Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXIV Szkole Matematyki Poglądowej „NIE w matematyce i okolicach”, styczeń 2005.

Hipoteza podziałowa Kellera

Andrzej KISIELEWICZ i Krzysztof PRZESŁAWSKI, Zielona Góra

1. Wstęp

Przedmiotem naszej dyskusji będzie HIPOTEZA PODZIAŁOWA KELLERA głosząca, że *każdy podział n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej na kostki jednostkowe musi zawierać parę kostek mających wspólną $(n-1)$-wymiarową ścianę*.
W opublikowanej w 1930 pracy [K1], w której hipoteza została postawiona, Otto-Heinrich Keller podał dowód jej prawdziwości w wymiarze 3. Potem ogłosił jeszcze w [K2], że hipoteza potwierdza się w wymiarach 5 i 6. Jego argumentacja była raczej niekompletna i dlatego za autora tych rezultatów uznaje się powszechnie Oskara Perrona [P]. Mniej więcej w dziesięć lat po pracach Perrona, György Hajós, o którym wspomnimy jeszcze w związku z hipotezą podziałową Minkowskiego, wykazał, że przypuszczenie Kellera można wyrazić w języku grup abelowych, po czym prace nad tym zagadnieniem zamarły na następne trzydzieści kilka lat. W 1986 roku ukazał się artykuł Sándora Szabó [Sz], nawiązujący do rezultatu Hajósa, a w cztery lata później Szabó i Keresztély Corrádi [C, Sz] wskazali na kombinatoryczny równoważnik hipotezy Kellera, który, ich zdaniem, mógłby stać się punktem wyjścia do poszukiwań ewentualnego kontrprzykładu. W 1993 Jeff Lagarias i Peter Shor [LS1] podali stosowny kontrprzykład w wymiarze 10. Stąd łatwo już wywnioskować, że hipoteza Kellera załamuje się także w każdym wymiarze wyższym niż 10. W roku 2000 John Mackey [Ma] znalazł kontrprzykład w wymiarze 8. (Konstrukcję Mackeya szczegółowo omówimy później.) W takim razie do zamknięcia dyskusji nad przypuszczeniem Kellera pozostaje odgadnąć, jak rzeczy się mają w wymiarze 7. Autorzy tego szkicu trochę nad tym rozmyślali, ale nie ważyliby się robić zakładów. Ciekawe, że sam Keller musiał stracić pewność co do prawdziwości swojej hipotezy, bo we wspomnianej pracy [K2] zasugerował, że właśnie w wymiarze 7 może istnieć kontrprzykład.

Należy stwierdzić, że hipoteza Kellera nie wzięła się z próżni. Za prawdziwego jej ojca trzeba z pewnością uznać Hermanna Minkowskiego, a początek historii umieścić w końcu wieku XIX.

2. Hipoteza podziałowa Minkowskiego

Niech układ $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że zbiór

$$L := \{m_1 v_1 + \cdots m_n v_n : m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

nazywamy *kratą* o bazie $v_1, \ldots, v_n$. Ta sama krata ma wiele baz, ale objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach dowolnej bazy ma tę samą wartość $|L|$ zwaną *wyznacznikiem kraty L*. (Czytelnika pragnącego zapoznać się bliżej z teorią krat odsyłamy do podręcznika Władysława Narkiewicza [N] i klasycznej monografii J. W. Casselsa [C].)

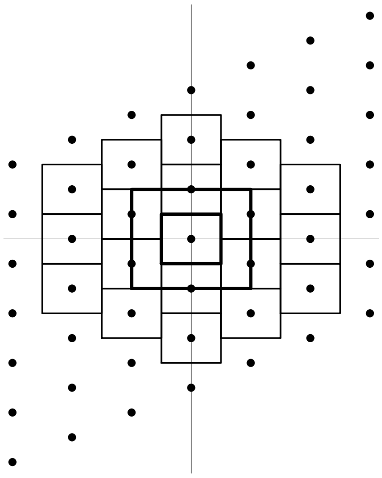
Około roku 1896, w związku z pewnymi zagadnieniami równoczesnego przybliżania układów liczb rzeczywistych za pomocą układów liczb wymiernych, Minkowski rozpatrywał kraty, których bazy były określone następująco

$$v_1 = f_1,\ \ldots,\ v_k = f_k + \sum_{i \le k-1} \alpha_{ki} f_i,\ \ldots,\ v_n = f_n + \sum_{i \le n-1} \alpha_{ni} f_i, \tag{1}$$

gdzie współczynniki α_{ki} sa dowolne, układ zaś wektorów $f_1, \ldots, f_k$ jest z dokładnością do zmiany kolejności równy układowi wersorów

$$e_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n := (0, \ldots, 0, 1).$$

Odnotujmy, że wyznacznik każdej takiej kraty jest równy 1 i co więcej, żaden jej element, z wyjątkiem zerowego, nie leży we wnętrzu kostki $Q := [-1, 1]^n$. Dlatego też w opublikowanej w 1896 roku książce *Geometrie der Zahlen* [M1] Minkowski wyraził przypuszczenie, że te dwie własności charakteryzują kraty o bazach opisanych wzorami (1). Zauważmy teraz, że krata L ma wyznacznik 1 i jej przecięcie z wnętrzem kostki Q zawiera jedynie wektor zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina kostek $\frac{1}{2}Q + v$, $v \in L$, stanowi *podział* przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w tym sensie, że wnętrza tych kostek są parami rozłączne i zarazem każdy punkt przestrzeni leży przynajmniej w jednej z nich (rys. 1). Podział, o którym tutaj mowa, nazywamy *podziałem kratowym*. Podziały kratowe wyznaczone przez kraty o bazach (1) zawierają oczywiście pary kostek o wspólnych $(n-1)$-wymiarowych ścianach, np. $\frac{1}{2}Q$ i $\frac{1}{2}Q + f_1$.



Rys. 1

W swojej kolejnej książce – *Diophantische Approximationen* [M2] – Minkowski zauważył, że gdyby zachodziła tak zwana dzisiaj HIPOTEZA PODZIAŁOWA MINKOWSKIEGO głosząca, że *każdy podział kratowy przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *zawiera parę kostek o wspólnej* $(n-1)$*-wymiarowej ścianie*, to wówczas jego pierwotne przypuszczenie dałoby się łatwo uzasadnić przez indukcję ze względu na wymiar przestrzeni. Sam Minkowski zdołał dowieść, że jego hipoteza podziałowa jest prawdziwa w wymiarze 3. Oczywiście wynika ona z rezultatów Kellera i Perrona aż do wymiaru 6. W rzeczywistości Perron dowiódł jej prawdziwości również w wymiarze 8. W 1938 G. Hajós w swojej pracy doktorskiej sprowadził hipotezę podziałową Minkowskiego do następującego zagadnienia algebraicznego: *Niech G będzie skończoną grupą przemienną. Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są elementami grupy G, a $r_1, r_2, \ldots, r_n$ są takimi liczbami naturalnymi, że każdy element grupy G jednoznacznie przedstawia się w postaci $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$, gdzie $0 \le x_i \le r_i - 1$, dla $i = 1, \ldots, n$, to $r_ia_i = 0$, dla pewnego wskaźnika i.* Redukcja przeprowadzona przez Hajósa okazała się właściwą drogą. W trzy lata później ukazał się jego artykuł [H], zawierający dowód hipotezy Minkowskiego. Podobno Hajós nie był swoim bardzo technicznym, pozbawionym geometrycznych interpretacji dowodem szczególnie usatysfakcjonowany. (Więcej na temat hipotezy Minkowskiego i historii z nią związanej można znaleźć w książce Shermana Steina i Sándora Szabó [SSz].)

3. Genom podziału

Konstrukcję przykładu obalającego hipotezę Kellera rozpoczniemy od analizy pewnych abstrakcyjnych podziałów. Przy czym przez podział zbioru rozumiemy tutaj rodzinę jego niepustych i rozłącznych podzbiorów, której suma mnogościowa jest równa rzeczonemu zbiorowi.

Załóżmy, że zadano zbiory $X_1, X_2, ..., X_n$, z których każdy liczy przynajmniej dwa elementy. Niepusty podzbiór A iloczynu kartezjańskiego $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ nazwiemy *kostką* w X, jeżeli $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Jeśli nadto każdy A_i jest właściwym podzbiorem zbioru X_i, to o A powiemy, że jest *kostką właściwą*. Kostka A jest n*-wymiarowa*, jeśli każdy ze zbiorów A_i liczy przynajmniej dwa elementy.

Dwie kostki A i B w X są *osiowo dopełnicze*, jeżeli $B_i = X_i \setminus A_i$ dla pewnego wskaźnika i.

Niech $\mathscr{F}$ będzie podziałem n-wymiarowej kostki X na kostki właściwe. Podział $\mathscr{F}$ nazwiemy *minimalnym*, jeśli $|\mathscr{F}| = 2^n$. Nazwa bierze się stąd, że liczność podziału n-wymiarowej kostki na kostki właściwe nie może być mniejsza niż 2^n ([ABHK]). Można wykazać, że *podział n-wymiarowej kostki na kostki właściwe jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwie kostki tego podziału są osiowo dopełnicze* ([GKP]). Skąd już blisko do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli każde dwie kostki pewnej rodziny kostek właściwych w kostce n-wymiarowej X są osiowo dopełnicze i liczność tej rodziny jest 2^n, to jest ona podziałem minimalnym kostki X.*

Dowód. Niech $\mathscr{F}$ będzie rodziną kostek właściwych spełniającą założenia. Dla każdej kostki właściwej A w X i każdego elementu $\varepsilon := (\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ określmy kostkę $A^\varepsilon := A_1^{\varepsilon_1} \times \cdots \times A_n^{\varepsilon_n}$ w ten sposób, że $A_i^{\varepsilon_i} = A_i$, o ile $\varepsilon_i = 0$, a w przeciwnym razie $A_i^{\varepsilon_i} = X_i \setminus A_i$. Jasne, że dowolne dwie kostki należące do rodziny $\{A^\varepsilon : A \in \mathscr{F}\}$ są osiowo dopełnicze, więc w szczególności rozłączne.

Załóżmy najpierw, że zbiór X jest skończony. W takim razie

$$\sum_{A\in\mathscr{F}} |A^\varepsilon| \le |X|.$$

Zauważmy, że dla każdej kostki właściwej A rodzina $\{A^\varepsilon : \varepsilon \in \{0,1\}^n\}$ jest podziałem kostki X. W rezultacie

$$2^n|X| = \sum_{A\in\mathscr{F}} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} |A^\varepsilon| = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} \sum_{A\in\mathscr{F}} |A^\varepsilon| \le 2^n|X|$$

Stąd $\sum_{A\in\mathscr{F}} |A^\varepsilon| = |X|$ dla każdego wektora ε, więc w szczególności dla wektora zerowego. Co dowodzi, że $\mathscr{F}$ jest podziałem.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy zbiór X ma nieskończenie wiele elementów. Musimy wykazać, że dowolny element $x \in X$ leży w pewnej kostce A będącej elementem rodziny $\mathscr{F}$. Nietrudno spostrzec, że istnieje taka kostka skończona Y w X, że $x \in Y$ oraz rodzina $\mathscr{G} := \{A \cap Y : A \in \mathscr{F}\}$ składa się z 2^n kostek właściwych w Y. Z poprzedniej części wynika, że $\mathscr{G}$ jest podziałem kostki Y, więc x musi leżeć w pewnej kostce z rodziny $\mathscr{F}$. □

Dowolny skończony zbiór symboli nazywać będziemy *alfabetem*, same zaś symbole – *literami.* Taką permutację $s \mapsto s'$ alfabetu S, że $s'' = s$ i $s' \neq s$ nazywamy *dopełnieniem*, zaś litery s, s' – *literami dopełniczymi.* Każdy n-elementowy ciąg liter alfabetu S nazywamy *słowem o długości n*. Dwa słowa $v := s_1 \cdots s_n$, $w := t_1 \cdots t_n$ nazwiemy *punktowo dopełniczymi*, jeśli istnieje i, że $s_i' = t_i$. Jeśli nadto $s_j = t_j$ dla wszystkich wskaźników $j \neq i$, to powiemy, że v i w są *bliźniacze.*

TWIERDZENIE 2. *Niech W będzie 2^n-elementowym zbiorem słów długości n, zapisanych w alfabecie S z dopełnieniem. Załóżmy, że każde dwa słowa leżące w W są punktowo dopełnicze i żadne dwa nie są bliźniacze. Wtedy istnieje podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe bez pary kostek o wspólnej $(n-1)$-wymiarowej ścianie.*

Dowód. Wybierzmy $T \subset S$ w taki sposób, by z każdej pary liter dopełniczych dokładnie jedna leżała w T. Ustawmy elementy zbioru T w ciąg $t_1, \ldots, t_m$. Niech $I_i = [0,1) + \frac{1}{i}$. Każdej literze t_i przyporządkujmy zbiór liczb $A(t_i) = I_i + 2\mathbb{Z}$. Literze dopełniczej t_i' przyporządkujmy zbiór

$$A(t_i') := \mathbb{R} \setminus A(t_i) = A(t_i) + 1. \tag{2}$$

Każdemu słowu $w = s_1 \cdots s_n$, napisanemu w alfabecie S, przypiszmy zbiór $B(w) \subset \mathbb{R}^n$ określony wzorem

$$B(w) = A(s_1) \times \ldots \times A(s_n).$$

Oczywiście wszystkie zbiory $B(w)$ są kostkami właściwymi w $\mathbb{R}^n$. Co więcej, z definicji $B(w)$ i z (2) łatwo wynika, że jeśli słowa w i v są punktowo dopełnicze, to $B(w)$ i $B(v)$ są osiowo dopełnicze. Z twierdzenia 1 oraz z założeń o zbiorze W wynika więc, że rodzina $\{B(w) : w \in W\}$ stanowi podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Dla każdej litery $s \in S$ przyjmijmy $s^0 = s$ oraz $s^1 = s'$. Na mocy definicji zbioru T, dla każdego słowa w długości n istnieją wektory $k = (k_1, \ldots, k_n)$ oraz $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, że

$$w = t_{k_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{k_n}^{\varepsilon_n}. \tag{3}$$

Niech $I_k = I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_n}$. Zauważmy, że I_k jest translantem *półotwartej* kostki jednostkowej $[0,1)^n$. Na mocy definicji zbioru $B(w)$ mamy

$$B(w) = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^n} (I_k + 2l + \varepsilon).$$

Stąd $B(w)$ jest sumą mnogościową półotwartych kostek jednostkowych o rozłącznych domknięciach. W konsekwencji domknięcia kostek jednostkowych, składających się na zbiory $B(w)$, $w \in W$, tworzą podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe w rozumieniu poprzednich ustępów. (Rzecz jasna kostki półotwarte tworzą podział w zwykłym sensie.) By zakończyć dowód pozostaje wykazać, że żadna para kostek zdefiniowanego podziału nie ma wspólnej $(n-1)$-wymiarowej ściany. Oczywiście wystarczy założyć, że kostki półotwarte leżą w różnych zbiorach $B(w)$, $B(v)$. Niech r i $\sigma \in \{0,1\}^n$ będą wektorami umożliwiającymi przedstawienie słowa v, tak jak w (3). Ponieważ w i v nie są słowami bliźniaczymi, więc (i) $k \neq r$ lub (ii) $k = r$ i ε i σ różnią się przynajmniej na dwu miejscach. Gdy zachodzi (i), to każda kostka leżąca w $B(w)$ różni się od dowolnej kostki leżącej w $B(v)$ o wektor, który nie leży w $\mathbb{Z}^n$, a zatem kostki nie mogą dzielić $(n-1)$-wymiarowej ściany. Gdy zachodzi (ii), to każda kostka z $B(w)$ różni się od dowolnej kostki z $B(v)$ o wektor, który ma przynajmniej dwie niezerowe współrzędne, a zatem i takie kostki nie mogą dzielić $(n-1)$-wymiarowej ściany. □

Uwagi:
Zauważmy, że podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe zdefiniowany w dowodzie jest niezmienniczy na działanie grupy przesunięć $2\mathbb{Z}^n$. Wynika stąd, że jeśli z każdego ze zbiorów $B(w)$ wybrać jedną z półotwartych kostek, nazwijmy ją $I(w)$, to przesunięcia *klastra* $K := \bigcup_{w\in W} I(w)$ o wektory $p \in 2\mathbb{Z}^n$ tworzą podział kratowy przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Oczywiście nie jest to podział kratowy na kostki.

Zaczerpnięty z biologii tytuł tego ustępu wziął się stąd, że zbiór słów W w twierdzeniu 2 można metaforycznie traktować jak pewien plan podziału przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

4. Przykład Mackeya

Dla każdej pary słów v i w przez vw oznaczamy słowo powstałe przez dopisanie w do v. Jeśli A i B są zbiorami słów, to

$$AB = \{vw : v \in A,\ w \in B\}.$$

Lemat 3. *Niech A A', B, B', C będą niepustymi i parami rozłącznymi zbiorami słów długości n. Przypuśćmy, że każde dwa słowa należące do dowolnego ze zbiorów $A \cup A'$, $B \cup B'$, $A \cup B \cup C$ są punktowo dopełnicze. Przypuśćmy dalej, że*

$$|A \cup A'| = |B \cup B'| = |A \cup B \cup C| = 2^n.$$

Wtedy zbiory

$$W_1 := CC \cup AA' \cup BB' \cup A'B \cup B'A \tag{4}$$

$$W_2 := CC \cup A'A \cup B'B \cup AB' \cup BA' \tag{5}$$

liczą 2^{2n} słów długości $2n$. Każde dwa słowa należące do któregokolwiek z tych zbiorów są punktowo dopełnicze. Jeżeli ponadto żaden ze zbiorów A, A', B, B', C nie zawiera słów bliźniaczych, to także zbiory W_1, W_2 nie zawierają takich słów.

Dowód. Jak łatwo sprawdzić,

$$|W_i| = |C||C| + |A||A'| + |B||B'| + |A'||B| + |B'||A| = 2^{2n}.$$

Niech v_1, v_2, w_1, w_2 będą takimi słowami długości n, niekoniecznie różnymi, że $z_1 := v_1w_1$ i $z_2 := v_2w_2$ są różnymi słowami leżącymi w W_i. Założenia dotyczące poszczególnych zbiorów implikują, że v_1 i v_2 są punktowo dopełnicze względnie w_1 i w_2 są punktowo dopełnicze. W konsekwencji, z_1 i z_2 są punktowo dopełnicze.

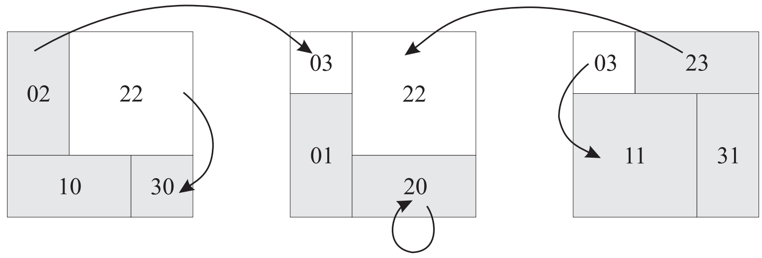
Przejdźmy teraz do dowodu drugiej części twierdzenia. Przypuśćmy, że z_1, z_2 tworzą parę bliźniaczą. Wtedy albo $v_1 = v_2$ i w_1, w_2 są słowami bliźniaczymi, albo też $w_1 = w_2$ i v_1, v_2 są słowami bliźniaczymi. W obu przypadkach z_1 i z_2 muszą leżeć w jednym ze składników sumy W_i, skąd już łatwo wynika, że z_1 i z_2 nie tworzą pary bliźniaczej. Otrzymaliśmy więc sprzeczność. □

Zastosujemy teraz lemat 3 do konstrukcji trzech zbiorów złożonych ze słów długości 4: V_1, V_2 i V_3. Wszystkie słowa zapisane są w alfabecie złożonym z cyfr 0, 1, 2, 3. Ponadto przyjmujemy $0' = 2$, $1' = 3$. By utworzyć V_1 (Rys. 2), połóżmy

$$A = \{03\},\ B = \{22\},\ C = \{01, 20\},\ A' = \{11, 23, 31\},\ B' = \{02, 10, 30\}$$

i przyjmijmy $V_1 = W_1$. Zbiór V_1 zawiera cztery pary słów bliźniaczych

$$0311\ 0331;\ \ 2230,\ 2210;\ \ 1122,\ 3122;\ \ 3003, 1003.$$



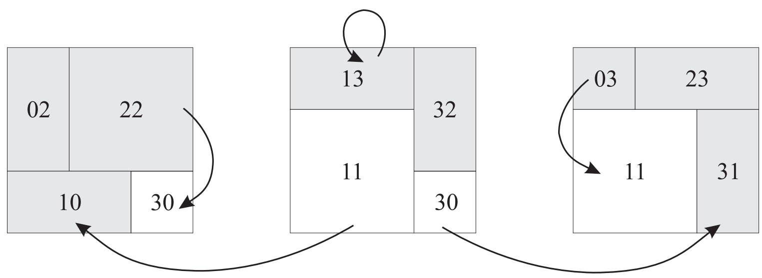
Rys. 2 Zacieniowane obszary odpowiadają zbiorom B', C, A'. Strzałki obrazują sposób tworzenia składników zbioru V_1; np. górna strzałka biegnąca od lewego do środkowego kwadratu wiąże zbiór B' ze zbiorem A.

By utworzyć V_2 (Rys. 3), połóżmy

$$A = \{30\},\ B = \{11\},\ C = \{13, 32\},\ A' = \{02, 22, 10\},\ B' = \{03, 23, 31\}$$

i przyjmijmy $V_2 = W_2$. Zbiór V_2 zawiera cztery pary słów bliźniaczych

(6) **0311**, 2311; **2230**, 0230; **1122**, 1102; **3003**, 3023.



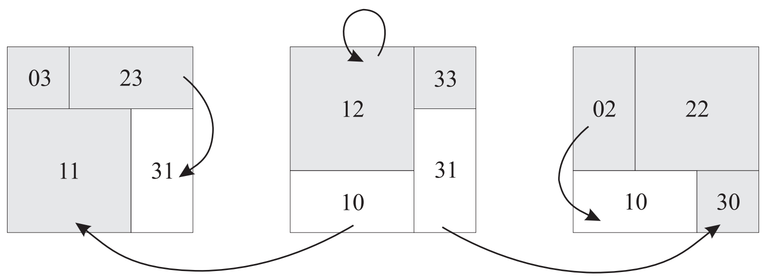
Rys. 3

By utworzyć V_3 (Rys.4), połóżmy

$$A = \{10\},\ B = \{31\},\ C = \{12, 33\},\ A' = \{02, 22, 30\},\ B' = \{03, 23, 11\}$$

i przyjmijmy $V_3 = W_2$. Zbiór V_3 zawiera cztery pary słów bliźniaczych

(7) 2331, **0331**; 0210, **2210**; 3102, **3122**; 1023, **1003**.



Rys. 4

Część wspólna zbiorów V_1 i V_2 składa się z wytłuszczonych w (6) elementów. Podobnie część wspólna zbiorów V_1 i V_3 składa się z wytłuszczonych w (7) elementów. Połóżmy

$$A = V_1 \cap V_2,\ B = V_1 \cap V_3,\ C = V_1 \setminus (A \cup B),\ A' = V_2 \setminus A,\ B' = V_3 \setminus B$$

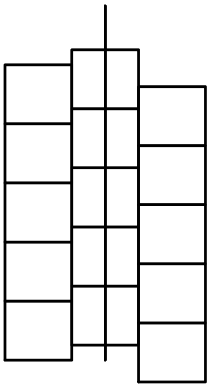
i przyjmijmy $W = W_1$. Nietrudno zauważyć, że A, B, C, A', B' spełniają założenia obu części lematu. Z twierdzenia 2 wynika więc, że zbiór W generuje poszukiwany kontrprzykład w wymiarze 8.

5. Hipoteza Fugledego

W ustępie podaliśmy charakteryzację takich krat L, że rodzina $\frac{1}{2}Q + v$, $v \in L$, stanowi podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe. Oczywiście dla takich i tylko takich L rodzina $[0,1)^n + v$, $v \in L$, także stanowi podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$, ale w zwykłym sensie. Zadanie znalezienia podobnej charakteryzacji moglibyśmy postawić w odniesieniu do dowolnych podziałów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe. Dokładniej, należałoby opisać wszystkie takie zbiory $T \subset \mathbb{R}^n$, że rodzina $[0,1)^n + v$, $v \in T$, stanowi podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$. O takich zbiorach, podobnie jak w przypadku krat, powiemy, że wyznaczają podział. Dyskusję rozpoczynamy od twierdzenia Kellera [K1].

Twierdzenie 4. *Jeśli T wyznacza podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe, to dla każdych dwu elementów v, $w \in T$ istnieje wskaźnik i, że $w_i - v_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy dla pewnego zbioru T wyznaczającego podział, musiałaby istnieć taka para v, $w \in T$, że dla wszystkich wskaźników i, $w_i - v_i \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Oczywiście zbiór $S := T - v$ także wyznacza podział. W rezultacie istnieje zbiór S wyznaczający podział oraz taki niezerowy element $s \in S$, że $0 \in S$ oraz $s_i \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dla wszelkich i. Niech $i(s) = 0$, jeśli $|s_1| \geq 1$, w przeciwnym razie niech $i(s) = \max\{i : |s_j| < 1 \text{ dla } j \leq i\}$. Musi zachodzi nierówność $i(s) < n$, bo inaczej kostki $[0,1)^n$ oraz $[0,1)^n + s$ przecinałyby się, co przeczyłoby temu, że S wyznacza podział. Niech $k = i(s) + 1$. Rozpatrzmy zbiór $U := \{u \in S : u_k - s_k \in \mathbb{Z}\}$. Jeśli ℓ jest prostą równoległą do i-tej osi układu współrzędnych, która przecina jedną z kostek $[0,1)^n + u$, $u \in U$, to $\ell \subset \bigcup_{u \in U} [0,1)^n + u$ (Rys. 5). Stąd łatwo zauważyć, że zbiór $R = (U - \lfloor s_i \rfloor e_i) \cup (S \setminus U)$ wyznacza podział przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a także, że 0 i $r = s - \lfloor s_i \rfloor e_i$ należą do R. (Przypomnijmy, że $\lfloor \alpha \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby α.) Ponadto $i(r) = i(s) + 1$ oraz dla każdego wskaźnika i mamy $r_i \notin \mathbb{Z} \setminus 0$.



Rys. 5

Powtarzając procedurę, która przywiodła nas od zbioru S do R, otrzymalibyśmy w końcu zbiór, który wyznaczałby podział i zawierał 0 oraz taki niezerowy element x, że $i(x) = n$, co jak wiemy, nie jest możliwe. □

Zobaczmy, że natychmiastową konsekwencją twierdzenia Kellera jest fakt, iż jeśli T wyznacza podział, to funkcje $e_t(x) = e^{2\pi i \langle t, x \rangle}$, $t \in T$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, tworzą układ ortonormalny w $L^2([0,1]^n)$. Stąd już łatwo uwierzyć w prawdziwość twierdzenia, dowiedzionego niezależnie przez Alexa Iosevicha i Steena Pedersena [IP] oraz Lagariasa, Jamesa Reedsa i Yanga Wanga [LRW]:

Twierdzenie 5. *T wyznacza podział $\mathbb{R}^n$ na kostki jednostkowe wtedy i tylko wtedy, gdy układ e_t, $t \in T$, stanowi bazę ortonormalną przestrzeni $L^2([0,1]^n)$.*

Twierdzenie to jest częściową odpowiedzią na tzw. *hipotezę Fugledego*, która dotyczy charakteryzacji zbiorów wyznaczających podziały dla szerszej klasy *płytek* niż tylko kostki jednostkowe. Więcej na temat tej hipotezy można znaleźć w bardzo dobrej pracy przeglądowej Mihaila Kolountzakisa [Ko].

6. Zakończenie

Mimo że hipoteza Kellera znalazła rozstrzygnięcie, to zdaniem autorów nie powinno to oznaczać zaniku zainteresowania zagdnieniami poruszanymi w tym artykule. Sądzimy, że wręcz odwrotnie, jest to dopiero początek ciekawej teorii. Na wyjaśnienie czeka na przykład struktura $2\mathbb{Z}^n$-okresowych podziałów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na kostki. Jest ona dobrze rozumiana do wymiaru 3, i to już od czasów Kellera. W wymiarach wyższych wiadomo naprawdę niewiele. Sporo interesujących pytań można znaleźć w pracy Lagariasa i Shora [LS2].

Podziękowania. Dziękujemy Jackowi Bojarskiemu za pomoc w sporządzeniu rysunków.

Literatura

[ABHK] N. Alon, T. Bohman, R. Holzman i D. J. Kleitman, On partitions of discrete boxes, *Discrete Math.* **257** (2002), 255–258.

[C] J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen and Heidelberg, 1959.

[CSz] K. Corrádi i S. Szabó, A combinatorial approach for Keller's conjecture, *Period. Math. Hungar.* **21** (1990), 91–100.

[GKP] J. Grytczuk, A. P. Kisielewicz i K. Przesławski, Minimal Partitions of a Box into Boxes, *Combinatorica* **24** (2004), 605–614.

[H] G. Hajós, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.* **47** (1941), 427–467.

[IP] A. Iosevich i S. Pedersen, Spectral and Tiling Properties of the Unit Cube, *Inter. Math. Res. Notices* **16** (1998), 819–828.

[K1] O.-H. KELLER, Über die lückenlose Erfülung des Raumes Würfeln, *J. Reine Angew. Math.* **163** (1930), 231–248.

[K2] O.-H. KELLER, Ein Satz über die lückenlose Erfülung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln, *J. Reine Angew. Math.* **177** (1937), 61–64.

[Ko] M. N. KOLOUNTZAKIS, The study of translational tiling with Fourier Analysis, w: *Fourier Analysis and Convexity*, 131–187, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[LRW] J. C. LAGARIAS, J. A. REED i Y. WANG, Orthonormal bases of exponentials for the n-cube, *Duke Math. J.* **103** (2000), 25–37.

[LS1] J. C. LAGARIAS i P. W. SHOR, Keller's cube-tiling conjecture is false in high dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), 279–287.

[LS2] J. C. LAGARIAS i P. W. SHOR, Cube tilings and nonlinear codes, *Discr. Comput. Geom.* **11** (1994), 359–391.

[Ma] J. MACKEY, A cube tiling of dimension eight with no face sharing, *Discr. Comput. Geom.* **28** (2000), 275–279.

[M1] H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig, 1907.

[M2] H. MINKOWSKI, *Diophantische Approximationen*, Teubner, Leipzig, 1907.

[N] W. NARKIEWICZ, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa, 2003.

[P] O. PERRON, Über lückenlose Ausfülung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel I, II, *Math. Z.* **46** (1940), 1–26, 161–180.

[SSz] S. STEIN i S. SZABÓ,*Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Service of Geometry*, Mathematical Association of America, Washington DC, 1994.

[Sz] S. SZABÓ, A reduction of Keller's conjecture, *Period. Math. Hungar.* **17** (1986), 265–277.

A.Kisielewicz@wmie.uz.zgora.pl
K.Przeslawski@wmie.uz.zgora.pl