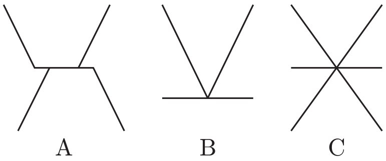
Jest to zapis odczytu wygłoszonego na XXXII Szkole Matematyki Poglądowej *Konstrukcje*, styczeń 2004.

Węzły, supły i ułamki

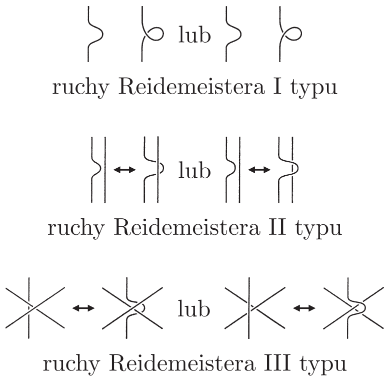
Agnieszka JANIAK-OSAJCA, Zielona Góra,
Zdzisław POGODA, Kraków

W języku potocznym słowa „węzeł” i „supeł” są synonimami i kojarzą się z zaplątanym sznurkiem. W matematyce oba pojęcia są blisko ze sobą związane, jednak nie są identyczne. Spróbujmy bliżej przyjrzeć się supłom tym bardziej, że mają ciekawą interpretację oraz zaskakujące zastosowania.



Rys. 1. Diagramy nieregularne

Przypomnijmy najpierw, że matematyczny węzeł jest to zbiór w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ homeomorficzny z okręgiem. Czyli węzły są różnymi zaplątanymi położeniami okręgu w przestrzeni. Podstawowy problem w teorii węzłów dotyczy rozróżniania ich położeń (sposobów zaplątania) i klasyfikacji. Jak jednak można rozróżniać węzły, gdy wszystkie są homeomorficzne? W tym celu wprowadza się pojęcie równoważności węzłów, do określenia którego wykorzystuje się homeomorfizmy ograniczone do przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dwa węzły uznaje się za równoważne (jednakowe), gdy istnieje homeomorfizm z $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$ przeprowadzający jeden węzeł na drugi. Intuicyjnie oznacza to, że dwa węzły są równoważne, gdy jeden można przekształcić na drugi za pomocą skończonego ciągu odpowiednio rozumianych ruchów (rozplątań) nie powodujących rozerwania.

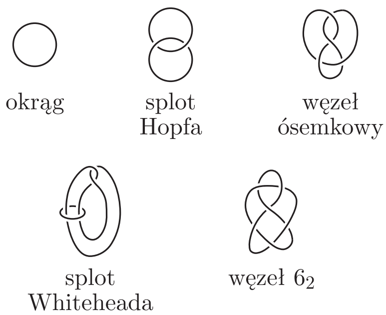


Rys. 2. Ruchy Reidemeistera

Sumę rozłączną kilku węzłów nazywamy splotem, a poszczególne składniki ogniwami splotu. Dla splotów obowiązuje ta sama terminologia i wykorzystuje się te same metody badania. Analizowanie węzłów i splotów w przestrzeni jest bardzo niewygodne, dlatego w praktyce bada się odpowiednio regularne rzuty splotów i węzłów na płaszczyznę nazywane diagramami.

Dwa diagramy uważa się za równoważne, gdy wykonując skończoną liczbę przekształceń nazywanych ruchami Reidemeistera można z jednego otrzymać drugi. Dowodzi się, że węzły równoważne mają równoważne diagramy i odwrotnie.

Na rysunku 3 przedstawiamy przykłady węzłów i splotów.

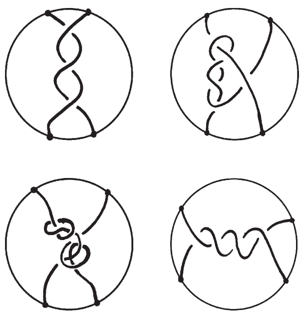


Rys. 3. Przykłady węzłów i splotów

Przejdźmy jednak do supłów. Supeł jest fragmentem węzła lub splotu. Wycinając z węzła jego kawałek o czterech końcach dostajemy właśnie supeł. Bardziej precyzyjnie: wybierzmy na sferze (np. jednostkowej) cztery punkty leżące na jednym okręgu wielkim i parami antypodyczne. Nazwijmy je NW, NE, SE, SW – jak w kompasie. Dwie krzywe w kuli ograniczonej przez tę sferę o końcach w wyróżnionych punktach tworzą właśnie supeł. Tak, więc supeł to jakby dwa kawałki sznurka (splecione lub nie) umieszczone w kuli o końcach na sferze tej kuli. Schematycznie supły przedstawia się również za pomocą odpowiednich diagramów.

Supeł definiuje się też czasem jako fragment diagramu węzła o czterech końcach wycięty przez koło.

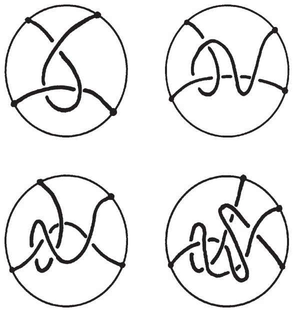
Znów pojawia się naturalne pytanie, kiedy dwa supły są takie same, czyli równoważne i konsekwentnie – pytanie o ich klasyfikację.



Rys. 4. Diagramy supłów

Podobnie jak dla węzłów określa się równoważność supłów. Dwa supły są równoważne, gdy istnieje homeomorfizm kuli na siebie przekształcający jeden supeł na drugi; homeomorfizm ten nie może ruszać sfery (jest na niej identycznością). W wersji sznurkowej supły są takie same, gdy odpowiednio zaplątując lub rozplątując otrzymamy jeden z drugiego pod warunkiem jednak, że nie ruszymy końców. W przypadku diagramów supłów ich równoważność opisujemy także za pomocą ruchów Reidemeistera, tylko nie wolno wyjść poza wnętrze koła, gdzie umieszczony jest diagram.

Nie powinno budzić zdziwienia stwierdzenie, że cała rodzina supłów jest bardzo bogata i zróżnicowana oraz, że nie widać sposobów na ich pełną klasyfikację. Dlatego bada się pewne prostsze podrodziny, które łatwiej poddają



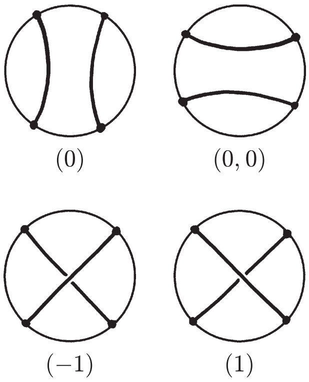
Rys. 5. Diagramy równoważnych supłów

się klasyfikacji. Jedną z takich rodzin tworzą tzw. supły **proste** albo inaczej **wymierne**.

Najprostszymi supłami są przedstawione na rysunku 6, nazywane elementarnymi lub wyróżnionymi.

Przypisuje im się odpowiednio symbole $(0,0)$, (0), (-1), (1). Często supeł $(0,0)$ oznacza się też symbolem (∞). Powstaje on ze supła (0) przez odpowiedni obrót.

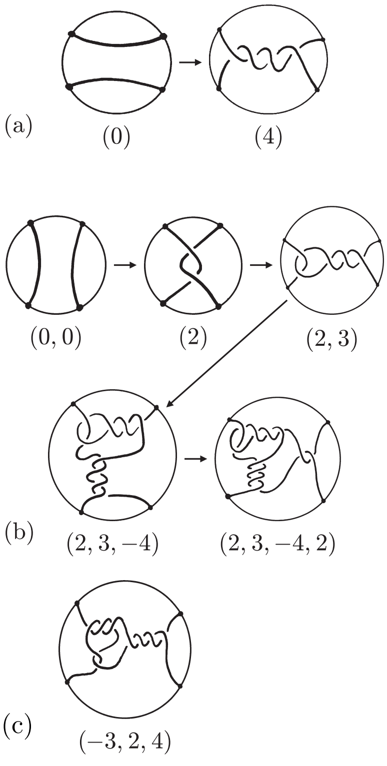
Supeł nazywamy wymiernym, gdy powstaje z supła $(0,0)$ (albo (0)) za pomocą homeomorfizmu kuli na siebie, który na sferze permutuje zbiór {NE, NW, SE, SW}. Każdy supeł wymierny można otrzymać poprzez pewną liczbę obrotów naprzemian półsfery „wschodniej” tj. zawierającej punkty NE i SE oraz półsfery „południowej” zawierającej {SW, SE}. Odpowiednia półsfera uzupełniająca pozostaje przy tym nieruchoma. Jeśli obrót jest prawoskrętny, to przy liczbie obrotów stawiamy znak plus lub nie stawiamy go w ogóle. W przeciwnym przypadku przy liczbie obrotów stawiamy znak minus. Tak, więc supeł wymierny może być opisany przez skończony ciąg liczb całkowitych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oznaczających obroty półsfer. Przyjmuje się jeszcze dodatkową umowę: gdy n jest parzyste, to zaczynamy od obrotu w pionie supła $(0,0)$; gdy natomiast n jest nieparzyste, to najpierw obracamy supeł (0) w poziomie. Postępujemy tak, żeby ostatnia liczba opisywała obroty w poziomie.



Rys. 6. Supły elementarne

Na przykład: jeśli wykonamy cztery obroty prawoskrętne w poziomie na suple (0), to piszemy (4) (Rys. 7a)); jeśli najpierw obrócimy dwukrotnie w pionie i w prawo supeł (0,0), następnie tak otrzymany supeł trzykrotnie w poziomie w prawo, potem znów czterokrotnie w pionie ale w lewo i wreszcie dwukrotnie w poziomie w prawo, to wynik możemy zapisać $(2,3,-4,2)$ (Rys. 7b)). Na rys. 7c przedstawiony jest supeł $(-3,2,4)$.

Taki ciąg skręceń nie opisuje niestety jednoznacznie supła, czyli nie jest jego niezmiennikiem. Może się bowiem okazać, że różne ciągi reprezentują supły równoważne i nie jest łatwo „na oko” to sprawdzić. Supły $(-2,3,2)$ i $(3,-2,3)$ są równoważne (Rys. 8), ale nie jest to widoczne od razu.



Rys. 7. (a), (b) Tworzenie supłów wymiernych. (c) Supeł wymierny

Okazuje się jednak, że w sprytny sposób z ciągu liczb skręceń możemy skonstruować zaskakujący niezmiennik dla supłów wymiernych. Wystarczy z nich utworzyć odpowiedni ułamek łańcuchowy, który już jest niezmiennikiem. Dokładniej, jeśli $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest ciągiem skręceń dla zadanego supła, to liczba

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \ldots + \cfrac{1}{a_1}}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

jednoznacznie opisuje klasę supłów równoważnych z tym supłem. Dla wygody dla ułamka łańcuchowego przyjmujemy uproszczony zapis

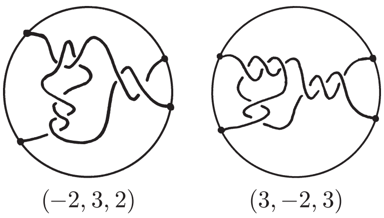
$$\frac{\alpha}{\beta} = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$$

Zakłada się, że α i β są względnie pierwsze. Prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie ([3])
Supeł reprezentowany przez $[a_1, \ldots, a_n]$ jest równoważny z supłem $[b_1, \ldots, b_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy ułamki łańcuchowe $[a_1, \ldots, a_n]$ i $[b_1, \ldots, b_n]$ są identyczne.

Względnie inaczej

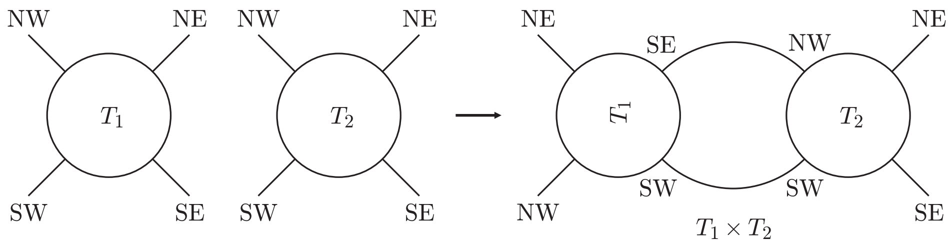
Twierdzenie
Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy klasami nierównoważnych supłów wymiernych a reprezentujących je ułamków łańcuchowych.



Rys. 8. Supły wymierne równoważne

Supeł wymierny jest więc jednoznacznie reprezentowany przez liczbę wymierną, uzasadnia to nazwę tej rodziny supłów. Wyposażeni w takie narzędzie bez większego problemu będziemy mogli rozróżniać supły wymierne.

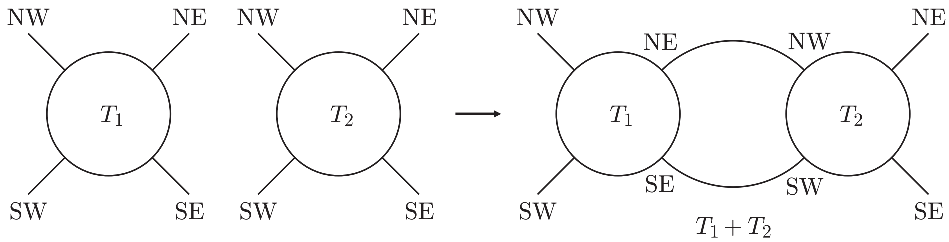
Supły wymierne można wykorzystać do konstrukcji nowych bardziej skomplikowanych supłów i węzłów. Najpierw zdefiniujemy operacje mnożenia i dodawania supłów. Dwa supły T_1 i T_2 mnożymy w ten sposób, że pierwszy obracamy o dziewięćdziesiąt stopni w lewo i łączymy odpowiednie końce tj. SE z NW i SW z końcem SW supła T_2.



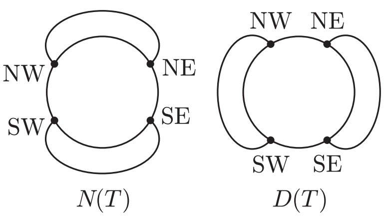
Rys. 9. Mnożenie supłów

Jeśli oba supły są wymierne, to ich iloczyn jest też supłem wymiernym. Na przykład mnożąc supeł (3) z supłem (4) dostajemy supeł $(3, 4)$. Inaczej będzie, gdy supły dodajemy.

Dwa supły T_1 i T_2 dodajemy łącząc koniec NE pierwszego z końcem NW drugiego i, odpowiednio, SE z SW. Wynik oznaczamy $T_1 + T_2$.



Rys. 10. Dodawanie supłów



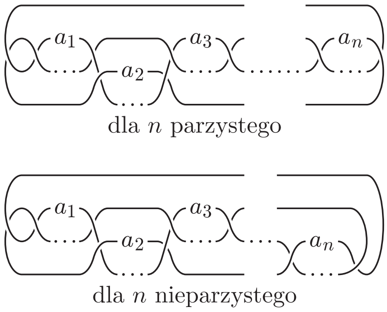
Rys. 11. Konstrukcje $N(T)$ i $D(T)$

Suma dwóch supłów wymiernych nie musi być już supłem wymiernym. Kombinując obie operacje możemy otrzymać dość skomplikowane obiekty.

Na bazie supła T konstruujemy dwa węzły lub sploty: łącząc końce NW i NE oraz SW i SE dostaniemy węzeł (splot) oznaczany $N(T)$, a łącząc końce NW z SW oraz NE z SE otrzymamy węzeł (splot) $D(T)$.

Jeśli w wyniku tych operacji powstaje splot, to on ma zawsze dwa ogniwa, gdyż mamy do dyspozycji cztery końce.

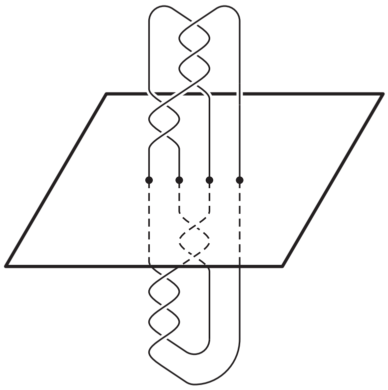
Węzły i sploty otrzymane z supłów wymiernych należą do specjalnej rodziny splotów nazywanych splotami z dwoma mostami. Dokładniej węzeł (splot) z dwoma mostami jest to taki węzeł, którego diagram można przedstawić w postaci jak na rys. 12.



Rys. 12. Diagram splotu z dwoma mostami

Liczby całkowite $a_1, \ldots, a_n$ oznaczają odpowiednie liczby skręceń na diagramie. Dla splotu (węzła) z dwoma mostami wprowadza się oznaczenie $C(a_1, \ldots, a_n)$ nazywane normalną postacią Conwaya splotu (węzła). Czasem używa się też oznaczenia $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. W dalszym ciągu przyjmiemy umowę, że termin „splot z dwoma mostami” będzie oznaczał taki węzeł lub splot – w literaturze używa się zwrotu „4-plat”.

Określenie „splot z dwoma mostami” można intuicyjnie wytłumaczyć następująco. Jeśli diagram takiego splotu przetniemy płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny diagramu, to przetnie ona ten diagram w czterech punktach.



Rys. 13. Interpretacja splotu z dwoma mostami

Czyli nad (i pod) płaszczyzną będą dwie linie splotu, jakby dwa mosty – stąd nazwa.

Podobieństwo do oznaczeń dla supłów wymiernych nie jest przypadkowe. Bowiem analogicznie jak dla supłów każdy splot z dwoma mostami może być wyznaczony przez ułamek łańcuchowy

$$a_2 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

O splocie z taką reprezentacją mówimy, że ma typ $t(\alpha, \beta)$. Tu też α i β są względnie pierwsze. Zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między splotami z dwoma mostami i splotami typu $D(T)$. Prawdziwe jest twierdzenie.

Twierdzenie [3]
Każdy splot z dwoma mostami jest splotem typu $D(T)$ dla pewnego supła wymiernego T i odwrotnie, każdy splot $D(T)$ jest splotem z dwoma mostami.

Zachodzą też następujące zależności.

Twierdzenie ([3])
1. $N(T(a_1, \ldots, a_{2k+1})) \cong N(T(a_1, \ldots, a_{2k+1}, b, 0)) \cong$
   $\cong D(T(-a_1, \ldots, -a_{2k+1}, b, 0)) \cong C(-a_1, \ldots, -a_{2k+1})$
2. $N(T(a_1, \ldots, a_{2k})) \cong D(T(-a_1, \ldots, -a_{2k+1}, b)) \cong C(a_1, \ldots, a_{2k} - 1, 1)$
3. $D(T(a_1, \ldots, a_{2k})) \cong D(T(a_1, \ldots, a_{2k-1}, 0)) \cong C(a_1, \ldots, a_{2k-1})$
4. $D(T(a_1, \ldots, a_{2k+1})) \cong D(T(a_1, \ldots, a_{2k}, 0)) \cong C(1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_{2k-1})$

gdzie b jest dowolna liczbą całkowitą, a symbol $\cong$ oznacza równoważność splotów.

Za pomocą typu $t(\alpha, \beta)$ sploty z dwoma mostami można w pełni sklasyfikować.

Twierdzenie ([3])
Niech L i L' będą splotami z dwoma mostami typu odpowiednio $t(\alpha, \beta)$ i $t(\alpha', \beta')$. Sploty L i L' są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha = \alpha', \quad \beta \equiv \beta' \bmod \alpha$$

albo

$$\alpha = \alpha', \quad \beta\beta' \equiv 1 \bmod \alpha$$

Wszystkie te konstrukcje i rezultaty pozwalają na badanie równań „supłowych". Wyniki tych badań wykorzystuje się między innymi w biologii przy analizowaniu procesów rekombinacji DNA.

Równaniem supłowym nazwiemy zależność postaci

$$N(X + T) = L \text{ lub } D(X + T) = L$$

gdzie L jest znanym splotem, T danym supłem, a X jest supłem niewiadomym.

Pojawia się tu szereg pytań ważnych dla zastosowań. Na przykład: przy jakich założeniach X jest splotem wymiernym? Oto jedna z możliwych odpowiedzi.

Twierdzenie ([2])
Niech T będzie reprezentowany przez ułamek łańcuchowy $[a_1, \ldots, a_n]$, a L będzie nietrywialnym (tj. $\neq C(0)$) splotem z dwoma mostami postaci $C(c_1, \ldots, c_{2k+1})$, wtedy rozwiązania równania $N(X + T) = L$ mają postać

$$[c_1, \ldots, c_{2k+1}, b, -a_1, \ldots, -a_{2n}] \text{ lub } [c_{2k+1}, \ldots, c_1, b, -a_1, \ldots, -a_{2n}],$$

gdzie b jest dowolną liczbą całkowitą. Jeśli natomiast L jest splotem trywialnym $C(0)$, to jedynym rozwiązaniem wymiernym jest

$$[-a_1, \ldots, -a_n]$$

Z tego twierdzenia można wyprowadzić

Wniosek
Niech T_1 i T_2 będą dwoma supłami wymiernymi, a L_1 i L_2 splotami z dwoma mostami. Wtedy układ równań $N(X + T_1) = L_1$ $N(X + T_1) = L_1$ ma co najwyżej dwa rozwiązania wymierne.

Na koniec wspomnimy jeszcze o zaskakującym zastosowaniu tych wszystkich konstrukcji do badania procesów rekombinacji cząsteczek DNA. Cząsteczka DNA zawierająca w sobie kod genetyczny komórki ma kształt podwójnej helisy. W komórce cząsteczki DNA są upakowane w jądrze i zazwyczaj stanowią struktury niezamknięte, choć zaplecione. W latach siedemdziesiątych XX wieku odkryto również zamknięte cząsteczki DNA, dla których uproszczonymi matematycznymi modelami mogą być zapętlone okręgi, czyli węzły. Różne procesy zachodzące w komórce wymagają rozplecenia cząsteczek DNA. Istotną rolę odgrywają w tych procesach enzymy nazywane topoizomerazami, działające miejscowo na helisę zapętlonego DNA. Do lepszego zrozumienia tychże procesów pomocna jest wiedza z zakresu równań supłowych. Cząsteczka DNA przed działaniem enzymu, czyli substrat może być opisana za pomocą zależności

$$N(S+T) = \text{substrat}$$

gdzie S jest fragmentem DNA, na który nie działa enzym, a T częścią podlegającą działaniu enzymu.

W wyniku działania enzymu dostajemy produkt, który też można opisać za pomocą równania

$$N(S+R) = \text{produkt}$$

Tu R jest fragmentem (supłem) DNA po działaniu enzymu.

W praktyce znany jest zazwyczaj substrat i produkt, a supły S, T i R nie są znane. Istnieje jednak możliwość ich wyznaczenia dla specjalnych enzymów przy pewnych dodatkowych założeniach.

Oto przykład twierdzenia dla enzymu nazwanego tn3 rezolwazą.

Twierdzenie ([2], [5])
Niech supły S, T i R spełniają następujące równania
(i) $N(S+T) = C(1)$ *(węzeł trywialny),*
(ii) $N(S+R) = C(2)$ *(splot Hopfa),*
(iii) $N(S+R+R) = C(2,1,1)$ *(węzeł ósemkowy).*
Wtedy pary $\{S,R\}$ – rozwiązania powyższych równań są następujące:

$$\{(-3,0,(1)\},\ \{(3,0),(-1)\},\{(-2,-3,-1),(1)\} \textit{ oraz } \{(2,3,1),(-1)\}.$$

Podobnych twierdzeń dla różnego typu komórek i enzymów można sformułować więcej. Ich dowody wykorzystują wiedzę z zakresu ogólnej teorii równań supłowych.

Literatura
[1] C.C. Adams, *The Knot Book*, W. H. Freemand Company 1994
[2] C. Ernst, D.W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 19990, 108, pp. 489–515.
[3] K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Birkhäuser 1996.
[4] J. Przytycki, *Węzły*, Skrypt, Warszawa 1995.
[5] D.W. Sumners, *Untangling DNA*, The Math. Intelligencer, 1990, vol. 12, no. 3, pp. 71–80.