Jest to skrócony zapis odczytu wygłoszonego na seminarium „Popularyzacja matematyki”, na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Czy *Co to jest matematyka?* Couranta i Robbinsa jest książką popularną?

Filip MURLAK, Warszawa

Latem roku 1937, gdy byłem młodym studentem, uczyłem się podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, przerabiając z pomocą ojca jego podręcznik Differential and Integral Calculus. *Myślę, że właśnie wtedy wpadł on na pomysł napisania książki, która na poziomie elementarnym wyjaśniałaby idee i metody matematyki, i że ja mógłbym mu pomóc.*

Książka powstała w ciągu kilku następnych lat. Pamiętam długie sesje, w których asystowałem Herbertowi Robbinsowi i ojcu. Najwięcej tych sesji odbyło się w ciągu letnich miesięcy 1940 i 1941 roku.

Gdy książka się ukazała, w kilku egzemplarzach umieszczono specjalną dedykację: Matematyka dla Lori *(chodziło o moją młodszą siostrę, która miała wówczas trzynaście lat). Po upływie kilku lat, gdy miałem wziąć ślub, ojciec przekonał moją przyszłą żonę, aby przeczytała* Co to jest matematyka? *Co prawda nie zaszła ona zbyt daleko, ale została zaakceptowana jako członek rodziny.*

Tak Ernest D. Courant wspomina narodziny książki, która już od sześćdziesięciu lat niesie radość obcowania z prawdziwą matematyką. Chwaliły ja najtęższe umysły dwudziestowiecznej nauki. Albert Einstein uznał ją za *błyskotliwą opowieść o podstawowych pojęciach i metodach matematyki*, Herman Weyl zaś stwierdził, że to *zdumiewające, do jakiego stopnia autorom udało się wyjaśnić za pomocą najprostszych przykładów wszystkie podstawowe idee i metody, które tworzą krwiobieg naszej nauki.* Jej sława sięgnęła jednak daleko poza wąskie grono specjalistów. New York Times pisał, że *powinien ją przeczytać każdy, kto – zawodowo lub z innych przyczyn – interesuje się matematyką.* Spróbujmy odnaleźć cechy, które zapewniły tej książce tak szczególne miejsce w biblioteczce prac popularyzatorskich.

Matematyka, ale jaka?

Celem jest istotne zrozumienie matematyki jako całości organicznej i jako podstawy naukowego myślenia i działania.

R. Courant

Opinia Couranta o jakości nauczania i popularyzacji matematyki nie była najlepsza. We wstępie do omawianej książki podsumowuje podstawowe zarzuty. Błędy sięgają, wg. Couranta, już samych początków edukacji. Lekcje matematyki są prostą zaprawą do rozwiązywania zadań. Akcentuje się głównie sprawność rachunkową i opanowanie ustalonego zestawu algorytmów. Tymczasem już od samego początku należy zapewnić uczniom istotny kontakt z treścią matematyki. Należy prezentować idee, unikać zaś chwytów technicznych i wybiegów.

Na poziomie uniwersyteckim również przeważa rzemieślnicze podejście, z tą różnicą, że miejsce rachunków zajmują dowody. Prawdziwa, „dziejąca się” matematyka żywi się tymczasem intuicją i konstruktywną pomysłowością, które wskazują kierunek poszukiwań. Dopiero ostateczny efekt badań formalizowany jest w duchu postulatywno-dedukcyjnym. Niestety zbyt często ukazuje się jedynie ten końcowy wynik, zaniedbując intuicje, które do niego doprowadziły. Badacze coraz bardziej się specjalizują, tracąc obraz matematyki jako organicznej całości. Dążą do maksymalnej abstrakcji, a powinni, jak dobry pejzażysta, zachowywać równowagę między planem ogólnym a barwnym szczegółem. Zbyt wielu matematyków hołduje zasadzie *splendid isolation*, zapominając, że ich dziedzina jest, lub przynajmniej powinna być, podstawą każdego naukowego myślenia i działania.

Z tej pokaźnej listy zarzutów wyłania się program poprawy sytuacji. Jakie są szanse na zrealizowanie tego zadania? Courant jest optymistą. Pisze, że *można dojść drogą prostą od rzeczy najbardziej elementarnych do wyżyn, z których ogarniamy wzrokiem całą istotę i siły rozwojowe współczesnej matematyki.* Jednakże jego optymizm daleki jest od bezrefleksyjności. *Zrozumienia matematyki nie da się przekazać bez wysiłku, jak rozrywki, podobnie jak najświetniejsze recenzje nie mogą dać wykształcenia muzycznego osobom, które nigdy nie słuchały muzyki intensywnie.* Posłuchajmy więc!

Na głęboką wodę

Na dokładne omówienie zawartości książki nie ma miejsca w tak krótkim szkicu. Byłoby to zresztą sprzeczne z duchem pracy Couranta i Robbinsa, wzywającej do bezpośredniego kontaktu z istotą rzeczy. Oddawszy więc sprawiedliwość spójnej i eleganckiej kompozycji matematycznego pejzażu zaprezentowanego przez autorów, skoncentrujemy się na wybranym detalu wierząc, że przyniesie to więcej pożytku. Obiektem naszej szczególnej uwagi będzie twierdzenie Brouwera o punkcie stałym zaprezentowane w V rozdziale książki.

Twierdzenie Brouwera. *Każde ciągłe przekształcenie kuli n-wymiarowej w siebie ma punkt stały.*

Aby dostrzec charakterystyczne cechy *Co to jest matematyka?* omówimy pokrótce sposób prezentacji twierdzenia Brouwera również w trzech innych książkach. Oczywiście dobór prezentowanych wersji twierdzenia nie jest przypadkowy. Każde z tych czterech źródeł reprezentuje pewien specyficzny styl przekazywania wiedzy matematycznej i jest, w swojej klasie, znakomite. Szczególną uwagę zwraca to, że charakter omawianych książek wpływa nie tylko na język, ale również na wybór argumentów.

Dla starszaków. Zaczniemy od najbardziej wymagającego dowodu. Niniejsze podejście pochodzi z książki Borisovicha i innych [2]. Autorzy najpierw prezentują pomocnicze twierdzenie.

Twierdzenie. *Sfera S^n nie jest retraktem $\bar{D}^{n+1}$.*

Dowód tego faktu sprowadza się do narysowania diagramu w kategorii przestrzeni topologicznych opisującego własności retrakcji i przeniesieniu go za pomocą funktora n-tej grupy homotopii do kategorii grup. Prosta analiza otrzymanego diagramu doprowadza do sprzeczności.

Następnie autorzy przypuszczają, że istnieje ciągła funkcja $f : \bar{D}^{n+1} \to \bar{D}^{n+1}$ bez punktów stałych i za pomocą tej funkcji definiują retrakcję, co jest w sprzeczności z poprzednim twierdzeniem.

Dowód jest krótki, elegancki i… kompletnie niezrozumiały dla czytelnika nie mającego za sobą semestralnego kursu topologii algebraicznej.

Dla średniozaawansowanych. Kolejne podejście pochodzi z podręcznika Hatchera do topologii algebraicznej [4]. Zasadniczo zaprezentowany jest tam ten sam dowód, jednak tym razem jedynie w przypadku dwuwymiarowym, dzięki czemu zamiast n-tej grupy homotopii mamy grupę podstawową. Autor rezygnuje również z języka diagramów, na rzecz większej bezpośredniości opisu. Rozumowanie klarownie przekazuje główny pomysł ogólnego dowodu na prostym, ale nietrywialnym przykładzie. Uogólnienie wyniku na dowolny wymiar jest wprawdzie możliwe dopiero po policzeniu wyższych grup homotopii sfer, ale to właśnie może stanowić motywację do dalszego zgłębiania prezentowanej tam teorii. Nadal jednak jesteśmy daleko od poziomu wykładu popularnego. Można wszak skończyć studia matematyczne i nie usłyszeć słowa homotopia.

Dla początkujących, ale zdolnych. Trzecia z prezentowanych wersji jest dowodem z Księgi. Aigner i Ziegler [1] rozpoczynają od wykazania dwuwymiarowego wariantu pięknego kombinatorycznego lematu Spernera.

Lemat Spernera. *Wierzchołkom triangulacji trójkąta $V_1V_2V_3$ nadajemy kolory w taki sposób, że V_i otrzymuje kolor i, do kolorowania wierzchołków na boku V_iV_j używamy kolorów i oraz j, a wierzchołki we wnętrzu kolorujemy dowolnie. Wtedy istnieje mały trójkąt trójkolorowy.*

Niewielka porcja rachunków w duchu geometrii analitycznej pozwala na wyprowadzenie z tego faktu twierdzenia Brouwera.

Pożytki pedagogiczne płynące z takiego podejścia są liczne. Po pierwsze, dowód jest dostępny dla każdego, kto ma chęć przeczytać kilkunastostronicowy rozdział i nie wymaga żadnego specyficznego przygotowania wykraczającego poza program liceum. Po drugie, pokazuje związki między pozornie odległymi działami matematyki, takimi jak topologia i kombinatoryka. Po trzecie, rozwija w czytelniku wrażliwość na urodę rozumowań matematycznych.

Na szczególną uwagę zasługuje tu wspomniana już przy okazji omawiania wersji Hatchera kwestia ogólności. Twierdzenie sformułowane jest u Aignera i Zieglera w pełnej wersji. Przypadek jednowymiarowy jest – ze wszech miar słusznie – skwitowany informacją, że wynika wprost z twierdzenia Bolzano. Do głębszej analizy wybrany jest przypadek dwuwymiarowy, a więc pierwszy nietrywialny. Jak zauważają autorzy, przerobienie zaprezentowanego rozumowania na ogólny dowód indukcyjny nie przedstawia najmniejszej trudności. Dzieje się tak dlatego, że wszystkie kluczowe kroki pojawiają się w sposób generyczny już w tym przypadku.

Mimo wszystkich wspomnianych zalet, podejście Aignera i Zieglera trudno określić mianem popularnego. Główną przyczyną jest właśnie jego błyskotliwość. Rozumowanie jest dość skomplikowane i wymaga pewnej dojrzałości matematycznej. Co gorsze, jak wiele dowodów z Księgi, ma ono charakter *deus ex machina*. Początkujący czytelnik rzadko toleruje takie niespodziewane zwroty akcji.

Dla (prawie) wszystkich. Omówienia podejścia Couranta i Robbinsa rozpoczniemy od zacytowania oryginalnego sformułowania autorów.

Twierdzenie Brouwera głosi, że każde ciągłe przekształcenie koła pozostawia co najmniej jeden punkt stały; znaczy to, że istnieje co najmniej jeden taki punkt, którego położenie po przekształceniu jest takie samo jak położenie pierwotne.

Już w tym fragmencie widać podstawowe cechy stylu Couranta i Robbinsa. Autorzy odrzucają klasyczne metody strukturalizowania tekstu matematycznego. Rezygnują z wstępnych definicji. Posługują się możliwie potocznym językiem. Oczywiście ceną za takie uproszczenie jest utrata precyzji; jak się przekonamy później, nie zawsze bezkarna.

Autorzy prowadzą dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje przekształcenie bez punktu stałego. Niech P' oznacza obraz punktu P przy rozważanym przekształceniu. Z każdym punktem P wiążemy wektor PP'. Dla dowolnego okręgu współśrodkowego z rozważanym kołem definiujemy indeks wektora jako ilość obrotów wykonywaną przez wektor związany z punktem P jednokrotnie obiegającym okrąg przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Zauważmy, że jest to liczba całkowita. Twierdzimy, że dla obwodu rozważanego koła indeks jest równy 1. Aby to wykazać zauważmy, że wektor styczny związany z P obraca się dokładnie raz. Gdyby wektor PP' obracał się inną ilość razy, to musiałby „minąć” wektor styczny. Tak jednak stać się nie może, gdyż wektor styczny jest stale na zewnątrz koła, a wektor PP' stale wewnątrz. Jeśli teraz zmniejszamy promień okręgu, to indeks zmienia się w sposób ciągły, gdyż kierunek wektora przekształcenia zmienia się w sposób ciągły. Jednocześnie indeks przyjmuje jedynie wartości całkowite, więc musi pozostawać stały. Ale dla bardzo małego okręgu, wektory skierowane są w przybliżeniu tak samo, jak wektor w środku okręgu, więc indeks dla małych okręgów jest równy zero. Sprzeczność.

Prezentowany dowód jest adaptacją oryginalnego rozumowania Brouwera. Doświadczenie uczy, że wraz z upływem czasu pojawiają się coraz prostsze dowody twierdzeń. Dlaczego więc autorzy zdecydowali się na prezentacje pierwszego dowodu? Odpowiedź kryje się w rozumieniu słowa „najprostszy". Dla topologa algebraicznego najprostszy będzie prawdopodobnie dowód z książki Borisovicha i innych, bo bierze się wprost z elementarnych dla niego własności grup homotopii. Dla zdolnego studenta – być może dowód przez lemat Spernera, bo nie odwołuje się do mglistych argumentów w typie ciągłości indeksu. Jednakże dla czytelnika początkującego najprostszy będzie właśnie dowód wybrany przez Couranta i Robbinsa, bo jest najbardziej poglądowy i naturalny. W rozumowaniu pojawiają się raptem trzy symbole matematyczne; wszystko można opowiedzieć słowami, przy prawie kompletnym braku rachunków. Jeśli zaś idzie o naturalność, to przesadą było by twierdzić, że jest to dowód wynikający prawdziwie bezpośrednio ze sformułowania twierdzenia. Jednak w porównaniu z innymi tworzy najmniej nowych bytów, trzyma się najbliżej oryginalnego kontekstu zadanego przez tezę twierdzenia.

Czy, mimo wszystko, może być zaskakujące, że cechy te nosi właśnie oryginalny dowód Brouwera? Bynajmniej. Pierwsze dowody są właśnie takie: formalizują, często w żmudny sposób, naturalne intuicje towarzyszące twierdzeniu. Późniejsze dowody są sprytniejsze i – właśnie dlatego – mniej naturalne.

Łyżka dziegciu

Przyjrzyjmy się jeszcze jednemu przykładowi, który może podziałać otrzeźwiająco na tych, którzy chcieliby zbyt radośnie upraszczać matematyczne argumenty. Rozważmy pewne zagadnienie mechaniki pochodzące od H. Whitney'a.

Pociąg jedzie od A do B po torze prostoliniowym. Może zachowywać się rozmaicie, przyspieszając ruch, zwalniając, przystając, albo nawet jadąc w tył przez pewien czas zanim dojedzie do B. Z góry znamy dokładnie ruch pociągu. Pręt umocowany na przegubie na podłodze jednego z wagonów może sie poruszać bez tarcia bądź w przód, bądź w tył dopóty, dopóki nie dotknie podłogi. Czy możliwe jest ustawienie pręta w takim położeniu, że gdy puścimy go w chwili ruszenia pociągu, to nie upadnie przez całą drogę od A do B?

Courant i Robbins proponują następujące rozwiązanie. Funkcja, która przyporządkowuje położeniu początkowemu pręta jego położenie końcowe, jest ciągła. Jeśli pręt spoczywa początkowo na podłodze w jednej z dwóch skrajnych pozycji, to w tej pozycji pozostanie. Na mocy twierdzenia Bolzano istnieje położenie wyjściowe, dla którego pręt w położeniu końcowym będzie prostopadły do podłogi. Rozumowanie jest równie poglądowe jak dowód twierdzenia Brouwera. Niestety, jak zauważył w 1976 roku Tim Poston, jest błędne. Owszem, funkcja opisująca położenie dla ustalonych warunków początkowych w zależności od czasu jest ciągła. Jednak założenie ciągłości funkcji przyporządkowującej położeniu pierwotnemu położenie końcowe jest nieuprawnione. Pręt może wraz ze zmianą położenia początkowego coraz bardziej zbliżać się w pewnej chwili do podłogi, a następnie, nie dotykając jej, przewracać się w drugą stronę. Kiedy jednak dotknie podłogi, już na niej zostaje. W tym przypadku funkcja położenia jest ciągła, jednak położenie końcowe przyjmuje dokładnie dwie wartości, więc nie jest ciągłe. Oczywiście w tym przypadku nie istnieje szukane położenie początkowe.

Przytoczenie tego przykładu nie ma na celu zniechęcenia potencjalnych popularyzatorów. Należy jedynie pilnować, żeby za każdym rozumowaniem nieformalnym stał ścisły dowód. Bez tego certyfikatu słuszności łatwo możemy zejść na manowce.

Sztuczki popularyzatora

Mniej traci początkujący czytelnik pomijając fragmenty trudne,
niż czytelnik zaawansowany pomijając fragmenty łatwe.

(zasłyszane)

Spróbujmy podsumować środki, jakimi posługują się Courant i Robbins w swojej książce. Indywidualnie, każda z tych obserwacji wydaje się trywialna, jednak razem stanowią o niepowtarzalnym charakterze omawianej książki.

Oznaczenia i pojęcia. Autorzy starają się minimalizować ilość oznaczeń. Oczywiście formalny zapis jest niezbędny w przypadku prowadzenia rachunków, jednak matematycy często wprowadzają oznaczenia również wtedy, gdy nie ma po temu żadnego powodu. Podobnie rzecz ma się z „lokalnymi" definicjami. Każdy autor powinien pamiętać, że duża ilość definicji i oznaczeń jest wygodna głównie dla niego samego – oszczędza palce. Dla czytelnika, zarówno początkującego, jak i zaawansowanego, stanowią one jedynie dodatkowe obciążenie. Dobry obyczaj nakazuje uzasadnienie niezbędności każdej wprowadzonej definicji i oznaczenia.

Język. W bezpośrednim związku z kwestią pojęć i oznaczeń pozostaje język, którego używamy. Na korzyść pewnej formalizacji języka przemawia uzyskiwana dzięki temu precyzja. Jednak w pracy popularnej najważniejsza jest przystępność. Jeśli więc coś można napisać językiem potocznym bez utraty sedna, to należy to czynić. Zdanie „pewien punkt nie zmienia położenia po przekształceniu" nie jest mniej precyzyjne niż „przekształcenie ma punkt stały".

Struktura narracji. Istotnym aspektem prezentacji treści matematycznych jest organizacja rozumowań. W pracach naukowych dobrze sprawdza się klasyczny schemat oparty na wyróżnionych graficznie definicjach, twierdzeniach, lematach, itp. Jednak książki popularnonaukowe nie służą do studiowania tylko do czytania. Do tego celu ciągły przekaz wydaje się bardziej stosowny.

Redundancja. *Repetitio mater studiorum est.* Wielokrotne powtarzanie jest jedyną znaną metodą przyswajania wiedzy. Wydawać się może, że w przypadku matematyki nie jest to takie istotne. Nic bardziej mylnego. Wprawdzie możemy zrozumieć coś nie zapamiętując tego, jednak nie możemy używać czegoś, czego nie pamiętamy. Jeśli więc autor uzna, że jakiś termin będzie naprawdę przydatny w dalszych rozważaniach, to nie od rzeczy będzie kilkakrotne przypomnienie, co on oznacza. Dzięki temu czytelnik nauczy się wprowadzonej definicji i będzie mógł jej dalej swobodnie używać. Książka popularnonaukowa powinna dać się czytać jak powieść – bez wracania do części już przeczytanej. Ponadto wielokrotne formułowanie tej samej myśli na różne sposoby daje czytelnikowi wachlarz podejść, z których może wybrać to, które mu najbardziej odpowiada; albo z kilku podejść wysnuć komplementarne intuicje.

Na ucho. Każdy, kto próbował przekazać jakieś koncepcje matematyczne bez pomocy tablicy zauważył zapewne, że to, co mówi jest skonstruowane zupełnie inaczej, niż to, co by napisał. W podświadomy sposób stosujemy wtedy wszystkie wspomniane wyżej reguły. W publikacjach popularnych takie „mówione" rozumowania sprawdzają się szczególnie dobrze. Związane jest to zapewne z sekwencyjnością wynikającą w przypadku przekazu ustnego z samej jego istoty, w przypadku książki popularnonaukowej zaś głównie z lenistwa czytelnika...

Najprostsze nietrywialne przypadki. Zamiast prezentować ogólne wyniki dobrze jest wybrać naturalny przypadek szczególny. Aby spełnił swoją rolę powinien być możliwie prosty, ale jednocześnie ilustrować wszystkie kluczowe aspekty ogólnego zjawiska.

Intuicja. Przedstawiane rozumowania powinny się odwoływać przede wszystkim do intuicji i idei stojących za ścisłymi rozumowaniami. Formalne dowody i rachunki powinny być sprowadzone do minimum.

Naturalne dowody. Spośród dostępnych wersji rozumowania wybierajmy zawsze te najbardziej bezpośrednie. Księgę lepiej odstawić na Półkę.

Zastosowania. Nie wolno dopuścić, aby czytelnik pomyślał „Ale po co to komu potrzebne?” Związki z innymi dziedzinami są integralną częścią matematyki.

Stopniowanie. Courant i Robbins stopniują prezentowany materiał na trzy sposoby, ze względu na trudność, techniczność i niezbędność w dalszych rozważaniach. Podział ten, choć może wydawać się przesadnie skrupulatny, ułatwia czytelnikowi trudną czasami decyzję pominięcia jakiegoś fragmentu.

Czy to jest książka popularna?

For knowledge comes slowly, and when it comes,
it is often at great personal expense.

Paul Auster *The New York Trilogy*

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie zadane w tytule tego szkicu. Aby to uczynić, doprecyzujmy, co to znaczy popularna. Wydaje się rozsądne przyjąć, że popularna, to zrozumiała dla osoby z co najmniej średnim wykształceniem. Biorąc pod uwagę charakter rozumowań w *Co to jest matematyka?*, zasadne staje się również pytanie, co to znaczy zrozumieć? Widzieliśmy, że „zrozumiałość” argumentu nie musi iść w parze z jego słusznością. Na pewno też nie jest tym samym, co umiejętność formalnego uzasadnienia. Przyjmijmy, że w kontekście popularyzacji nauki, zrozumieć, to mieć poczucie, że się „wie, jak to jest naprawdę”. Czy zatem przeciętny posiadacz matury może czytając książkę Couranta i Robbinsa osiągnąć poczucie, że wie jak to jest naprawdę, przynajmniej w podstawowych kwestiach? Tak, ale to będzie bolało...

Będzie bolało, bo matematyka jest trudna. Osiągnięcie zrozumienia zawsze wymaga wysiłku. A kiedy już dobrniemy na szczyt i ochłoniemy z zachwytu wywołanego roztaczającym się stamtąd widokiem, dostrzeżemy wąską, stromą ścieżkę wiodącą wyżej i wyżej, ku kolejnym szczytom. Wiele z nich kryje się w chmurach.

Literatura

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler. *Dowody z Księgi.* PWN, 2002.

[2] Yu. Borisovich, N. Bliznyakov, Ya. Izraylevich, T. Fomenko. *Introduction to Topology.* Mir Publishers, Moscow 1985.

[3] R. Courant, H. Robbins. *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka. Warszawa 1998.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.