Niektóre punkty zwrotne w dziejach matematyki

Roman DUDA, Wrocław

Jest to rozszerzony tekst odczytu „*NIE w matematyce jest ważne (czasem)*”, wygłoszonego na XXXIV Szkole Matematyki Poglądowej w Grzegorzewicach, 28 stycznia–1 lutego 2005 r.

Nierzadko słyszy się pogląd, że matematyka jest wiedzą kumulacyjną. Zwykle rozumie się to tak, że twierdzenie raz w matematyce dowiedzione pozostaje w niej na zawsze, dzięki czemu przybywa w niej twierdzeń i matematyka stale rośnie. Jest to jednak pogląd uproszczony, nawet bowiem bardzo pobieżna znajomość historii matematyki pokazuje, że w matematyce były okresy rozwoju i zastoju (te drugie zresztą przeważały), a nadto miały miejsce gruntowne przewartościowania nagromadzonego materiału, w rezultacie czego całe obszary matematyki uchodziły w niebyt, stając się historycznymi osobliwościami lub, w lepszym przypadku, pozostając w postaci tak przetworzonej, że niemal nieporównywalnej z oryginałem. Przykładami obszarów zapomnianych są egipska arytmetyka, grecka trygonometria, średniowieczne infinitezymale itp., dobrą zaś ilustracją gruntownego przetworzenia jest chińskie twierdzenie o resztach. Matematyka żyje w ludzkich głowach i tyle jej jest, ile te głowy zdołają pomieścić, a to, że nie mieszczą wszystkiego, wynika nie tylko z ich ograniczonej pojemności. Pytanie „jak się matematyka rozwija?” jest więc fascynujące, ale trudne, matematyka jest bowiem elementem kultury i zarówno od otaczającej ją kultury zależy, jak i na tę kulturę wpływa, a te dwustronne zależności są w różnych okresach różne i nawet w jednym takim okresie bywały zmienne.

Por. Ph. J. Davis, R. Hersh, E.A. Marchisotto, *Świat matematyki*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001, s. 180-187.

Inny niż kumulacyjny pogląd na rozwój matematyki przedstawia np. J. Dieudonné, *Kierunki rozwoju matematyki czystej*, Wiadomości Matematyczne 26.1 (1984), s. 61–83.

Celem tego artykułu jest przedstawienie trzech wydarzeń, z których każde na swój sposób wstrząsnęło matematyką i spowodowało taką zmianę poglądów, że matematyka „po” była inna i inaczej rozumiana niż „przed”.

I. Przejście od konkretu do ogólności

Przed Grekami, w kulturze chińskiej, babilońskiej, egipskiej i innych, liczba była konkretna. Mówiono więc o 5 bochnach, 5 rybach, 5 łokciach itd., ale nie było mowy o abstrakcyjnej liczbie 5 ani nie rozważano ogólnego pojęcia liczby. Zmiana, jakiej pod tym względem dokonali Grecy, daje się porównać ze zmianą, jaka się dokonała w matematyce w drugiej połowie XIX wieku, głównie za sprawą Bernharda Riemanna (1826–1866). Przed nim wszystkie rozważane w analizie funkcje były konkretne, tzn. każda taka funkcja była wyrażona formułą ustalającą jej wartość dla każdej wartości argumentu. Riemann powziął myśl badania funkcji w ich ogólności, bez względu na istnienie wyrażających je formuł, a wyróżnionych jedynie pewnymi ich własnościami takimi jak np. ciągłość. To **przejście od konkretu do ogólności** w zakresie funkcji było tak nowe, że w jego pracach znajdujemy argumenty mające je usprawiedliwić, np. pisze on, że funkcja ciągła nie może zmieniać się arbitralnie, bo ciągłość wymusza pewne ograniczenia. Podejście Riemanna nie od razu się przyjęło, np. dla współczesnego mu Karla Weierstrassa (1815–1897) funkcja nadal musiała być konkretna.

Por. D. Langwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, Boston: Birkhäuser, 1999.

Zmiana, jakiej dokonali Grecy, była podobna, ale miała daleko większe znaczenie. Było to przecież dwa i pół tysiąca lat temu, kiedy refleksyjna matematyka dopiero się wyłaniała z rachunkowego rzemiosła. Mówiąc najkrócej, zmiana również polegała na przejściu od konkretu do ogólności, w ich jednak przypadku od konkretnych liczb i konkretnych wielkości geometrycznych do takich pojęć ogólnych jak liczba parzysta (dowolna) czy kąt przy podstawie trójkąta (dowolny). Zmianę tę tradycja przypisuje Pitagorasowi (570–497) i pitagorejczykom, choć niewątpliwie pewien udział mieli w tym także jońscy filozofowie przyrody (przede wszystkim Tales, 640-547) i eleaci (przede wszystkim Parmenides, 540-450). U pitagorejczyków zbiegło się to z ich nastawieniem mistycznym, co prowadziło do nadawania znaczenia pojedynczym liczbom (np. 10 – doskonałość świata) i pewnym klasom liczb, np. wyróżniali liczby trójkątne, kwadratowe, pięciokątne itp., liczby parzyste i nieparzyste, liczby pierwsze i złożone, liczby doskonałe itd. A że odnajdowali liczby także

Lata życia Pitagorasa i innych uczonych starożytności są przybliżone.

w muzyce, geografii czy astronomii, doszli ostatecznie do przekonania, że „zasady [matematyki] są zasadami wszelkiego bytu”, a że „w niej liczby są rzeczą z natury”, pierwszą, więc konsekwentnie uznali „liczby za rzecz pierwszą w całej naturze, pierwiastki liczb za pierwiastki bytu, niebiosa całe za harmonię i liczbę”. Był to pierwszy historycznie wyraz przekonania, które zapewne jako matematycy podzielamy, że przyroda mówi językiem matematyki.

W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, tom I, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958, s. 67.

Ale co to jest liczba? Dla pitagorejczyków **liczba** była wielkością porównywalną z jednością, czyli (w naszej terminologii) liczby pitagorejczyków były to nasze liczby *naturalne* jako krotności 1 oraz liczby *wymierne* jako krotności całkowitych części 1. Nie znali 0, nie byli pewni czy 1 jest liczbą, nie znali liczb ujemnych. Mimo to uznawali „liczby za rzecz pierwszą w całej naturze”.

Na to pitagorejskie przekonanie padł jednak cień, kiedy odkryli, że *stosunek długości przekątnej do boku kwadratu NIE jest liczbą* (w ich rozumieniu pojęcia liczby). Naturalną reakcją był lęk i utajnienie odkrycia, ważniejsze jednak i bardziej interesujące okazało się to, że odkrycie to nie zawróciło pitagorejczyków z drogi abstrakcyjnego postępowania i nie zachwiało ich przekonaniem, że „liczby są rzeczą pierwszą”. Odkrycie to miało jednak dalekosiężne skutki i niektóre z nich postaram się teraz wymienić.

Tradycja głosi, że kiedy jeden z pitagorejczyków, Hippazos z Metapontu, bezbożnie odsłonił tę tajemnicę wrogom – został uśmiercony w katastrofie morskiej.

a) Ujawniło potęgę rozumowania dedukcyjnego i metody dowodzenia nie wprost, dzięki którym został odkryty fakt znajdujący się całkowicie poza zasięgiem dotychczasowych metod, opartych o codzienne doświadczenie. Potęga ta budziła zachwyt pomieszany z lękiem, ale pitagorejczycy, a za nimi i inni Grecy, zawierzyli tej metodzie i opierając się wyłącznie na niej zbudowali imponujący gmach wiedzy pewnej, którą nazwali **matematyką**. Zapłacili jednak za to postawą antyempiryczną, która matematyką grecką na stałe owładnęła. Dodajmy od razu, że był to **antyempiryzm metodologiczny**, ograniczony do metody. Matematyka była dla Greków nauką o świecie, jak jest nią dla nas np. fizyka, a nie jakąś sztuką samą dla siebie, z chwilą jednak ustalenia jej podstaw w postaci niektórych określeń, postulatów i aksjomatów (w ich przekonaniu ontologicznie prawdziwych) dalszy jej rozwój odbywał się wyłącznie *more deductivo*, bez odwoływania się już do świata i eksperymentalnego sprawdzania. Gwoli sprawiedliwości historycznej dodajmy (ale nie będziemy tego wątku rozwijać), że odległym skutkiem tej postawy antyempirycznej był uwiąd matematyki greckiej, po wyczerpaniu się pierwotnych bodźców.

b) Podejmując próby liczbowego zrozumienia stosunku przekątnej do boku kwadratu pitagorejczycy znaleźli (w naszej terminologii) rekurencje

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \qquad y_{n+1} = x_n + y_n.$$

Jak nietrudno zauważyć, jeśli $x_1 = y_1 = 1$, to x_n/y_n dąży do $\sqrt{2}$ (dla n nieparzystych z niedomiarem, dla n parzystych z nadmiarem; już x_6/y_6 daje dokładność 4 miejsc po przecinku). Nie znaczy to oczywiście, że pitagorejczycy traktowali $\sqrt{2}$ jako jakąś „granicę” ciągu liczb, wskazywało to jednak, że próba uchylenia tajemnicy $\sqrt{2}$ powodowała ukazanie się zmory nieskończoności, co wzmacniało poczucie tajemnicy, a także istniejący w matematyce greckiej *horror infinitatis* (lęk nieskończoności).

c) Kwadrat, jego bok i przekątna są jednak ważnymi pojęciami geometrycznymi, a przeto i stosunek przekątnej do boku jest uprawnionym pojęciem geometrycznym. I matematyka grecka wypracowała **geometryczną teorię stosunków**. Jej początki sięgają pitagorejczyków, potem podjął ją Eudoksos (400–355), a ostateczną formę nadał jej Euklides (365–300) w najżywiej przez potomnych dyskutowanej i najobszerniejszej (1/3 całego dzieła) Księdze V swoich *Elementów*. Księga ta wywarła istotny wpływ na dalszy rozwój matematyki. Nie tylko stworzyła ona solidną podstawę dla porównywania różnych wielkości, ale stała się także podstawą przekonania, że tylko w geometrii można poprawnie wyrazić teorię stosunków, a przeto tylko geometria jest dostatecznie ogólna i ścisła. W rezultacie matematycy greccy rozwijali przede wszystkim geometrię, osiągając na tym polu imponujące wyniki, a zaniedbywali arytmetykę i zastosowania. Urok *Elementów* Euklidesa sprawił, że stały się one dla naszej kultury wzorcem ścisłości i naukowego postępowania, a dla matematyki fundamentem, na którym przez ponad dwa tysiące lat z pełnym zaufaniem się opierano.

II. Przejście od jednej geometrii do wielu geometrii

Ale w *Elementach* Euklidesa była zadra: Postulat Piąty, zwany także Postulatem Równoległości. Euklides formułował go dla prostych rozumianych jako ograniczone odcinki (przypomina się *horror infinitatis*).

Postulat Piąty (Euklidesa). *Jeśli prosta, padająca na dwie inne proste, tworzy z nimi kąty wewnętrzne po jednej stronie takie, że ich suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to te dwie proste, przedłużane nieograniczenie, spotkają się po tej stronie, po której suma kątów jest mniejsza od dwóch kątów prostych.*

Współcześnie Postulat Piąty jest powszechnie znany w postaci innej, równoważnej, nadanej mu przez Johna Playfaira (1748–1819) w 1795 r.

Postulat Równoległości (według Playfaira). *Dla każdej prostej p i każdego punktu A leżącego poza tą prostą, w płaszczyźnie wyznaczonej przez prostą p i punkt A, istnieje jedna i tylko jedna prosta q przechodząca przez punkt A i rozłączna z p.*

Postulat ten budził jednak opory. Sam Euklides odwlekał powoływanie się na Postulat Równoległości (aż do twierdzenia I.29), skupiał on też uwagę studiujących jego geometrię. Można zapytać, czym on się różnił od pozostałych założeń jego geometrii? Dlaczego budził tyle oporów i kontrowersji?

Jak można sądzić, główną przyczyną kontrowersji dotyczących Postulatu Równoległości był jego charakter infinitystyczny, nie empiryczny. Mowa w nim o nieograniczonym przedłużaniu odcinków (w wersji oryginalnej) lub o aktualnie nieskończonych prostych (w wersji Playfaira), a przecież nie możemy wnioskować z zachowania skończonych odcinków o związkach między ich nieograniczonymi przedłużeniami czy, równoważnie, o tym co się dzieje bardzo daleko z nieskończonymi liniami prostymi. Może każde dwie proste się przetną, a może istnieje więcej niż jedna prosta rozłączna z daną?

Usiłowania zmierzające do usunięcia tej zadry zaczęły się jeszcze w starożytności, kiedy próbowano udowodnić Postulat Równoległości w oparciu o pozostałe aksjomaty i postulaty geometrii euklidesowej. Pierwsza znana próba pochodzi od Ptolemeusza (80–160), autorem innej był Proklos (410–485). Zajmowali się tym także matematycy arabscy, m.in. Nasreddin (1201–1271). A w czasach nowożytnych było tych prób już tyle, że w 1763 r. Georg Simon Klügel (1739-1812) napisał rozprawę doktorską, w której zanalizował 28 różnych dowodów Postulatu Równoległości. Ponieważ we wszystkich znalazł luki lub błędy, to wyraził wątpliwość, czy Postulat Równoległości da się w ogóle udowodnić. Sprowokowało to Jean Baptiste le Rond d'Alemberta (1717–1763) do nazwania tej sytuacji „skandalem w geometrii". Próby jednak trwały nadal i np. Adrien Marie Legendre (1752–1833), w kolejnych wydaniach swego wielce poczytnego podręcznika *Elements de géometrie,* podawał dalsze (też niepoprawne) dowody Postulatu Równoległości.

Wobec niepowodzenia prób udowodnienia Postulatu Równoległości wprost, próbowano też innych dróg. Jedną z nich było poszukiwanie postulatu innego, który byłby równie silny jak Postulat Równoległości, ale bardziej intuicyjny, właściwie oczywisty. Wymieńmy, dla przykładu, dwa takie postulaty. Autorem pierwszego był John Wallis (1616–1703).

Postulat Wallisa. *Dla dowolnego trójkąta ABC i dowolnego odcinka DE istnieje trójkąt DEF podobny do trójkąta ABC.*

Starszy o stulecie Alexis Claude Clairaut (1713–1765) zauważył, że „wokół nas widzimy mnóstwo prostokątów, w domach, ogrodach, izbach, murach" i w swojej książce *Elements de géometrie* (1741) proponował zastąpić Postulat Równoległości przez postulat następujący.

Postulat Clairauta. *Istnieją prostokąty.*

Żaden z takich postulatów zastępczych nie zyskał jednak powszechnego uznania. W tej sytuacji pozostała jeszcze trzecia droga, mianowicie udowodnienie Postulatu Równoległości nie wprost, czyli zanegowanie Postulatu Równoległości i wykazanie, że prowadzi to do sprzeczności. Przykładu postępowania tego rodzaju dostarczył Geronimo Saccheri (1677–1733), który w książeczce *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euklides z wszelkiej zmazy oczyszczony, 1733) wyciągnął z negacji Postulatu Równoległości ponad trzydzieści twierdzeń, aż doszedł do takich, które uznał za jawnie niedorzeczne, a w rezultacie negację Postulatu Równoległości za obaloną, tym samym zaś Postulat Równoległości za udowodniony.

Stanowisko Saccheriego nie przekonało badaczy, w uzyskanych bowiem przez niego twierdzeniach nie było jawnej sprzeczności, wobec czego próby kontynuowano. Sprzeczności nadal jednak nie było. Aż wreszcie, w pierwszej połowie XIX wieku, została przełamana bariera psychologiczna. Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Janos Bolyai (1802–1860) i Mikołaj Łobaczewski (1793–1856) uznali, że może istnieć (ściślej, że jest niesprzeczna) geometria oparta na negacji Postulatu Równoległości i pozostałych założeniach geometrii euklidesowej. Negacja Postulatu Równoległości przyjęła postać podobną do postulatu Playfaira.

Postulat Łobaczewskiego. *Do każdej prostej p i każdego punktu A leżącego poza tą prostą, w płaszczyźnie wyznaczonej przez prostą p i punkt A, istnieją co najmniej dwie proste q_1 i q_2, które przechodzą przez A i są rozłączne z p.*

Była to geometria osobliwa i bardziej niż zaciekawienie budziła ona opór. Wielki autorytet Gaussa sprawił jednak, że pogodzono się z jej istnieniem i nazwano *geometrią nieeuklidesową*. Zgoda na istnienie geometrii nieeuklidesowej oznaczała jednak przyznanie, że NIE można udowodnić Postulatu Równoległości w oparciu o pozostałe założenia geometrii euklidesowej. Nikogo to jednak poważnie nie zaniepokoiło, traktowano bowiem geometrię nieeuklidesową z pewnego rodzaju pobłażaniem, jako swoistą ciekawostkę. Aczkolwiek spadło zaufanie do geometrii jako fundamentu matematyki, to jednak nadal za jedyną prawdziwą geometrię uważano geometrię euklidesową.

III. Przejście od geometrii „prawdziwej” do teorii formalnej

Skutki odkrycia geometrii nieeuklidesowej sięgały jednak dalej, a pierwszy dostrzegł je David Hilbert (1862–1943). W swoich *Grundlagen der Geometrie* (Podstawy geometrii, 1899; później wiele wydań) przełamał kolejną barierę psychologiczną. Przede wszystkim przebadał gruntownie samą geometrię euklidesową, wypełniając wszystkie występujące w niej luki i objaśniając niejasności, a nadto wyjaśniając związki między geometrią euklidesową a odkrytą ponad pół wieku wcześniej geometrią nieeuklidesową. Było to bardzo dużo, ale jeszcze większe znaczenie jego dzieła polegało na tym, że Hilbert inaczej spojrzał na teorię dedukcyjną. Skoro istnieją dwie logicznie równorzędne teorie geometryczne i nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, która z nich jest prawdziwa (takie próby podejmował jeszcze Gauss, ale w końcu uznał rozstrzygnięcie problemu prawdziwości za niemożliwe), to należy przyjąć, że poprawna **teoria aksjomatyczna jest strukturą formalną i od rzeczywistości niezależną**. Związek takiej teorii z rzeczywistością nadaje jej dopiero **interpretacja**, czyli **model**.

Autorytet Hilberta sprawił, że jego pogląd o formalnym charakterze teorii aksjomatycznych został powszechnie przyjęty, a to było jak otwarcie puszki Pandory. Teraz można już było, nie oglądając się na jakiekolwiek motywacje fizyczne, tworzyć rozmaite układy aksjomatyczne i rozwijać oparte na nich teorie. I teorie takie zaczęły się pojawiać niemal jak grzyby po deszczu, przede wszystkim w algebrze, ale także w innych działach matematyki. Z ważniejszych przykładów przypomnijmy aksjomatykę Frécheta z 1906 r. dwóch rodzajów przestrzeni funkcyjnych, a mianowicie tzw. L-przestrzeni i E-przestrzeni (te drugie Hausdorff nazwał później przestrzeniami metrycznymi), aksjomatykę Zermelo teorii mnogości z 1908 r., pierwszą aksjomatykę ogólnych przestrzeni topologicznych podaną przez Hausdorffa w 1914 r., aksjomatykę Banacha z 1922 r. przestrzeni funkcyjnych, później nazwanych jego imieniem itd. Uzyskana dzięki przyjęciu takiego stanowiska swoboda ogromnie się przyczyniła do rozwoju matematyki w XX wieku i nadal trwa.

Uniezależnienie teorii aksjomatycznych od rzeczywistości miało jednak swoją cenę, co najlepiej widać w pytaniu o poprawność abstrakcyjnej teorii aksjomatycznej. Ponieważ nie możemy odwoływać się do rzeczywistości zewnętrznej, to Hilbert przyjął, że **teoria aksjomatyczna jest poprawna, jeśli jest zupełna i niesprzeczna**. Żądanie zupełności było wyrazem wiary, że teoria aksjomatyczna może i powinna objąć wszystkie zdania prawdziwe w zakresie przez nią opisywanym, co ściślej wyrażało się żądaniem, by każde zdanie sformułowane w języku danej teorii było na jej gruncie rozstrzygalne, tzn. dawało się bądź udowodnić bądź obalić. Jeszcze ważniejsze było żądanie niesprzeczności, można je bowiem nazwać warunkiem bezpieczeństwa. I dla udowodnienia, że aksjomatyczne teorie matematyki spełniają te dwa warunki, Hilbert sformułował program, który został nazwany **formalizmem**.

Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii, rok 1928.

Program Hilberta rozkładał się na dwa etapy. Pierwszym była **formalizacja**, tj. rekonstrukcja matematyki w postaci systemu sformalizowanego. W tym celu należało stworzyć sztuczny język symboliczny oraz reguły budowania w tym języku wyrażeń poprawnych, a następnie wprowadzić aksjomaty i reguły wnioskowania, odwołujące się tylko do kształtu formuł, a nie do ich znaczenia. Po dokonaniu tego kroku matematyka stałaby się swoistą „grą na formułach”, podatną jednak na dalszą analizę.

Etap drugi był jakby budowaniem następnego piętra, które Hilbert nazwał **metamatematyką**. Podstawowym zadaniem metamatematyki miało być dostarczenie dowodu niesprzeczności i zupełności poprzednio sformalizowanej matematyki.

W realizacji tego programu osiągnięto pewne sukcesy, np. wykazano niesprzeczność pewnego fragmentu systemu liczb naturalnych (Ackermann, 1924), jednakże wkrótce nastąpił wstrząs w postaci dwóch twierdzeń, które sformułował i udowodnił Kurt Gödel (1906-1978).

TWIERDZENIE A. *Każdy system sformalizowany, który zawiera arytmetykę liczb naturalnych i jest niesprzeczny – jest niezupełny.* Innymi słowy, w każdym takim systemie istnieją tzw. *zdania nierozstrzygalne*, których nie można w nim ani udowodnić ani obalić.

TWIERDZENIE B. *Dowód niesprzeczności teorii sformalizowanej, zawierającej arytmetykę liczb naturalnych, wymaga środków wykraczających poza rozważaną teorię.* Mówiąc trochę nieściśle, dowód niesprzeczności takiej teorii wymaga teorii większej, której niesprzeczności tym bardziej nie możemy być pewni.

Twierdzenia te pokazały, że program Hilberta nie daje się zrealizować. Mamy więc kolejne ambarasujące NIE w matematyce. W szczególności twierdzenie A pokazuje, że istnieje zasadnicza i nieprzekraczalna różnica między tym, co jest prawdziwe w danej teorii, a tym, co można udowodnić za pomocą środków logicznych tej teorii.

Każdy z trzech opisanych przypadków NIE był swoistym znakiem zapytania. Swoistość ta polegała na tym, że nie kwestionował on dotychczasowych osiągnięć matematycznych, ale ostrzegał, że dotychczasowe poglądy na matematykę i jej stosunek do świata wymagają rewizji. Każde z tych ostrzeżeń zostało potraktowane poważnie, w konsekwencji czego zmieniały się zarówno poglądy na matematykę jak i kierunki jej rozwoju, ale i rozumienie tych ostrzeżeń także ewoluowało, a zapewne i dalej ewoluować będzie.

Odkrycie pitagorejczyków, że stosunek przekątnej do boku kwadratu NIE jest liczbą w ich rozumieniu tego pojęcia, spowodowało odwrócenie się matematyki greckiej od arytmetyki i skupienie na geometrii, w zakresie której odnieśli Grecy imponujące sukcesy. Geometria była dla nich nauką o świecie, jak dla nas taką nauką jest fizyka, założenia geometrii (aksjomaty i postulaty) były więc dla nich abstrakcyjnymi uogólnieniami podstawowych spostrzeżeń wynikających z codziennego doświadczania świata. *Elementy* Euklidesa narzuciły (także i nam, spadkobiercom myśli greckiej) widzenie stosunków przestrzennych w świecie, ich zaś doskonałość logiczna sprawiła, że stały się one także wzorem wiedzy pewnej na dwa z górą tysiąclecia. Niewyrażalność pewnych stosunków liczbami (przy pitagorejskim rozumieniu liczby) nie zamknęła jednak drogi do porównywania figur geometrycznych, księga V *Elementów* dostarczyła bowiem doskonałych narzędzi dla geometrycznej teorii podobieństwa i do rozważania dowolnych stosunków wielu innych wielkości, a w XIX wieku, który ją w pełni docenił – przyczyniła się także do zbudowania teorii liczb rzeczywistych. Zgodnie z tą teorią, stosunek przekątnej kwadratu do jego boku jest liczbą, ale jest to liczba *niewymierna* $\sqrt{2}$, zaś pitagorejskie NIE jest dowodem tej niewymierności.

Odkrycie XIX-wiecznych geometrów, że Postulat Równoległości NIE wynika z pozostałych założeń geometrii euklidesowej, doprowadziło do uznania, że istnieją także inne geometrie, równie pełnoprawne logicznie jak geometria euklidesowa. Zrozumienie zaś, że nie jest możliwe rozstrzygnięcie, czy i która z nich jest prawdziwą geometrią świata, pociągnęło za sobą radykalną zmianę w pojmowaniu stosunku matematyki do świata. Matematyka przestała być bezpośrednim opisem świata (jak nadal jest nim fizyka), a stała się zbiorem teorii (niekoniecznie aksjomatycznych), które możemy w świecie interpretować. Dla wielu dziedzin wiedzy matematyka jest nieocenionym narzędziem, ale o jej użyteczności i skuteczności decydują teraz jej modele.

Skoro teorie matematyczne nie mogą być bezpośrednio weryfikowane przez świat, to powstał problem ich poprawności. Wyraził się on postulatami zupełności i niesprzeczności teorii, a potem także innymi, np. kategoryczności. Kolejne NIE (odkryte przez Gödla) pokazało, że opis matematyczny ma ograniczony zasięg. Przyczyniło się to do zrozumienia, że istnieją trzy rzeczywistości, świat – język potoczny – język matematyczny, i że już język potoczny nie powie wszystkiego o świecie, a język matematyczny jeszcze mniej. Mimo to matematyka pozostaje najbardziej skutecznym i najgłębiej sięgającym sposobem opisywania świata. W tym kontekście tajemnica skuteczności matematyki w opisywaniu przez nią świata nabiera nowego wymiaru.

Opowiedziana historia trzech NIE uczy pokory i szacunku. Pokory w obliczu materii matematycznej, która nie poddaje się prostym rozwiązaniom i zwodzi nawet największych, a szacunku dla uporu i przenikliwości ludzkiego ducha, które to cechy sprawiają, że matematyka się rozwija i jest dziś najskuteczniejszym i najgłębiej sięgającym instrumentem poznawania świata. Jest w tym jakaś tajemnica, tajemnica matematyki między światem a człowiekiem.