiarowego dopełnienia do wiązki trywialnej. Tak przeformułowanym zadaniem zajmuje się topologia algebraiczna. Konstruuje ona niezmiennik $w(\xi)$ wiązek ξ nad przestrzenią X, zwany pełną klasą Stiefela–Whitneya, leżący w pierścieniu kohomologii $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$. Niezmiennik ten pozwala badać trywialność wiązek oraz szacować wymiary ich dopełnień do wiązki trywialnej – patrz J. Milnor, J. Stasheff: *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies **76**, Princenton 1974.