Probabilistyczne rozwiązania równań różniczkowych

Andrzej PALCZEWSKI, Warszawa

1. Wstęp

Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXX Szkole Matematyki Poglądowej *Osobliwości*, styczeń 2003.

Przedmiotem naszego zainteresowania będzie rozwiązywanie zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych. Poszukiwanie tych rozwiązań należy do zaawansowanych działów analizy matematycznej. Okazuje się jednak, że do problemów tych można podejść od zupełnie innej strony wykorzystując metody rachunku prawdopodobieństwa. Nieco przesadnie można powiedzieć, że będziemy rozwiązywali równania różniczkowe cząstkowe rzucając (wielokrotnie) monetą. O ile na poziomie teorii „rzucanie monetą” ma jedynie sens symboliczny, to w przypadku rozwiązań numerycznych odpowiednich zagadnień granicznych jest to metoda stosowana w praktyce. W takim przypadku „rzucanie monetą” jest oczywiście zastępowane generowaniem w komputerze liczb losowych (naprawdę pseudolosowych), ale sens tego postępowania jest identyczny.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do rozpatrzenia dwóch zagadnień granicznych. Pierwsze z nich polega na znalezieniu w obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ funkcji $u(x)$ spełniającej równanie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \tag{1}$$

oraz warunek brzegowy na brzegu ∂D

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D. \tag{2}$$

Równanie (1) nazywa się równaniem Laplace'a, a warunek brzegowy (2) – warunkiem Dirichleta dla tego równania. W dalszych rozważaniach przyjmiemy dla uproszczenia, że rozpatrywana przestrzeń zmiennych niezależnych jest dwuwymiarowa. Równanie (1) sprowadzi się wtedy do równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Drugim rozpatrywanym równaniem będzie równanie ewolucyjne nazywane tradycyjnie równaniem przewodnictwa cieplnego. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma ono postać

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,. \tag{4}$$

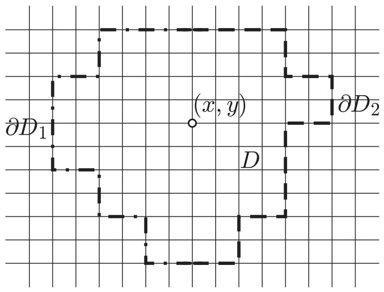
Rozwiązanie tego równania polega na znalezieniu funkcji $v(t, x)$, dla $t \in (0, T)$ i $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, przy następujących warunkach granicznych: w chwili początkowej $t = 0$ funkcja v spełnia warunek początkowy w zbiorze D, a prócz tego dla każdego $t > 0$ spełnia warunek brzegowy na ∂D

$$\begin{aligned} &v(0, x) = f(x), \quad x \in D, \\ &v(t, x) = g(t, x), \quad x \in \partial D,\ t \in (0, T). \end{aligned} \tag{5}$$

Jedną z możliwych fizycznych interpretacji równania (4) jest traktowanie go jako równania opisującego ewolucję temperatury w ciele zajmującym obszar D, jeśli wiadomo, że w momencie początkowym temperatura ciała była równa $f(x)$, a na powierzchni ciała temperatura wynosi $g(t, x)$. Pozostając przy tej interpretacji fizycznej, równanie Laplace'a (1) opisuje stacjonarny rozkład temperatury w ciele D, na którego powierzchni temperatura wynosi $f(x)$.

2. Błądzenie przypadkowe na płaszczyźnie i rozwiązanie równania Laplace'a

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem równania Laplace'a w podzbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$ wykorzystując losowe błądzenie w D. Błądzenie to opiszemy najpierw rozpatrując jedynie dyskretny podzbiór punktów z D. Weźmy w tym celu zbiór punktów na płaszczyźnie o współrzędnych całkowitych (n, m). Punkty te będziemy nazywali punktami kratowymi. Niech D będzie otwartym i ograniczonym zbiorem w $\mathbb{R}^2$, którego brzeg złożony jest z odcinków łączących punkty kratowe (patrz rys.1). W obszarze D znajduje się cząstka, która porusza się jedynie po punktach kratowych, przy czym ruch ten jest losowy. Oznacza to, że cząstka znajdująca się w punkcie (x, y) może z jednakowym prawdopodobieństwem (błądzenie symetryczne) trafić do jednego z 4 położeń: $(x-1, y)$, $(x+1, y)$, $(x, y-1)$ i $(x, y+1)$.



Rys. 1

Jeśli brzeg obszaru D podzielimy na dwie części ∂D_1 i ∂D_2, to można postawić pytanie: jakie jest prawdopodobieństwo, że startująca z punktu (x, y) cząstka dotrze wcześniej do części brzegu ∂D_1 niż ∂D_2?

Przyjmijmy, że $u(x, y)$ jest poszukiwanym prawdopodobieństwem. Niech (x, y) będzie punktem wewnętrznym zbioru D położonym daleko od brzegu. Startując z punktu (x, y) w pierwszym kroku trafiamy w jedno z 4 położeń sąsiednich. Z symetrii błądzenia na płaszczyźnie wynika, że musi być spełnione równanie

$$u(x, y) = \frac{1}{4}\big(u(x+1, y) + u(x-1, y) + u(x, y+1) + u(x, y-1)\big). \tag{6}$$

Aby równanie (6) było prawdziwe we wszystkich punktach wewnętrznych zbioru D (także w pobliżu brzegu), musimy odpowiednio wybrać wartości $u(x, y)$ na brzegu. Jeśli $(x, y) \in \partial D_1$, to przyjmujemy $u(x, y) = 1$, a dla $(x, y) \in \partial D_2$ przyjmujemy $u(x, y) = 0$.

W ten sposób w każdym punkcie wewnętrznym (x, y) mamy jedno równanie postaci (6). Liczba równań jest więc równa liczbie niewiadomych. Powstaje pytanie, czy ten układ posiada jednoznaczne rozwiązanie. W odpowiedzi na to pytanie pomocne będzie dobrze znane twierdzenie z algebry liniowej.

Twierdzenie 1 *Układ równań liniowych niejednorodny posiada jednoznaczne rozwiązanie, jeśli układ jednorodny posiada tylko rozwiązanie zerowe.*

Jak łatwo zauważyć, w naszym przypadku układ jednorodny otrzymamy, jeśli przyjmiemy we wszystkich punktach brzegowych $u(x, y) = 0$. Należy więc rozpatrzyć układ równań (6) z warunkiem $u(x, y) = 0$, jeśli $(x, y) \in \partial D$.

Twierdzenie 2 *Wersja jednorodna układu* (6) *ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Dowód. Równanie (6) mówi, że wartość funkcji u w punkcie (x, y) jest wartością średnią tej funkcji obliczoną dla najbliższych sąsiednich punktów kratowych. Wynika stąd, że

$$u(x, y) \leqslant \max\{u(x+1, y), u(x-1, y), u(x, y+1), u(x, y-1)\}.$$

Z tego samego powodu

$$u(x, y) \geqslant \min\{u(x+1, y), u(x-1, y), u(x, y+1), u(x, y-1)\}.$$

Wynika stąd, że dla funkcji $u(x, y)$ prawdziwa jest zasada maksimum. Nie może więc ona przyjmować wartości największej i najmniejszej we wnętrzu obszaru, a jedynie na jego brzegu. Ponieważ na brzegu $u(x, y) = 0$, więc $u(x, y) \equiv 0$. ■

Wniosek *Układ równań* (6) *ma jednoznaczne rozwiązanie.*

Aby dojść do rozwiązania równania różniczkowego, musimy nasz prosty model błądzenia przypadkowego trochę skomplikować. Zamiast punktów kratowych tworzących siatkę o oczkach 1×1, rozważamy siatkę o oczkach $\Delta x \times \Delta y$. Wtedy nasze kluczowe równanie (6) ma postać

$$u(x, y) = \frac{1}{4}\big(u(x+\Delta x, y) + u(x-\Delta x, y) + u(x, y+\Delta y) + u(x, y-\Delta y)\big). \tag{7}$$

Jeśli Δx i Δy są dostatecznie małe, to równanie (7) możemy przekształcić dokonując rozwinięcia prawej strony w szereg Taylora. Dla rozwinięcia do wyrazów 2-rzędu dostaniemy

$$u(x+\Delta x, y) + u(x-\Delta x, y) = 2u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 = \\ = 2u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2.$$

Robiąc analogiczne rozwinięcie względem przyrostów Δy i wstawiając do równania (7) dostaniemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Delta y)^2 = o\Big((\Delta x)^2, (\Delta y)^2\Big).$$

Dokonujemy teraz przejścia granicznego $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, tak aby $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \to 1$. W wyniku tego przejścia granicznego otrzymujemy równanie różniczkowe, które powinna spełniać funkcja $u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

Równanie to należy uzupełnić warunkiem brzegowym

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (x,y) \in \partial D_1, \\ 0, & \text{gdy } (x,y) \in \partial D_2. \end{cases}$$

Wynika stąd, że funkcja $u(x, y)$ jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad (x,y) \in D, \\ &u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \partial D, \end{aligned}$$

gdzie

$$f = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (x,y) \in \partial D_1, \\ 0, & \text{gdy } (x,y) \in \partial D_2. \end{cases}$$

Szczególna postać funkcji f nie powinna nas przy tym niepokoić, ponieważ bardzo szeroką klasę funkcji można aproksymować funkcjami charakterystycznymi.

Ponieważ funkcja $u(x, y)$ ma oczywistą interpretację probabilistyczną, więc zamiast rozwiązywać równanie różniczkowe (8) można ją wyznaczyć poprzez symulację błądzenia losowego po punktach kratowych. Wartość funkcji u w punkcie (x, y) obliczymy wtedy jako stosunek liczby prób, czyli trajektorii startujących z punktu (x, y), zakończonych sukcesem (kończących się w punktach należących do części brzegu ∂D_1) do liczby wszystkich prób.

Niech $B_\Delta^{(x,y)}(t)$ będzie rodziną łamanych, po których może poruszać się cząstka startująca z punktu (x, y). Przyjmijmy także, że na przejście między dwoma sąsiednimi punktami cząstka zużywa czas Δt. Jeśli cząstka startuje w chwili $t = 0$, to kolejne położenie osiąga w chwilach Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$ itd. Wtedy $B_\Delta^{(x,y)}(t_k)$ jest zbiorem punktów, w których może znaleźć się cząstka w chwili $t_k = k\Delta t$. Jest to oczywiście zmienna losowa o liczbie stanów trudnej do szybkiego wyliczenia (ale skończonej). Niech $\tau_\Delta^{(x,y)}$ będzie zmienną losową określającą chwilę czasu, w której konkretna łamana ruchu cząstki dotarła do brzegu. Wtedy $B_\Delta^{(x,y)}(\tau_\Delta^{(x,y)})$ jest już zmienną losową, która ma dokładnie tyle stanów, ile jest punktów na brzegu ∂D.

Stosunek liczby trajektorii, które kończą się w punktach należących do ∂D_1, do liczby wszystkich trajektorii dochodzących do ∂D można traktować jako średnią wartość funkcji f po wszystkich trajektoriach. Wynika stąd, że w przybliżeniu funkcja $u(x, y)$ dana jest wyrażeniem

$$u(x,y) \approx \mathrm{E}\Big[f(B_\Delta^{(x,y)}(\tau_\Delta^{(x,y)}))\Big].$$

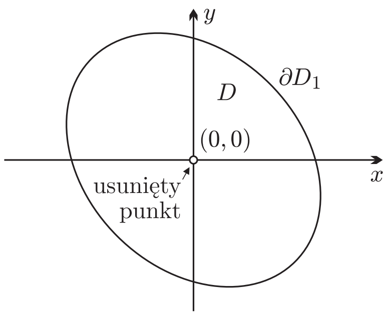
Aby wyznaczyć wartość tej funkcji dokładnie, musimy dokonać opisanego wcześniej przejścia granicznego. Wynik tego przejścia zapisujemy wzorem

$$u(x,y) = \mathrm{E}^{(x,y)}[f(W(\tau))]. \tag{9}$$

Interpretacja wzoru (9) wymaga kilku wyjaśnień. Po pierwsze, przenieśliśmy indeks (x, y) do symbolu wartości oczekiwanej. Jest to konwencja powszechnie stosowana w probabilistyce. Oznacza ona, że obliczamy warunkową wartość oczekiwaną (pod warunkiem, że błądzenie losowe startuje z punktu (x, y)). Przede wszystkim jednak musimy mieć świadomość, że w wyniku przejścia granicznego łamana $B_\Delta^{(x,y)}$ zamieniła się w skomplikowany obiekt nazywany procesem stochastycznym Wienera. Intuicyjnie można zrozumieć charakter tego procesu, jednak jego precyzyjne opisanie wymaga dość subtelnych rozważań, które pominiemy odsyłając zainteresowanego Czytelnika do specjalistycznej literatury.

W naszym dotychczasowym postępowaniu kryją się pewne osobliwości. Pierwszą połknęliśmy, nawet jej nie zauważając. Zbudowaliśmy bowiem rozwiązanie równania różniczkowego dla warunku brzegowego, który jest zadany funkcją nieciągłą. Ale tu jest pewna pułapka, bo warunek brzegowy jest spełniony tylko w punktach ciągłości funkcji f (to dość oczywiste), jeśli dodatkowo punkty te posiadają pewien charakter regularności. Nie wdając się w dokładne zdefiniowanie tej regularności, pokażemy na przykładzie, że jakiś rodzaj regularności jest niezbędny, jeśli chcemy znaleźć rozwiązanie równania (7).

Przykład *Rozważmy na płaszczyźnie obszar ograniczony D* (patrz rys. 2) *z usuniętym początkiem układu współrzędnych (kształt obszaru D jest w zasadzie dowolny, istotne jest tylko usunięcie jednego jego punktu wewnętrznego). Brzeg obszaru D składa się więc z dwóch rozłącznych części. Jedna z tych części to ∂D_1, a druga to punkt* $(0,0)$. *Łatwo można zauważyć, że usunięty punkt* $(0,0)$ *jest punktem nieregularnym brzegu, bo przy dowolnej wartości funkcji f w tym punkcie, będzie ona ciągła na tej części brzegu, jako złożonej tylko z tego punktu. Z drugiej strony, funkcja $u(x,y)$ spełniająca w D równanie* (8) *jest harmoniczna w tym zbiorze. Jako funkcja harmoniczna jest ona klasy C^∞ i ma skończoną wartość w punkcie* $(0,0)$. *Warunek brzegowy w tym punkcie może więc być spełniony tylko, jeśli* $f(0,0) = u(0,0)$.



Rys. 2

Okazuje się jednak, że z wyjątkiem tak patologicznych przypadków jak opisany w powyższym przykładzie, w $\mathbb{R}^2$ nawet bardzo osobliwe brzegi są regularne (nawet ostrza). Sytuacja jest zupełnie inna w $\mathbb{R}^3$, gdzie można dość prosto skonstruować zbiory o osobliwych brzegach (róg Lebesque'a).

3. Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego

Dla uproszczenia równanie przewodnictwa cieplnego będziemy rozpatrywać na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (aby uniknąć rozważań o warunkach brzegowych). Rozważmy na płaszczyznie $\mathbb{R}^2$ to samo co poprzednio błądzenie przypadkowe. Teraz uwzględnimy już wyraźnie czas potrzebny na przejście cząstki z jednego położenia w drugie. Wybieramy w $\mathbb{R}^2$ obszar ograniczony B i pytamy o prawdopodobieństwo, że startując w chwili $t = 0$ z punktu należącego do B, w momencie t znajdziemy się w punkcie (x,y). Równanie (6) będzie miało teraz postać

$$(10)\quad v(t+1,x,y) = \frac{1}{4}\big(v(t,x+1,y)+v(t,x-1,y)+v(t,x,y+1)+v(t,x,y-1)\big).$$

Ten układ równań uzupełniamy warunkami początkowymi

$$\begin{cases} v(0,x,y) = 1, & \text{gdy } (x,y) \in B,\\ v(0,x,y) = 0, & \text{gdy } (x,y) \notin B.\end{cases}$$

Przechodząc do siatki $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ rozpatrujemy równanie

$$(11)\quad v(t+\Delta t,x,y) = \\ = \frac{1}{4}\big(v(t,x+\Delta x,y)+v(t,x-\Delta x,y)+v(t,x,y+\Delta y)+v(t,x,y-\Delta y)\big).$$

Jeśli funkcję $v(t,x,y)$ rozwiniemy w szereg Taylora do odpowiedniego rzędu, to otrzymamy

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + o\big((\Delta x)^2,(\Delta y)^2,\Delta t\big).$$

Dokonując przejścia granicznego $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$, tak aby

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \to 4, \quad \frac{(\Delta y)^2}{\Delta t} \to 4,$$

dostajemy równanie

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

z warunkiem początkowym

$$v(0,x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (x,y) \in B,\\ 0, & \text{gdy } (x,y) \notin B.\end{cases}$$

Ten warunek początkowy odpowiada przypadkowi, gdy funkcja $f(x,y)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru B. Nie jest to jednak istotne ograniczenie, ponieważ dowolny warunek początkowy można aproksymować funkcjami charakterystycznymi.

W tym miejscu zupełnie naturalne jest pytanie: dlaczego dokonaliśmy takiego dziwnego przejścia granicznego? Aby na nie odpowiedzieć ograniczmy się do przypadku 1-wymiarowego. Do momentu t wykonamy $\frac{t}{\Delta t}$ przejść z danego punktu do sąsiedniego, każde z tych przejść ma długość Δx. Droga przebyta do momentu t wynosi więc $t\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Nie może więc być przejścia granicznego $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to 0$, ponieważ oznaczałoby to, że w granicy nie istniałby ruch. Zauważmy, że opisany ruch (błądzenie przypadkowe) można traktować jako sumę niezależnych zmiennych losowych (q_i) o jednakowych rozkładach. Dla każdej zmiennej q_i mamy $\mathrm{E}[q_i] = 0$ oraz $\mathrm{Var}(q_i) = (\Delta x)^2$. Ponieważ zmienne losowe q_i są niezależne, więc wartość oczekiwana sumy równa jest 0, a jej wariancja $\frac{t}{\Delta t}(\Delta x)^2 = t\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$. Nasze przejście graniczne oznacza więc, że rozpatrujemy błądzenie losowe, w którym trajektorie mają skończoną wartość oczekiwaną i wariancję.

Na zakończenie zauważmy, że – podobnie jak w przypadku równania Laplace'a – poszukiwaniu rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego możemy nadać interpretację probabilistyczną. Otrzymamy wtedy następujący wzór przybliżony na rozwiązanie

$$v(t,x,y) \approx \mathrm{E}\Big[f(B_{\Delta}^{(x,y)}(t))\Big].$$

Po wskazanym wyżej przejściu granicznym dostaniemy

$$v(t,x,y) = \mathrm{E}^{(x,y)}[f(W(t))], \tag{12}$$

gdzie jak poprzednio $W(t)$ jest wielowymiarowym procesem Wienera.