Niezwykłe konsekwencje twierdzenia Bolzano

Jarosław GÓRNICKI i Eliza PIETRZAK, Rzeszów

Twierdzenie Bolzano

Pojęcie *ciągłości* jakiegoś zjawiska tylko pozornie jest rzeczą łatwą. Im głębiej się nad tym zastanawiamy tym więcej pojawia się znaków zapytania. Na przykład, mamy kłopoty z opisem sposobu postrzegania naszego otoczenia, często potrzebujemy dystansu, upływu czasu, by dostrzec zachodzące zmiany. Gdy patrzymy na ekran telewizora, gdy oglądamy film w kinie, to mamy wrażenie ciągłości zmian oglądanego obrazu. W rzeczywistości doskonale wiemy, że ulegamy pewnemu złudzeniu – oglądamy odpowiednio szybko przesuwające się statyczne obrazy (zdjęcia). Trudności tego typu towarzyszą nam od starożytności. Już Zenon z Elei (V w. p.n.e.) zwracał uwagę jak trudno abstrakcyjne pojęcia matematyki pogodzić z doświadczeniem. Proszę się zastanowić nad wyjaśnieniem następujących myśli:
„*w każdej chwili lecąca strzała znajduje się w jakimś punkcie, a więc w nim spoczywa – kiedy wobec tego leci?*”,
„*skoro odcinek składa się tylko z punktów i skoro punkt nie ma długości, to skąd bierze się długość odcinka?*” (pytanie ucznia klasy piątej, [5, str. 61]).

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848)

Dopiero w XIX wieku zapoczątkowany został proces rygoryzacji analizy. Zdano sobie wówczas sprawę, że dotychczasowe intuicyjne rozumienie fundamentalnych pojęć analizy matematycznej takich jak *granica*, *zbieżność*, *funkcja*, *ciągłość* wymaga poprawnego zamocowania. W tym zakresie ogromny wpływ na kształt dzisiejszej analizy wywarły prace i działalność L.A. Cauchy'ego (1789–1857) oraz K. Weierstrassa (1815–1897).

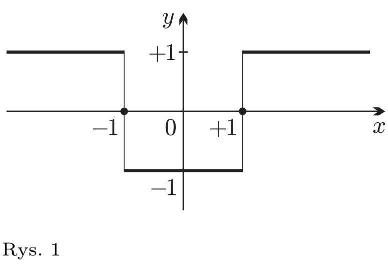
Mniej znane są wcześniejsze rozważania żyjącego w Pradze filozofa i matematyka Bernarda Bolzano. Ponieważ nie publikował on swoich prac w znanych wówczas czasopismach, więc jego wyniki nie wpłynęły na rozwój matematyki.

Należy jednak podkreślić, że swoimi pomysłami Bolzano wyprzedził epokę, w której żył. To on pierwszy (już w latach 1816–17) posługiwał się ścisłą definicją ciągłości funkcji, około roku 1834 podał przykład funkcji „geometrycznie niewyobrażalnej”, która nie jest ciągła we wszystkich punktach swojej dziedziny oraz przykład funkcji ciągłej, a jednak wszędzie pozbawionej pochodnej (K. Weierstrass ogłosił taki przykład w 1872 r., a prawdopodobnie prezentował go na wykładach już w 1861 r.).

Bolzano dowodzi nieistnienia pochodnej jedynie na pewnym gęstym podzbiorze.

Zanim przypomnimy jeden z rezultatów Bolzano i jego konsekwencje, przedstawimy niezbędne informacje. Niech dana będzie funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ i $x_0 \in A$. Mówimy, że funkcja f *jest ciągła w punkcie* x_0, *gdy dla każdego ciągu* $(x_n)_{n\in \mathrm{N}} \subset A\backslash\{x_0\}$ *zbieżnego do* x_0, *ciąg* $(f(x_n))_{n\in\mathrm{N}}$ *jest zbieżny do* $f(x_0)$. *Inaczej mówiąc: niewielka zmiana argumentu powoduje niewielką zmianę wartości. Funkcja jest ciągła, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Przykład 1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ nie jest funkcją ciągłą w punktach $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 1$, co łatwo stwierdzamy analizując rys. 1. Intuicyjnie akceptujemy (dowody nie są trudne), że *suma, różnica, iloczyn, a także iloraz (przez funkcję nie przyjmującą wartości zero) funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*



Rys. 1

W przypadku badania zbieżności ciągów liczbowych (gdy mamy trudność ze wskazaniem granicy) możemy wykorzystać następujące kryterium [6]: *ciąg liczbowy, który jest monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.* Dzięki niemu wykażemy twierdzenie pomocnicze:

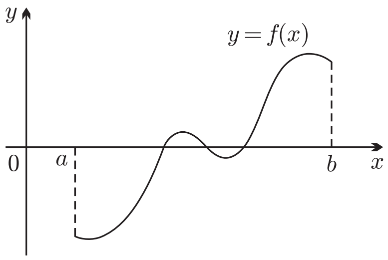
Lemat 1 (o przedziałach zstępujących). *Niech będzie dany ciąg przedziałów niepustych, domkniętych, taki że:* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$ *i niech* $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ *(ich średnice maleją do zera). Wówczas część wspólna (iloczyn) wszystkich przedziałów jest zbiorem złożonym z jednego elementu.*

Dowód. Ponieważ dla każdego naturalnego n zachodzą nierówności $a_1 \leq a_n \leq$ $\leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$, więc ciąg $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$, jako rosnący i ograniczony z góry przez b_1, jest zbieżny do granicy $c = \lim_{n\to\infty} a_n$. Podobnie ciąg $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$, jako malejący i ograniczony z dołu przez a_1, jest zbieżny do granicy $d = \lim_{n\to\infty} b_n$. Na mocy założenia $d - c = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, więc $c = d$. Skoro, dla każdego n naturalnego zachodzą nierówności $a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq c =$ $= d \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$, więc $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$.

Po tych przygotowaniach możemy zaprezentować twierdzenie Bolzano z pracy „*Rein analytischer Beweis...*” ogłoszonej w 1817 roku w Pradze. Rezultat ten znany był wcześniej, funkcjonował w „folklorze matematycznym” jako oczywisty (posługiwał się nim np. C.F. Gauss (1777–1855)). Bolzano pierwszy dostrzegł potrzebę jego precyzyjnego uzasadnienia.

Twierdzenie 1 (Bolzano, 1817). *Jeżeli funkcja ciągła* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *przyjmuje na jednym końcu przedziału wartość dodatnią, a na drugim ujemną, to musi w jakimś punkcie tego przedziału przyjąć wartość zerową.*

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, rys. 2. Podzielmy przedział $[a, b]$ na połowy punktem $c = \frac{a+b}{2}$. Jeśli $f(c) = 0$, to twierdzenie jest udowodnione.



Rys. 2

Jeśli $f(c) \neq 0$, to na końcach jednego z przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$ funkcja przyjmuje wartości różnych znaków (przy czym na lewym końcu wartość ujemną, a na prawym dodatnią). Oznaczając ten przedział przez $[a_1, b_1]$, mamy: $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ i $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Dzielimy teraz na połowy przedział $[a_1, b_1]$ punktem $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Jeśli $f(c_1) = 0$, to twierdzenie jest udowodnione. Jeśli nie, to podobnie jak poprzednio na końcach jednego z przedziałów $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ funkcja przyjmuje wartości różnych znaków. Oznaczając ten przedział przez $[a_2, b_2]$, mamy: $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ i $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Kontynuując ten proces, albo po skończonej ilości kroków „trafimy” w punkt, w którym wartość funkcji f jest równa zeru (wtedy dowód twierdzenia jest zakończony), albo otrzymamy nieskończony ciąg przedziałów niepustych, domkniętych, w którym każdy następny przedział zawiera się w przedziale poprzednim. Wówczas dla n-tego przedziału $[a_n, b_n]$ mamy: $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ i długość tego przedziału wynosi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Tak utworzony ciąg przedziałów spełnia warunki lematu 1. Istnieje więc punkt $c \in [a, b]$, dla którego $\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} b_n = c$. Korzystając teraz z ciągłości funkcji f oraz nierówności $f(a_n) < 0$ i $f(b_n) > 0$, mamy: $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. Stąd $f(c) = 0$. ■

Rezultat ten wykorzystuje się do badania istnienia rozwiązań nietypowych równań.

Przykład 2. Równanie $\mathrm{e}^x - x^3 = 0$ ma w przedziale $[-1, 1]$ co najmniej jedno rozwiązanie. Gwarantuje to twierdzenie Bolzano, gdyż funkcja $f(x) = \mathrm{e}^x - x^3$ jako różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, $f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - (-1)^3 =$ $= \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0$, $f(1) = \mathrm{e}^1 - (1)^3 = \mathrm{e} - 1 > 0$.

Bolzano wykorzystał powyższe twierdzenie do wykazania następującego rezultatu dotyczącego funkcji ciągłych.

Twierdzenie 2 (o przyjmowaniu wartości pośrednich). *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(a) < f(b)$. Jeśli $c \in (f(a), f(b))$, to istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$ taki, że $f(x_0) = c$. (Inaczej: funkcja ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie.)*

Dowód. Weźmy dowolne $c \in (f(a), f(b))$. Określamy nową funkcję ciągłą $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ wzorem $F(x) = f(x) - c$. Ponieważ $f(a) < c < f(b)$, więc $F(a) = f(a) - c < 0$, zaś $F(b) = f(b) - c > 0$. Zatem, na mocy twierdzenia Bolzano, istnieje punkt $x_0 \in [a, b]$ taki, że $F(x_0) = 0$, czyli $f(x_0) = c$. ■

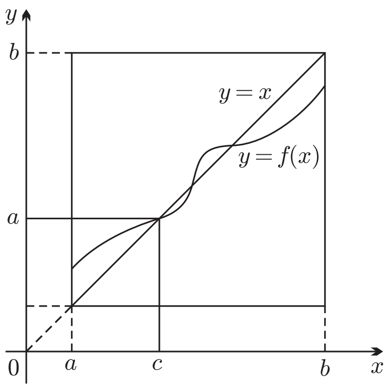
Zauważmy, że nie każda funkcja przyjmująca wszystkie wartości pośrednie jest funkcją ciągłą!

Przykład 3. Funkcja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0] \\ x + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$, przyjmuje wszystkie wartości pośrednie (proszę sporządzić rysunek), a nie jest ciągła w punkcie $x = 0$.

Zastosowania twierdzenia Bolzano

Powiemy teraz o kilku konsekwencjach rezultatów Bolzano, z których nie wszystkie są oczywiste.

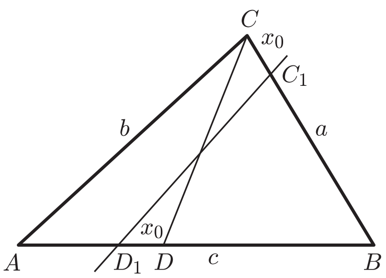
Twierdzenie 3. *Każde ciągłe odwzorowanie f przedziału $[a, b] \subset \mathbb{R}$ w siebie ma co najmniej jeden punkt niezmienniczy (stały), tzn. istnieje $c \in [a, b]$ takie, że $f(c) = c$.*



Rys. 3

Dowód. Niech $f : [a, b] \to [a, b]$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Określamy funkcję ciągłą $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ następująco: $F(x) = f(x) - x$. Ponieważ $F(a) = f(a) - a \geq 0$ i $F(b) - f(b) - b \leq 0$, (rys. 3), więc na mocy twierdzenia Bolzano istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że $F(c) = 0$, a stąd $f(c) = c$. ■

Zadanie (OM, [1]). *Dowieść, że dla każdego trójkąta istnieje prosta dzieląca ten trójkąt na dwie figury o równych obwodach i równych polach.*



Rys. 4

Rozwiązanie. Dla trójkąta równoramiennego prosta zawierającą dwusieczną kąta utworzonego przez ramiona równej długości spełnia warunki zadania. Niech ABC będzie trójkątem, w którym długości boków są różne $a < b < c$, gdzie $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$. Wówczas prosta CD połowi obwód trójkąta, o ile punkt D leży na odcinku AB spełniając warunek $|AD| = \frac{1}{2}(c + a - b)$, rys. 4 ($|DB| = \frac{1}{2}(c + b - a)$). Zauważmy teraz, że zmieniając położenie prostej połowiącej obwód trójkąta do położenia C_1D_1 (z zachowaniem warunku $|DD_1| = |CC_1|$, rys. 4) możemy również przepołowić powierzchnię trójkąta. Aby się o tym przekonać przyjmijmy, że $|DD_1| = x$, gdzie $0 < x < \frac{1}{2}(c + a - b) < a$, i przeanalizujmy wyrażenie

$$P_{\Delta ABC} - 2P_{\Delta BC_1D_1} = \frac{1}{2}ac \sin\angle B - 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(c + b - a) + x\right](a - x) \sin\angle B =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\angle B\left(ac - 2\left[\frac{1}{2}(c + b - a) + x\right](a - x)\right)$$

Ponieważ dla funkcji ciągłej

$$f(x) = ac - 2\left[\frac{1}{2}(c + b - a) + x\right](a - x)$$

mamy $f(0) = a(a - b) < 0$, $f(\frac{1}{2}(c + a - b)) = c(c - b) > 0$, więc na podstawie twierdzenia Bolzano istnieje taka wartość $x_0 \in (0, \frac{1}{2}(c + a - b))$, że $f(x_0) = 0$. Oznacza to, że prosta C_1D_1 (gdy punkty C_1, D_1 są tak dobrane, by $|CC_1| = |DD_1| = x_0$) połowi obwód i jednocześnie pole trójkąta ABC. ■

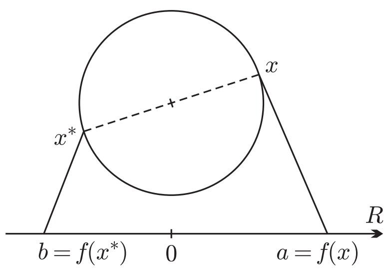
Z przedstawionego rozwiązania widać, że nie jest ono jedyne. Można również udowodnić, że *dla dowolnej płaskiej figury wypukłej istnieje prosta połowiąca jej obwód i powierzchnię.*

K. Borsuk (1905–1982),
S. Ulam (1909–1984)

Twierdzenie 4 (Borsuk–Ulam, 1933). *Niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem i $f : C \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Istnieje wtedy na okręgu para punktów antypodycznych x_1 i x_2 takich, że $f(x_1) = f(x_2)$.*

Dowód. Przypomnijmy, że dwa punkty x i x^* leżące na okręgu C nazywamy *antypodycznymi*, jeżeli cięciwa łącząca te punkty jest średnicą tego okręgu.

Ciągłe odwzorowanie $f : C \to \mathbb{R}$ będziemy interpretować jako przekształcenie okręgu w oś liczbową (rys. 5).



Rys. 5

Wybierzmy punkt $x \in C$. Na okręgu istnieje dla niego punkt antypodyczny $x^* \in C$. Zbadajmy funkcję $g : C \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(x) = f(x) - f(x^*) = = a - b$. Funkcja g jako różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Ponadto $g(x^*) = f(x^*) - f(x) = b - a = -(a - b)$. Jeżeli $a = b$, to wówczas $f(x) = f(x^*)$. Jeżeli $a \neq b$, to wartości $g(x)$ oraz $g(x^*)$ są różnych znaków. Ponieważ g jest funkcją ciągłą, więc na podstawie twierdzenia Bolzano istnieje taki punkt $x_1 \in C$, dla którego $g(x_1) = 0$. Oznacza to, że $f(x_1) = f(x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są punktami antypodycznymi. ■

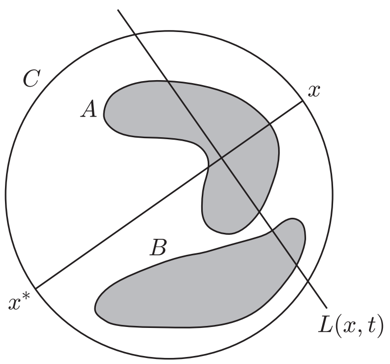
Twierdzenie to można wyrazić poglądowo: *w każdej chwili na każdym kole wielkim Ziemi (np. na równiku) istnieje para punktów antypodycznych, w których powietrze ma taką samą temperaturę.*

Twierdzenia „gastronomiczne"

Przedstawimy teraz kilka rezultatów związanych z podziałem nieregularnych obszarów płaskich (mamy na myśli część płaszczyzny ograniczoną dowolną krzywą zamkniętą) na równe części. Ich uzasadnienia opierają się na prezentowanym wyżej twierdzeniu Bolzano i twierdzeniu Borsuka–Ulama.

Twierdzenie 5 (pierwsze twierdzenie o naleśnikach). *Jeżeli A i B są dwiema ograniczonymi figurami płaskimi (leżącymi w ustalonej płaszczyźnie), to istnieje linia prosta, która jednocześnie dzieli każdą z tych figur na dwie części o równych polach.*

Dowód. Uzasadnienie przeprowadzimy w dwóch etapach.



Rys. 6

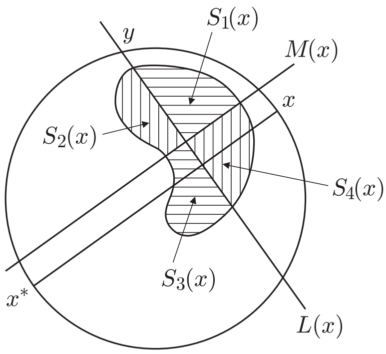
Etap 1. Ponieważ obie figury są ograniczone, więc istnieje okrąg C o średnicy d wewnątrz którego leżą obie figury. Wybierzmy punkt x leżący na okręgu C i poprowadźmy średnicę okręgu C przechodzącą przez punkt x (rys. 6). Niech $L(x, t)$ będzie prostą prostopadłą do średnicy, przecinającą średnicę w punkcie położonym w odległości t od punktu x $(0 \leq t \leq d)$. Niech $f_1(t)$ będzie polem figury A, który leży po tej samej stronie prostej $L(x, t)$ co punkt x i niech $f_2(t)$ będzie polem pozostałej części figury A. Funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są określone na przedziale $[0, d]$ i są na nim ciągłe. Funkcja $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ jest również ciągła na przedziale $[0, d]$. Zauważmy, że $f(0) = -(\text{pole figury } A)$, zaś $f(d) = (\text{pole figury } A)$. Ponieważ $f(0)$ i $f(d)$ są przeciwnego znaku, więc na mocy twierdzenia Bolazano, istnieje punkt $f \in [0, d]$ taki, że $f(t) = 0$, czyli $f_1(t) = f_2(t)$. Oznacza to, że dla każdego punktu $x \in C$ istnieje prosta $L(x)$, która dzieli figurę A na dwie części o równych polach.

Etap 2. Oznaczmy przez $g_1(x)$ pole tej części figury B, która leży po tej samej stronie prostej $L(x)$ co punkt x, przez $g_2(x)$ pole pozostałej części figury B. Rozważmy funkcję ciągłą $g : C \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Na mocy twierdzenia Borsuka–Ulama, istnieje para punktów antypodycznych y i y^*, w których $g(y) = g(y^*)$. Ponieważ

$$g(y) = g_1(y) - g_2(y),\ g(y^*) = g_1(y^*) - g_2(y^*) \text{ i } g_1(y) = g_2(y^*),\ g_2(y) = g_1(y^*),$$

więc równość $g(y) = g(y^*)$ oznacza, że $g_1(y) = g_2(y)$. Zatem prosta $L(y)$ dzieli jednocześnie obie figury na dwie części o równych polach. ■

Twierdzenie 6 (drugie twierdzenie o naleśnikach). *Jeżeli A jest ograniczoną figurą płaską, to istnieją dwie proste wzajemnie prostopadłe, które dzielą figurę A na cztery części o równych polach.*



Rys. 7

Dowód. Niech A będzie figurą ograniczoną. Istnieje okrąg C, wewnątrz którego leży figura A. Dla punktu x leżącego na okręgu C istnieje prosta $L(x)$ dzieląca figurę A na dwie części o równych polach (twierdzenie 5, etap 1). Niech $M(x)$ będzie prostą prostopadłą do prostej $L(x)$, również dzielącą figurę A na dwie części o równych polach. Proste prostopadłe $L(x)$ i $M(x)$ dzielą figurę A na cztery części o polach $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ i $S_4(x)$, rys. 7. Wtedy $S_1(x) + S_2(x) = S_3(x) + S_4(x)$ i $S_1(x) + S_4(x) = S_3(x) + S_2(x)$. Stąd $S_1(x) = S_3(x)$ i $S_2(x) = S_4(x)$. Określamy teraz funkcję $f : C \to \mathbb{R}$ za pomocą wzoru $f(x) = S_1(x) - S_2(x)$. Tak określona funkcja jest ciągła! Jeżeli $f(x) = S_1(x) - S_2(x) = 0$, to warunki twierdzenia spełniają proste $L(x)$ i $M(x)$. Załóżmy, że $f(x) = S_1(x) - S_2(x) > 0$. Rozważmy na okręgu C punkt y wyznaczony przez prostą $L(x)$, rys. 7. Wówczas

$$f(y) = S_1(y) - S_2(y) = S_2(x) - S_1(x) = -(S_1(x) - S_2(x)) < 0.$$

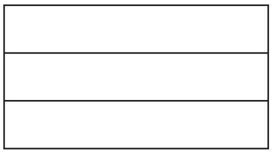
Zatem, na mocy twierdzenia Bolzano, istnieje punkt $x_0 \in C$ taki, że $f(x_0) = 0$. Punkt ten wyznacza położenie prostych prostopadłych dzielących figurę A na cztery części o równych polach. ∎

H. Steinhaus (1887–1972)

W *Kalejdoskopie matematycznym* Hugona Steinhausa (WSiP, Warszawa 1989, str. 141) znajdujemy następującą informację: *gdy mamy trzy obszary o dowolnych kształtach i położeniach, to zawsze można przepołowić je wszystkie jednym kołem*, rys. 8.

Rys. 8

Problem. *Jak okręgiem jednocześnie przepołowić trzy identyczne prostokąty z rys. 9?*



Rys. 9

Można również wykazać trójwymiarową wersję twierdzenia Borsuka–Ulama i przy jej pomocy uzasadnić, że *każdą kanapkę z masłem i szynką można jednym cięciem płaskiego noża przekroić tak, aby przepołowić chleb, masło i szynkę.* Dowody w tym przypadku wymagają bardziej zaawansowanych metod, [8], [2].

Literatura

[1] J. Browkin, *Zadania z olimpiad matematycznych t. 5*, WSiP, Warszawa 1980 (zad. 148).
[2] W.G. Chinn, N.E. Steenrod, *First concepts of topology*, Random House, N. York, Toronto 1966.
[3] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998 .
[4] J. Flota, *Bernard Bolzano i przedświt nowego etapu rozwoju matematyki*, w: *Matematyka XIX wieku*, materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki (S. Fudali, red.), str. 245–261, Szczecin 1988.
[5] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.
[6] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1979.
[7] J. Mioduszewski, *Ciągłość, szkice z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1996.
[8] K. Nowiński, *Twierdzenie o antypodach*, Delta 11/1975.
[9] Yu.A. Shashkin, *Fixed points*, AMS & MAA 1991.
[10] H. Steinhaus, *Pogadanka (trochę historyczna)*, Wiad. Mat. 7 (1963), 21–26 (lub w: *Między duchem a materią pośredniczy matematyka*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 2000, str. 80–85).