Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXIII Szkole Matematyki Poglądowej *Metody klasyczne i współczesne*, sierpień 2004.

Martyngały a rynki finansowe

Jacek JAKUBOWSKI, Warszawa

1. Okazuje się, że teoria martyngałów – część teorii procesów stochastycznych jest podstawowym narzędziem we współczesnej matematyce finansowej.

Celem tego artykułu jest przedstawienie podstawowych idei prowadzących do tego związku. Aby uniknąć trudności technicznych ograniczę się do najprostszego przypadku tj. przypadku dyskretnej i skończonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{M}, P)$.

Zacznę od opisu klasycznego zadania hazardu (gra w „orła i reszkę"), przypomnę co to jest warunkowa wartość oczekiwana, wprowadzę pojęcie martyngału, a skończę na zagadnieniach wyceny pewnych aktywów (instrumentów pochodnych) na rynkach finansowych (dla niektórych gra na giełdzie to „nieklasyczny" hazard).

2. Rozważmy najprostszą sytuację gry w „orła i reszkę". Gracze A i B grają rzucając symetryczną monetą. W pojedynczej kolejce gracz wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 1/2 i przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 1/2. Zasadniczo gra kończy się, gdy jeden z graczy zostanie zrujnowany. Gracze mogą jednak umówić się inaczej (np. wycofywać się z gry w dogodnym dla siebie momencie). Wyniki poszczególnych kolejek są niezależne, zatem wygrane pierwszego gracza w kolejnych partiach są niezależnymi zmiennymi losowymi $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, przy czym $P(\xi_i = 1) = 1/2 = P(\xi_i = -1)$. Korzystając z metod rachunku prawdopodobieństwa można zbadać tę grę (znaleźć szansę wygrania ustalonej kwoty, szansę przegrania całego kapitału czyli ruiny, szansę wygrania k zł nim przegramy n zł itp.). Wygrana gracza A po n grach jest równa sumie wygranych w pojedynczych kolejkach:

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

Przy badaniu zachowania ciągu zmiennych losowych $(S_n)_n$ wykorzystuje się związek

$$S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1},$$

zatem do S_n dodajemy niezależną od S_n zmienną losową ξ_{n+1} o średniej zero, czyli intuicyjnie: jeśli znamy S_n (np. jest równe 7), to S_{n+1} daje średnio to samo (formalnie $E(S_{n+1}|S_n = 7) = 7$). Ta własność jest bardzo przydatna przy badaniu ciągu $(S_n)_n$. Warto wykorzystać to spostrzeżenie i uogólnić rozumowanie, aby móc stosować teorię do szerszej klasy zagadnień np. zagadnienia ruiny przy osłabionych założeniach o grze. Chcemy pozbyć się założenia o niezależności zmiennych losowych ξ_i zachowując własność uśrednienia tzn. własność $E(S_{n+1}|S_n = k) = k$. W następnym punkcie zajmiemy się formalnym opisem takiego uogólnienia.

3. Jeśli dysponujemy jakąś cząstkową wiedzą o zjawisku, np. wiemy, że zaszło zdarzenie A ($P(A) > 0$), to mamy do czynienia z prawdopodobieństwem warunkowym $P(\cdot|A)$ (dla przypomnienia $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$). Przy ustalonym A, funkcja $B \mapsto P(B|A)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathcal{M}$, który będziemy oznaczać P_A. Dla zmiennej losowej X możemy mówić o rozkładzie warunkowym X, gdy wiemy, że zaszło zdarzenie A, tzn. o $P_A(X = x_i) = P(X = x_i|A)$ dla wszystkich wartości $x_i, i = 1, \ldots, k$ przyjmowanych przez zmienną losową X. Rozpatrujemy także wartość oczekiwaną zmiennej losowej X, gdy wiemy, że zaszło A tzn.

$$E(X|A) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i|A)$$

Jest to klasyczna definicja wartości oczekiwanej zmiennej losowej X względem rozkładu prawdopodobieństwa P_A. Stąd oznaczenie $E(X|A)$ i interpretacja jako wartości średniej X, gdy wiemy, że zaszło zdarzenie A. Wielkość tę możemy wyrazić za pomocą wyjściowego rozkładu prawdopodobieństwa P, a mianowicie

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega)\, P(\omega).$$

Zawsze zachodzi jedno ze zdarzeń A lub $A' = \Omega \setminus A$. Stąd dla rozbicia $\mathcal{F} = \{A, A'\}$ przestrzeni Ω możemy zdefiniować nową zmienną losową: $E(X|\ \mathcal{F})(\omega)$ przyjmującą wartość $E(X|A)$, gdy $\omega \in A$ oraz równą $E(X|A')$, gdy $\omega \in A'$.

Przykład 1. *Niech X będzie liczbą orłów otrzymaną przy trzykrotnym rzucie symetryczną monetą, natomiast A zdarzeniem polegającym na wypadnięciu reszki w pierwszym rzucie. Wtedy dla rozbicia $\mathcal{F} = \{A, A'\}$*

$$E(X|\mathcal{F}) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 2, & \omega \in A'. \end{cases}$$

Ta idea w naturalny sposób przenosi się na rozbicie skończone. Niech $\Omega = \bigcup_{i=1}^{l} A_i$, gdzie zdarzenia A_i są parami rozłączne i mają dodatnie prawdopodobieństwa. Wtedy $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_l\}$ jest rozbiciem przestrzeni Ω.

Definicja 1. *Warunkową wartością oczekiwaną X pod warunkiem rozbicia $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_l\}$ będziemy nazywać zmienną losową*

$$E(X|\mathcal{F})(\omega) = \sum_{j=1}^{l} E(X|A_j) 1_{A_j}(\omega)$$

tzn. $E(X|\mathcal{F})(\omega)$ jest równe $E(X|A_j)$, gdy $\omega \in A_j$.

Tak zdefiniowana warunkowa wartość oczekiwana jest uśrednieniem X na elementach rozbicia tzn. jest stała na elementach rozbicia i na każdym z nich ta stała jest równa średniej wartości X na nim. Wymienimy teraz kilka podstawowych własności warunkowej wartości oczekiwanej względem rozbicia $\mathcal{F}$:
i) Jeśli X jest stała na zbiorach A_i, to $E(X|\mathcal{F}) = X$.
ii) Jeśli $X \geq 0$, to $E(X|\mathcal{F}) \geq 0$.
iii) $E(\alpha X_1 + \beta X_2|\mathcal{F}) = \alpha E(X_1|\mathcal{F}) + \beta E(X_2|\mathcal{F})$ dla $\alpha, \beta \in R$.
iv) $EX = E(E(X|\mathcal{F}))$.
v) Jeśli $\mathcal{F}$ i X są niezależne (tzn. $P(X = x_i|A_j) = P(X = x_i)P(A_j)$ dla każdych i, j), to $E(X|\mathcal{F}) = EX$.

W dalszym ciągu $\sigma(X)$ będzie oznaczać rozbicie Ω generowane przez zmienną losową X tzn. $\sigma(X) = \{\{X = x_1\}, \ldots, \{X = x_k\}\}$ i analogicznie $\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \{\{X_1 = x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n = x_n\} :\ x_i \in X_i(\Omega), i = 1, \ldots, n\}$.

Przykład 2. *Gdy $X_1, \ldots, X_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero, to korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej otrzymujemy*

$$\begin{aligned} E(X_1 + \ldots + X_{10}|\ \sigma(X_1, \ldots, X_4)) &= X_1 + \ldots + X_4 + E(X_5 + \ldots + X_{10}) \\ &= X_1 + \ldots + X_4. \end{aligned}$$

Definicja 2. *Mówimy, że ciąg zmiennych losowych X_n jest martyngałem, jeśli*

$$E(X_{n+1}|\ \mathcal{F}_n) = X_n$$

dla wszystkich n, gdzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Warto zauważyć, że dla martyngału zachodzi $EX_n = EX_1$, czyli wartość średnia zmiennych losowych tworzących martyngał jest stała.

Przykład 3. *Niech*

$$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

gdzie ξ_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $E\xi_i = 0$, $i = 1, 2 \ldots$. Wtedy

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + E(\xi_{n+1}) = X_n,$$

zatem$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

Stąd sumy X_n niezależnych zmiennych losowych o średniej zero są szczególnym przypadkiem martyngału. Czyli własność prawdziwa dla martyngałów jest prawdziwa i dla takich sum. W szczególności błądzenia przypadkowe, grę w „orła i reszkę" opisaną w punkcie 2 itp. można badać korzystając z tego, że tworzą one martyngał. Jednocześnie pojęcie martyngału jest pojęciem ogólniejszym od pojęcia sumy niezależnych zmiennych losowych o średniej zero.

Przykład 4. *(Model Pólyi) Urna zawiera b_0 białych i c_0 czarnych kul ($b_0, c_0 \geq 1$). Losujemy kulę z urny, zwracamy ją i dokładamy m kul tego samego koloru. Niech b_n, c_n oznaczają liczbę kul białych i czarnych po n-tym losowaniu. Definiujemy $X_n = c_n/(b_n + c_n)$ — jest to ułamek kul czarnych w urnie po n-tym losowaniu, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Okazuje się, że $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ jest martyngałem (patrz np.* [4]*).*

4. Rozważmy najprostszy model rynku finansowego – rynek jednookresowy dwustanowy. Na tym rynku zilustrujemy najważniejsze pojęcia matematyki finansowej.
Na rynku jednookresowym dwustanowym transakcje odbywają się w dwu chwilach czasu: chwili 0 i chwili T. Przyjmujemy także założenie, że rynek jest rynkiem idealnym tzn. oprocentowanie kredytów i depozytów bankowych jest jednakowe, inwestorzy nie ponoszą żadnych kosztów, tzn. kosztów transakcji, kosztów prowizji, nie płacą podatków itp., nie ma ograniczeń w dostępie do kredytów oraz rynek jest płynny, tzn. możemy kupić lub sprzedać dowolną liczbę aktywów.

Założymy także, że są możliwe dwa scenariusze wypadków, zatem przestrzeń zdarzeń elementarnych to $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, przy czym ω_1 oznacza sytuację interpretowaną jako korzystna, zaś ω_2 jako niekorzystna, a prawdopodobieństwo P jest takie, że $P(\{\omega_1\}) = p > 0$, $P(\{\omega_2\}) = 1 - p > 0$.

Przyjmujemy, że na tym rynku istnieją dwa papiery wartościowe: jeden ryzykowny (np. akcje) i drugi pozbawiony ryzyka – inwestycja polegająca na włożeniu pieniędzy na rachunek bankowy. Są to instrumenty bazowe na tym rynku. Niech:
S_t oznacza cenę papieru ryzykownego (za jedną jednostkę) w chwili t,
B_t oznacza cenę papieru bez ryzyka (za jedną jednostkę) w chwili t,
gdzie $t \in \{0, T\}$. Zakładamy, że stopa procentowa jest stała i wynosi r w okresie czasu od 0 do T. Zatem w naszym przypadku mamy

$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + r.$$

Natomiast

$$S_0 = s, \qquad S_T(\omega) = \begin{cases} S^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases} \tag{1}$$

bo zmienna losowa S_T przyjmuje dwie wartości, gdyż mamy do czynienia z dwoma scenariuszami. Możemy bez starty ogólności przyjąć, że $S^u > S^d$ (dlatego ω_1 nazwaliśmy scenariuszem korzystnym). Cenę S_T możemy też zapisać w innej postaci:

$$S_T = S_0 Z = sZ, \tag{2}$$

gdzie zmienna losowa

$$Z(\omega) = \begin{cases} u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ d, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases}$$

wskazuje, o ile procent zmieniła się cena początkowa.

Na rynku istnieje wiele instrumentów pochodnych, tzn. takich, których cena zależy od cen aktywów podstawowych. Przykładem takiego instrumentu jest europejska opcja kupna. Posiadacz takiej opcji ma prawo (i nie jest to obowiązek) do kupienia określonego w umowie aktywa w ustalonej chwili T za ustaloną z góry cenę K . Zatem, gdy mu się to opłaca, realizuje swoje prawo i zyskuje $S_T - K$, a gdy mu się nie opłaca, nie robi nic. W rezultacie otrzymuje wypłatę $(S_T - K)^+$. Nie tylko europejską opcję kupna, ale każde aktywo pochodne można utożsamiać z wypłatą X generowaną przez to aktywo. Wypłata X zależy od scenariusza, więc jest zmienną losową określoną na Ω.

Wiemy, ile można uzyskać posiadając europejską opcję kupna. Powstaje pytanie, ile za opcje powinniśmy zapłacić (jest to problem wyceny opcji). Pierwsza próba wyceny kontraktu związana jest z zastosowaniem metod wykorzystywanych m.in. w matematyce ubezpieczeniowej.

Przykład 5. *Aktywo ryzykowne kosztuje $S_0 = 1$ w chwili $t = 0$. Zakładamy, że możliwe (i równo prawdopodobne) są dwa scenariusze wydarzeń do chwili T i cena aktywa ryzykownego w chwili $T = 1$ wynosi $S_1(\omega_1) = 7$ lub $S_1(\omega_2) = 1$. Wiemy także, że cena aktywa bez ryzyka wynosi $B_0 = 1$ na początku okresu i $B_1 = 2$ na końcu. Interesuje nas, jak wycenić opcję kupna dającą wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 3$. Korzystając z metod z matematyki ubezpieczeniowej przypuszczamy, że cena ta jest wartością obecną opcji, a tę liczymy jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną wypłaty. Wobec tego cena opcji C_0 jest równa*

$$C_0 = \frac{B_0}{B_1} E(C_1) = \frac{1}{2}[0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 0] = 1,$$

ponieważ $C_1(\omega_1) = 4$, $C_1(\omega_2) = 0$. Tak liczona cena opcji jest równa 1, ale nikt rozsądny nie będzie kupował opcji za cenę równą 1, gdyż lepiej kupić za tę cenę akcję. Wynika to z faktu, że gdy cena akcji wzrośnie to akcja jest warta 7, a opcja daje wypłatę 4, a gdy cena akcji się nie zmieni to akcja jest warta 1, a opcja jest bezwartościowa. Akcja daje zawsze większy zysk niż opcja.

Tu oczywiście widać, że tak wyznaczona cena zależy od wyboru prawdopodobieństwa P, zatem od oszacowania rynku przez inwestora. Gdy dla innego inwestora oszacowanie szans zmian na rynku P jest inne, to i wartość zdyskontowana wypłaty będzie inna. Zatem mamy drugi argument przemawiający za tym, że wielkości obliczonej według powyższego sposobu nie można przyjąć za cenę opcji. Taki model nie spełniałby podstawowego wymogu – jedyności ceny aktywa pochodnego.

Okazuje się, że można dobrze wycenić wypłatę korzystając z idei *portfela replikującego.* Portfel $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ jest to para liczb, gdzie α_0 jest liczbą posiadanych akcji w chwili zero, zaś β_0 jest wysokością wkładu bankowego (ewentualnie wielkością kredytu, gdy $\beta_0 < 0$) w chwili zero. Dla przykładu, portfel $(7, -3)$ oznacza, że w portfelu jest siedem akcji, tzn. inwestor kupił 7 akcji i pożyczył 3 jednostki z banku. Każda para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tworzy portfel, co odzwierciedla fakt, że można handlować dowolną liczbą aktywów, dopuszczenie wartości ujemnych β oznacza, że możemy dowolnie dużo pożyczać, a dopuszczenie wartości ujemnych α oznacza, że rynek ten dopuszcza także *krótką sprzedaż* akcji. Krótka sprzedaż polega na pożyczeniu i sprzedaży akcji w chwili 0 oraz odkupieniu tej samej liczby akcji i ich zwrocie w chwili T. Zbiór wszystkich możliwych portfeli oznaczać będziemy przez Φ. W modelu, który przyjęliśmy, $\Phi = \mathbb{R}^2$.

Niech $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ będzie portfelem inwestora, który sprzedał wypłatę X. Wartość portfela $V_t(\varphi)$ w chwili t wynosi dla $t = 0$ i $t = T$, odpowiednio:

$$V_0(\varphi) = \alpha_0 S_0 + \beta_0, \quad V_T(\varphi) = \alpha_0 S_T + \beta_0(1 + r).$$

Tak jest, gdyż portfel ustaliliśmy w chwili $t = 0$ i nie ulega on zmianie do chwili T. Inwestor sprzedający wypłatę X musi umieć ją zabezpieczyć tzn. wartość portfela φ, który zbudował sprzedający wypłatę za otrzymane ze sprzedaży pieniądze, musi w chwili T być równa X, czyli portfel φ musi replikować wypłatę X:

$$V_T(\varphi)(\omega_i) = X(\omega_i) \qquad \text{dla } i = 1, 2.$$

Portfel φ jest doskonałym zabezpieczeniem wypłaty X, gdyż eliminuje całkowicie ryzyko. Na pytanie dla jakich wypłat istnieje portfel replikujący odpowiada

Twierdzenie 1. *Dla każdej wypłaty istnieje dokładnie jeden portfel replikujący. Dla wypłaty X ma on postać*

$$\alpha_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d}, \qquad \beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)}, \tag{3}$$

gdzie $X^u = X(\omega_1)$, $X^d = X(\omega_2)$. □

Dowód. Portfel replikujący $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ dla wypłaty X jest zadany przez układ równości

$$\alpha_0 S^u + (1+r)\beta_0 = X^u, \quad \alpha_0 S^d + (1+r)\beta_0 = X^d$$

i ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem (3) dla dowolnych X^u, X^d, zatem dla dowolnej wypłaty portfel jest wyznaczony jednoznacznie. □

Naturalne jest zdefiniowanie racjonalnej ceny wypłaty X jako początkowej inwestycji potrzebnej do konstrukcji portfela replikującego, tzn.

$$\Pi_0(X) \stackrel{\text{def}}{=} V_0(\varphi), \tag{4}$$

gdzie φ jest portfelem replikującym. Z tej definicji wynika, że racjonalna cena wypłaty nie zależy od subiektywnych prawdopodobieństw zmian cen akcji, tzn. nie zależy od prawdopodobieństwa P. Korzystając z tw. 1 otrzymujemy, że cena racjonalna wypłaty X jest równa

$$\Pi_0(X) = \alpha_0 S_0 + \beta_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d} S_0 + \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)}. \tag{5}$$

Przykład 6. *Wycenimy opcję z przykładu* 5. *Portfel $\varphi = (\alpha, \beta)$ jest portfelem replikującym, gdy*

$$7\alpha + 2\beta = 4, \quad \alpha + 2\beta = 0.$$

Ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie: $\alpha = 2/3$, $\beta = -1/3$. Stąd $C_0 = V_0(\varphi) = 2/3 - 1/3 = 1/3$. Znając skład portfela replikującego wystawca opcji wie, jak wygenerować wielkość $(S_T - K)^+$ w chwili T, dysponując zapłatą za opcję. Zatem potrafi rozwiązać problem zabezpieczenia wypłaty (drugi podstawowy problem matematyki finansowej – dalej tym problemem w tym artykule nie będziemy się zajmować).

Powyższy model rynku trzeba jeszcze poprawić, gdyż dopuszcza on sytuację, że dla dodatniej wypłaty $X > 0$ może okazać się, że jej cena jest ujemna, czyli $\Pi_0(X) < 0$. W takim przypadku można by osiągnąć zysk bez ryzyka przy pomocy odpowiedniej strategii.

Przykład 7. *Gdy $S_0 = 10$, $S^d = 12$, $S^u = 13$, $X^d = 5$, $X^u = 15$, $r = 0,1$, to z* (5) *otrzymujemy $\Pi_0(X) = -50/11$. Ale na tym rynku możemy osiągnąć zysk bez ryzyka pożyczając* 10 *jednostek z banku i kupując za tę kwotę akcję. Wtedy w chwili T sprzedając akcję otrzymujemy co najmniej* 12, *a do banku musimy zwrócić* 11.

Chcemy takie sytuacje wykluczyć, zatem chcemy z rynku wykluczyć portfel φ (nazywany arbitrażem lub portfelem arbitrażowym) dla którego

$$V_0(\varphi) = 0, \qquad V_T(\varphi) \geq 0, \quad \exists\, \omega \in \Omega \quad V_T(\varphi)(\omega) > 0.$$

Mówimy, że model rynku $\mathcal{M} = (S, B, \Phi)$ jest wolny od arbitrażu, gdy nie ma możliwości arbitrażu w klasie portfeli Φ. Interpretacja portfela arbitrażowego jest klarowna: nie mając nic na początku, stosując strategię φ, na końcu operacji nic nie stracimy, a dla pewnych scenariuszy mamy zysk dodatni.

Istnienie możliwości arbitrażu świadczy o serii poważnych błędów w wycenie instrumentów na rynku. Takie błędy są bardzo szybko wychwytywane i wykorzystywane przez arbitrażystów, skutkiem czego rynek szybko wraca do równowagi. Zatem model rynku powinien być modelem bez możliwości arbitrażu. Zbadamy wobec tego, jakie warunki trzeba narzucić na model rynku, by na rynku nie było możliwości arbitrażu.

Twierdzenie 2. *Rynek jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$S^d < (1+r)S_0 < S^u. \tag{6}$$

Dowód. $\Rightarrow$ (nie wprost) Niech jedna z powyższych nierówności nie zachodzi. Załóżmy, że $S_0(1+r) \geq S^u$. Wtedy portfel $\varphi = (-1, S_0)$ jest arbitrażem. Gdy $S^d \geq (1+r)$, to $\varphi = (1, -S_0)$ jest arbitrażem. Sprzeczność.

$\Leftarrow$ Chcemy wykazać, że nie istnieje arbitraż. Weźmy portfel $\varphi = (\alpha, \beta)$, taki że $V_0(\varphi) = 0$, tzn. $\alpha S_0 + \beta = 0$. Gdy $\alpha = 0$, to $\beta = 0$, zatem $\varphi = (0,0)$, $V_T(\varphi) \equiv 0$ i portfel nie jest portfelem arbitrażowym. Gdy $\alpha \neq 0$, to $\beta = -\alpha S_0$ i ten portfel w chwili T ma wartość:

$$V_T(\varphi) = \alpha S_T + \beta(1+r) = \begin{cases} \alpha(S^u - S_0(1+r)) & \text{dla } \ \omega = \omega_1, \\ \alpha(S^d - S_0(1+r)) & \text{dla } \ \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Korzystając z (6) otrzymujemy, że portfel φ z kapitałem początkowym równym zero i $\alpha \neq 0$, w chwili końcowej T przyjmuje wartości różnych znaków, a mianowicie: gdy $\alpha > 0$, to $V_T(\varphi)(\omega_1) > 0$ i $V_T(\varphi)(\omega_2) < 0$, a gdy $\alpha < 0$ to zachodzą nierówności przeciwne. Zatem portfel φ o wartości początkowej zero nie może być arbitrażem. □

Z tego twierdzenia wynika, że rynek z przykładu 5. jest wolny od arbitrażu, a na rynku z przykładu 7. istnieje arbitraż, który zresztą w tym przykładzie wskazaliśmy.
Od tego momentu będziemy zakładali, że na rynku $\mathcal{M}$ zawsze zachodzi warunek (6). Wykluczenie równości w (6) ma sens ekonomiczny, gdyż wtedy wykluczamy sytację, w której na rynku są dwa aktywa, ale jednym z nich nikt nie handluje. Istotnie, gdy $S^d = (1+r)S_0$, to zawsze należy inwestować w akcje, bo w najgorszym przypadku dadzą tyle, co depozyt w banku, a gdy $S^u = (1+r)S_0$, to zawsze należy wkładać pieniądze do banku, bo depozyt da nie mniejszy zysk niż akcje i to bez żadnego ryzyka. W obu tych przypadkach rynek nie jest płynny i z rynku znika jeden z rodzajów aktywów.

Definicja 3. *Na rynku $\mathcal{M}$ bez możliwości arbitrażu cenę racjonalną instrumentu pochodnego X nazywamy ceną arbitrażową X w chwili $t = 0$ na rynku $\mathcal{M}$.*

Okazuje się, że istnieje alternatywne podejście do wyceny instrumentów pochodnych na rynku bez możliwości arbitrażu, opierające się na liczeniu wartości oczekiwanej względem pewnej wyróżnionej miary probabilistycznej.

Przykład 8. *Przyjmijmy, że $S_0 = 3$, $S^d = 1$, $S^u = 7$, $K = 3$, $X = (S_T - K)^+$ i niech $r = 0$. Wtedy $X^d = 0$, $X^u = 4$. Łatwo obliczyć, że portfel replikujący ma postać: $\alpha = 2/3$ i $\beta = -2/3$, a stąd $C_0 = 4/3$. Zatem $C_0 \in [0,4]$, a więc dla $q = 1/3$*

$$C_0 = qX(\omega_1) + (1-q)X(\omega_2)$$

tzn. $C_0 = E_Q X$, gdzie $Q(\{\omega_1\}) = q = 1/3$, $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$. Dla tej miary probabilistycznej Q zachodzi także

$$S_0 = 3 = 7/3 + 2/3 = E_Q S_T.$$

Czy jest to przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych? Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu? W tym przykładzie q nie zależy od prawdopodobieństwa subiektywnego P, zależy zaś od wypłaty $X = f(S_T)$, a jednocześnie dla cen akcji zachodzi $S_0 = E_Q S_T$. Chciałoby się, aby w sytuacji ogólnej q zależało tylko od cen S_T, a nie zależało od postaci funkcji f. Okazuje się, że tak jest w istocie. Pokazanie tego będzie naszym celem.

Dla rynku bez możliwości arbitrażu z założenia (6) wynika, że $S_0(1+r)$ jest kombinacją wypukłą końców odcinka tzn. istnieje $\gamma \in (0,1)$, takie że

$$S_0(1+r) = \gamma S^u + (1-\gamma)S^d. \tag{7}$$

Liczby γ i $(1-\gamma)$ zadają nowe prawdopodobieństwo Q, takie że

$$Q(Z = u) = \gamma, \qquad Q(Z = d) = 1 - \gamma.$$

Wtedy

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E_Q S_T, \tag{8}$$

czyli otrzymaliśmy wzór przedstawiający cenę dzisiejszą jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną ceny jutrzejszej względem prawdopodobieństwa Q.

Zwykle ważne są nie wielkości cen, a proporcje pomiędzy nimi. W tym celu wyrażamy wszystko w terminach wartości jakiegoś ustalonego aktywa. Wygodne jest znormalizowanie cen tak, by jednostka na rachunku bankowym miała stałą wartość. Czyli B^* zdyskontowany proces wartości jednostki na rachunku bankowym spełnia $B_0^* = B_T^* = 1$ i wtedy zamiast procesu cen rozważamy zdyskontowany proces cen S^*:

$$S_0^* = S_0, \quad S_T^* = \frac{S_T}{1+r}.$$

Z (8) dla miary Q zachodzi

$$S_0^* = E_Q S_T^*.$$

Dla rynku jednookresowego dwustanowego jest to równoważne faktowi, że S^* jest Q-martyngałem. Stąd

Definicja 4. *Miarę probabilistyczną P^* nazywamy miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy $1 > P^*(\omega_1) > 0$ oraz S^* jest martyngałem względem P^* (tzn. S^* jest martyngałem na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{M}, P^*)$.)*

Lemat 1. *Na rynku $\mathcal{M}$ istnieje miara martyngałowa P^* dla zdyskontowanego procesu cen S^* wtedy i tylko wtedy, gdy jedyne rozwiązanie równania*

$$S_0(1+r) = \gamma S^u + (1-\gamma) S^d, \tag{9}$$

względem γ, należy do przedziału $(0,1)$.

Dowód. $\Rightarrow$ Gdy P^* jest miarą martyngałową, to zachodzi $S_0 = E_{P^*} S_T^*$, a stąd przyjmując $\gamma = P^*(\{\omega_1\})$ otrzymujemy (9) i oczywiście $\gamma = P^*(\{\omega_1\}) \in (0,1)$.
$\Leftarrow$ Gdy (9) ma rozwiązanie $\gamma \in (0,1)$, to definiując miarę probabilistyczną P^* wzorem $P^*(\{\omega_1\}) = \gamma$ i $P^*(\{\omega_2\}) = 1-\gamma$ otrzymujemy miarę P^* spełniającą $S_0 = E_{P^*} S_T^*$. Stąd P^* jest miarą martyngałową. □

Warto zauważyć, że jedyne rozwiązanie równania (9) jest postaci

$$\gamma = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d}, \tag{10}$$

więc miara martyngałowa P^* jest zadana przez wielkości wyznaczające cenę i przez wielkość stopy procentowej.

Twierdzenie 3. *Rynek $\mathcal{M} = (S, B, \Phi)$ jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara martyngałowa dla zdyskontowanego procesu cen S^*. Wtedy cena arbitrażowa w chwili 0 dowolnej wypłaty X w chwili T jest dana wzorem*

$$\Pi_0(X) = E_{P^*}\left(\frac{X}{1+r}\right), \tag{11}$$

gdzie P^* jest miarą martyngałową.

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika z lematu 1, tw. 2, wzoru (10) oraz z tego, że

$$\gamma = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d} \in (0,1) \iff S^d < (1+r)S_0 < S^u.$$

Został do udowodnienia wzór (11) podający cenę arbitrażową. Niech $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ będzie jedynym portfelem replikującym X (istnieje na mocy twierdzenia 1). Wówczas:

$$E_{P^*}\left(\frac{X}{1+r}\right) = E_{P^*}\left(\frac{V_T(\varphi)}{1+r}\right) = E_{P^*}\left(\frac{\alpha_0 S_T}{1+r} + \frac{(1+r)\beta_0}{1+r}\right) =$$
$$= \alpha_0 E_{P^*}(S_T^*) + \beta_0 = \alpha_0 S_0^* + \beta_0 = V_0(\varphi) = \Pi_0(X),$$

przy czym trzecia od końca równość wynika z faktu, iż P^* jest miarą martyngałową, ostatnia zaś z definicji Π_0. □

Przykład 9. *Obliczmy cenę opcji z przykładu 5 korzystając ze wzorów* (10) *i* (11). *Otrzymujemy* $\gamma = 1/6$ *i* $\Pi_0(X) = 1/6 \cdot 4/2 = 1/3$. *Oczywiście otrzymaliśmy ten sam wynik co w przykładzie* 6.

Gdy Ω zawiera n scenariuszy i na rynku można handlować w chwilach $0, 1, \ldots, T$, to dla dużych n, T metoda badania, czy rynek jest wolny od arbitrażu, wykorzystująca portfele samofinansujące się, jest zwykle mało przydatna ze względu na ogromną liczbę dopuszczalnych strategii. To samo dotyczy problemów wyceny. Natomiast zbadanie, czy na danym rynku istnieje miara probabilistyczną P^*, taka że zdyskontowany proces cen $S_t^* = S_t/B_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$, jest martyngałem względem P^* jest znacznie prostsze. Z analogonów podanych tu twierdzeń wynika, że wtedy znamy własności rynku. Również liczenie cen za pomocą uogólnienia wzoru (11), które to dla wypłat replikowalnych ma dokładnie taką samą postać, jest łatwe. Ta metoda przenosi się także na przypadek dowolnej Ω i czasu ciągłego.

5. Elementarny wykład rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć w [2] lub [5]. Więcej informacji o martyngałach czytelnik znajdzie w książkach [1], [4], [7], a o działaniu rynków finansowych w [3], [8] lub w pierwszym rozdziale [6] .

Literatura

[1] T. Bojdecki, 1977, *Martyngały z czasem dyskretnym, zarys teorii i przykłady zastosowań*, Wyd. UW, Wyd. I, Warszawa.

[2] W. Feller, 1966, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I, PWN, Warszawa.

[3] J.C. Hull, 1997, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[4] J. Jakubowski, R. Sztencel, 2001, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wyd. II. Script, Warszawa.

[5] J. Jakubowski, R. Sztencel, 2002, *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, Wydawnictwo Script, Warszawa.

[6] J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, 2003, *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wyd. I. WNT Warszawa.

[7] A. N. Shiryaev, 1980, *Wierojatnost*, Nauka, Moskwa.

[8] A. Weron, R. Weron, 1998, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa.